

**UNIVERZITET U BEOGRADU**  
**EKONOMSKI FAKULTET**

---

**Zlatko J. Kovačić**

# **ANALIZA VREMENSKIH SERIJA**

**Beograd, 1995.**

---

## **P r e d g o v o r**

U knjizi su izloženi osnovni metodi i problemi u analizi vremenskih serija. Studenti redovnih i poslediplomskih studija Ekonomskog fakulteta u Beogradu slušaju Analizu vremenskih serija u okviru istoimenog predmeta. Njima je prvenstveno namenjena ova knjiga. Međutim, kao prvi udžbenik iz ove oblasti na našem jeziku, ona je namenjena i studentima drugih fakulteta kao i onima koji koriste metode analize vremenskih serija u praksi. Nivo izlaganja prilagođen je obimu znanja iz statističke analize i matematike koje dobijaju studenti Ekonomskog fakulteta u okviru jednogodišnjih kurseva.

Zahvalnost dugujem profesoru Vladislavu Miloševiću i profesoru Tomislavu Zečeviću na korisnim sugestijama tokom pisanja knjige. Posebnu zahvalnost izražavam Zorici Vujošević i Rajku Bukviću čije sam primedbe na tekst u najvećoj mogućoj meri pokušao da otklonim u finalnoj verziji.

Preostale greške ili neusklađenosti, kojih nije imuna ni ova knjiga, treba pripisati isključivo autoru. Zato su sve primedbe i sugestije čitaoca dobrodošle.

U Beogradu, februara 1995.

Z.J.K.

Alisa uzdahne razočarana.

- Mislim da biste mogli korisnije provoditi svoje vreme - reče - jer ono nije zaslužilo da ga ludo trošite u zagonetkama, koje nemaju smisla.

- Kad biste poznavali Vreme kako ga ja poznajem - reče Šeširdžija - ne biste mu nikada rekli ono. Vreme je on.

- Ne znam šta ste hteli reći -reče Alisa.

- Naravno da ne znate - reče Šeširdžija podrugljivo klimajući glavom. - Mogao bi se zakleti da nikad niste govorili s Vremenom.

- Možda i nisam - odgovori Alisa oprezno. - Ali znam da moram udarati u pravo vreme kad sviram klavir.

- Aha, to je zbog toga! - reče Šeširdžija. - Pa da je barem ko drugi, nego baš: pravo Vreme. On ne da da iko u njega udara.

Luis Kerol: Alisa u zemlji čuda

# SADRŽAJ

## **Predgovor iii**

## **1 UVOD 1**

- 1.1 Definicija i vrste vremenskih serija 2
- 1.2 Ciljevi i različiti pristupi analizi vremenskih serija 5
  - 1.2.1 Ciljevi analize vremenskih serija 6
  - 1.2.2 Različiti pristupi analizi vremenskih serija 6
- 1.3 Osnovni pojmovi i oznake u analizi vremenskih serija 10
- 1.4 Osvrt na istorijski razvoj analize vremenskih serija 13

## **2 DESKRIPTIVNI METODI ANALIZE VREMENSKIH SERIJA 17**

- 2.1 Uvod 17
- 2.2 Grafički prikazi vremenskih serija 18
- 2.3 Sumarni pokazatelji vremenskih serija 26
- 2.4 Transformacija vremenskih serija 31
- 2.5 Izravnanje vremenskih serija 35
  - Zadaci 44

## **3 STRUKTURNI MODELI VREMENSKIH SERIJA 47**

- 3.1 Uvod 49
- 3.2 Eksponecijalno izravnanje 51
  - 3.2.1 Definicija i osobine 51
  - 3.2.2 Izbor konstante izravnjanja i početne vrednosti 55
- 3.3 Brownov postupak izravnjanja 59
- 3.4 Holt-Wintersov metod izravnjanja 63
- 3.5 Opšte ekspanencijalno izravnanje 72
- 3.6 Jednostavan strukturni model 76
  - Zadaci 78

## **4 MODELI STACIONARNIH VREMENSKIH SERIJA 81**

- 4.1 Uvod 81
- 4.2 Stohastički procesi, stacionarnost i ergodičnost 83
- 4.3 Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija 87
  - 4.3.1 Definicija i osobine 87
  - 4.3.2 Ocena sredine, autokovarijanse i autokorelacije 88
- 4.4 Linearni procesi 93
- 4.5 Autoregresioni procesi (AR procesi) 97
  - 4.5.1 Autoregresioni procesi prvog reda 97
  - 4.5.2 Autoregresioni procesi drugog reda 100
  - 4.5.3 Autoregresioni procesi  $p$ -tog reda 104
- 4.6 Parcijalna autokorelaciona funkcija 105
- 4.7 Procesi pokretnih proseka (MA procesi) 110
  - 4.7.1 Procesi pokretnih proseka prvog reda 110
  - 4.7.2 Procesi pokretnih proseka drugog reda 112
  - 4.7.3 Procesi pokretnih proseka  $q$ -tog reda 113
- 4.8 Dualna veza između  $AR(p)$  i  $MA(q)$  procesa 114
- 4.9 ARMA procesi 116
  - 4.9.1 ARMA(1,1) procesi 117
  - Zadaci 120

## **5 MODELI NESTACIONARNIH VREMENSKIH SERIJA 123**

- 5.1 Uvod 123
- 5.2 Nestacionarnost u sredini 124
  - 5.2.1 Deterministički i stohastički trend 124
  - 5.2.2 Homogeno nestacionarni procesi 127
- 5.3 ARIMA procesi 128
  - 5.3.1 Procesi slučajnog hoda 130
  - 5.3.2 ARIMA(0,1,1) procesi 131
- 5.4 Nestacionarnost u varijansi 131
  - 5.4.1 Varijansa i autokovarijansa kod ARIMA procesa 131
  - 5.4.2 Stabilizacija varijanse 133
  - Zadaci 134

## **6 PROGNOZIRANJE 137**

- 6.1 Uvod 137
- 6.2 Prognoza sa minimalnom srednje kvadratnom greškom 138
- 6.3 Izračunavanje prognoze 142
- 6.4 Revizija prognoze 149
- 6.5 Moguća funkcija prognoze 150
  - Zadaci 153

## **7 IZGRADNJA A R I M A MODELA 157**

- 7.1 Uvod 157
- 7.2 Opšta strategija modeliranja 160
- 7.3 Identifikacija modela 161
  - 7.3.1 Određivanje reda diferenciranja 164
  - 7.3.2 Testovi jediničnih korena 172
  - 7.3.3 Određivanje reda procesa 178
  - 7.3.4 Korišćenje kriterijuma za izbor modela 181
  - 7.3.5 Inverzna autokorelaciona funkcija 183
  - 7.3.6 Ostali metodi određivanja reda procesa 185
- 7.4 Ocenjivanje koeficijenata modela 186
  - 7.4.1 Metod momenata 186
  - 7.4.2 Metod nelinearnih najmanjih kvadrata 188
  - 7.4.3 Metod najveće verodostojnosti 191
- 7.5 Provera adekvatnosti modela 197
  - 7.5.1 *Portmanteau* test 197
  - 7.5.2 Dodavanje novih koeficijenata 202
- Zadaci 195

## **8 MODELI SEZONSKIH VREMENSKIH SERIJA 209**

- 8.1 Uvod 210
- 8.2 Sezonski ARIMA modeli 211
  - 8.2.1 Sezonski AR(1) modeli 213
  - 8.2.2 Sezonski MA(1) modeli 213
  - 8.2.3 "Vazduhoplovni" model 213
- 8.3 Testovi sezonskih jediničnih korena 224
- 8.4 Prognoziranje sezonskim ARIMA modelima 230
- 8.5 Veza ARIMA i strukturnih modela vremenskih serija 239
- 8.6 Desezoniranje 243
  - 8.6.1 Empirijski pristup desezoniranju: X-11-ARIMA 243
  - 8.6.2 Modelski pristup desezoniranju 247
- Zadaci 247

## **9 SPEKTRALNA ANALIZA VREMENSKIH SERIJA 253**

- 9.1 Uvod 253
- 9.2 Fourierova analiza 255
- 9.3 Spektralna teorija stacionarnih procesa 264
  - 9.3.1 Spektar i njegove osobine 264
  - 9.3.2 Spektralna funkcija rasporeda 266
  - 9.3.3 Spektralna funkcija gustine 267
  - 9.3.4 Spektar teorijskih procesa 268
  - 9.3.5 Efekat sistematskog uzorka 272

- 9.4 Ocena spektra 273
  - 9.4.1 Periodogram i njegove osobine 273
  - 9.4.2 Uzorački spektar 278
  - 9.4.3 Konzistentne ocene spektra 280
  - 9.4.4 ARMA ocenjivanje spektra 288
- 9.5 Analiza serije u frekventnom domenu 289
  - Zadaci 291

## **10 OSTALI MODELI I PITANJA U ANALIZI VREMENSKIH SERIJA 295**

- 10.1 Uvod 295
- 10.2 Analiza intervencije i nestandardne opservacije 296
- 10.3 Modeli funkcije prenosa 299
- 10.4 Kointegracija 304
- 10.5 Modeli vektorskih vremenskih serija 308

## **LITERATURA 313**

### **DODATAK A 323**

- Vremenske serije korišćene za ilustraciju 323

### **DODATAK B 331**

- Statističke tablice 331

# 1 UVOD

Analiza vremenskih serija predstavlja jednu od statističkih disciplina koja beleži najdinamičniji razvoj poslednjih decenija. Do ovog burnog razvoja došlo je unutrašnjom dinamikom i dostignutim stepenom razvoja same discipline, a takođe i zbog prisutne interakcije sa ostalim disciplinama, posebno ekonomijom<sup>1</sup>. Pratimo razvoj savremene analize vremenskih serija koji je tekao uporedo, kako sa evolucijom ekonomskih modela od statičkih do dinamičkih, tako i sa uvođenjem neizvesnosti u modele, odnosno njihovom evolucijom od determinističkih do stohastičkih modela.

Poslednje dve dekade potreba za novim metodološkim instrumentima u teorijskoj i empirijskoj ekonomiji javila se sa utemeljenjem Nove klasične ekonomije. Ovaj pravac ekonomske misli, poznatiji pod nazivom škola racionalnih očekivanja, dominira tokom osamdesetih godina u ekonomskoj akademskoj sredini na Zapadu. Metodološku osnovu ove škole čine upravo stohastički procesi i stohastički modeli vremenskih serija<sup>2</sup>. Radovi autora koji pripadaju navedenoj školi započinju izlaganjem pretpostavke da se posmatrana ekonomska pojava može opisati vektorskim stohastičkim procesom, odnosno odgovarajućim modelom vektorske vremenske serije. Pri tome napominjemo da je reč prevashodno o radovima iz teorijske ekonomije, a ne statističke analize vremenskih

---

<sup>1</sup> Kao ilustracija stava o velikom interesu u ekonomiji za modelima vremenskih serija neka posluži podatak da je na poslednjem, 6. *Svetskom ekonometrijskom kongresu* održanom u Barseloni 1992. godine preko petina radova direktno posvećena teoriji i primeni modela vremenskih serija u različitim ekonomskim disciplinama.

<sup>2</sup> Tako na primer, prvo izdanje udžbenika *Makroekonomske Teorije* iz 1979. godine jednog od vodećih protagonista ove škole ekonomske misli, Sargenta (Sardžent) podeljeno je na dva dela: nestohastičku i stohastičku makroekonomiju. U knjizi koja je namenjena prevashodno ekonomistima u okviru drugog dela izlažu se diferencijalne jednačine, teorijske osnove linearne regresije i linearne stohastičke diferencne jednačine, a u okviru ove glave i Fourierova (Furijeova) i spektralna analiza.

Kao što ćemo videti nakon četvrte glave ove knjige, modeli vremenskih serija kojima se pretežno bavimo, sa matematičkog stanovišta pripadaju upravo klasi linearnih stohastičkih diferencnih jednačina.



serija. Sve ovo ukazuje na to da praćenjem evolucije discipline kojoj je posvećena ova knjiga, možemo razumeti njen sadašnji stepen dostignutog razvoja.

Stoga smo na kraju ove uvodne glave jedno poglavlje posvetili osvrtu na istorijski razvoj analize vremenskih serija sa ukazivanjem na ključne radove autora koji su tom razvoju doprineli. Pre toga izlažu se osnovni pojmovi vezani za analizu vremenskih serija, između ostalog definicija same vremenske serije, način konstruisanja vremenske serije kao i razmatranje tipova vremenskih serija koji se u različitim prilikama javljaju prvenstveno u ekonomiji, ali i u drugim naučnim disciplinama. U okviru ove glave ukazujemo i na četiri cilja kao i na različite pristupe analizi vremenskih serija. U posebnoj poglavlju u okviru ove glave uvodimo standardne oznake koje ćemo koristiti u narednim glavama, a takođe i neke od osnovnih pojmova vezanih za analizu vremenskih serija.

## 1.1 DEFINICIJA I TIPOVI VREMENSKIH SERIJA

Formalnu definiciju vremenske serije daćemo tek nakon uvođenja pojma stohastičkog procesa u 4. Glavi. Za početak sasvim je dovoljno reći da *pod vremenskom serijom podrazumevamo uređeni niz opservacija*. Pri tome se uređivanje najčešće, ali ne nužno, vrši s obzirom na vreme<sup>3</sup> i to obično u jednakim vremenskim intervalima. Vremenske serije kojima se bavimo u knjizi imaju upravo ovu karakteristiku.

Ukažimo na jednu od suštinskih razlika između klasične statističke analize i statističke analize vremenskih serija. Dok su kod klasične statističke analize elementi slučajnog uzorka međusobno nezavisni, dotle kod analize vremenskih serija opservacije u uzorku *nisu među sobom nezavisne* samim tim što pri analizi moramo uzeti u obzir njihov vremenski poredak. Upravo ovu međusobnu zavisnost opservacija koristimo u analizi vremenskih serija u cilju formiranja modela vremenske serije. Model zatim koristimo da na osnovu prošlih, prognoziramo buduće opservacije.

Vremenske serije srećemo u različitim oblastima ljudskog života. Tako na primer u demografiji prikupljamo podatke o godišnjim stopama nataliteta, mortaliteta, odn. stopi prirodnog priraštaja. U ekonomiji pratimo dnevne fluktuacije deviznog kursa, nedeljnu prodaju proizvoda nekog preduzeća, mesečno kretanje industrijske proizvodnje i cena, kvartalne podatke o prometu u ugostiteljstvu i godišnju vrednost društvenog proizvoda. U geofizici pratimo aktivnosti zemlje (zemljotresi). U medicini za pacijenta beležimo između ostalog njegov elektrokardiogram (EKG) u svakom vremenskom trenutku pregleda. U meteorologiji registrujemo svakog sata brzinu vetra, dnevno pratimo temperaturu i prosečne mesečne ili godišnje padavine na nekoj teritoriji. U poljoprivredi posmatramo godišnje kretanje prinosa pojedinih poljoprivrednih kultura i njihove otkupne i prodajne cene.

---

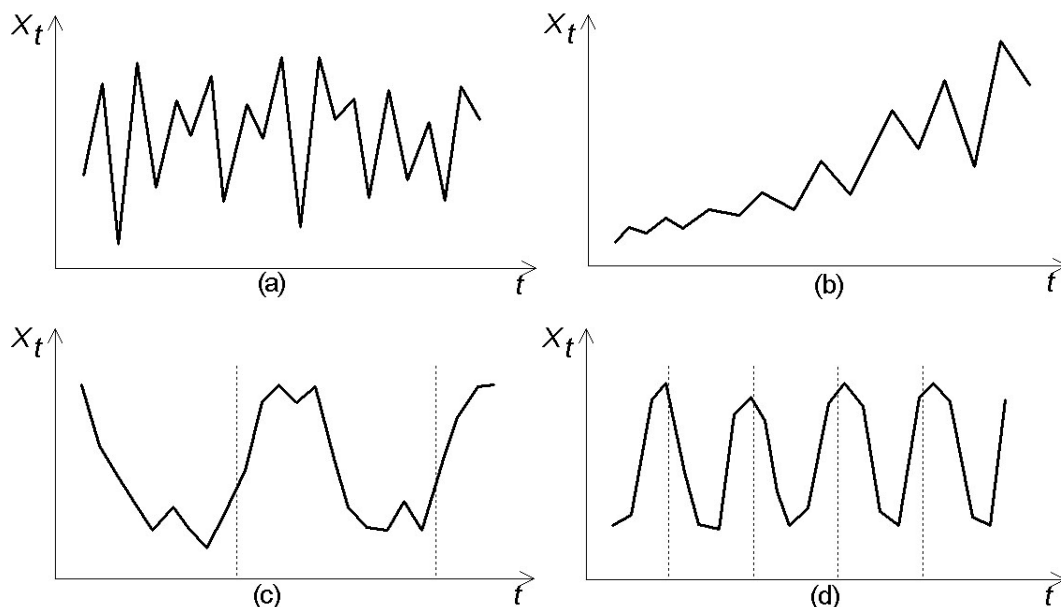
<sup>3</sup> Postoje i serije kod kojih se uređivanje vrši s obzirom na prostor, to su *prostorne* ili *geografske* serije (engl. *spatial series*).

Vremenske serije možemo klasifikovati korišćenjem različitih kriterijuma. Jedna od podela je na *neprekidne* i *prekidne* vremenske serije. Neprekidna je ona vremenska serija kod koje opservacije možemo registrovati u ma kom vremenskom trenutku. Primeri takvih vremenskih serija su cene, vrednost akcija na berzi i temperatura. Prekidna vremenska serija je ona serija kod koje opservacije beležimo u istim vremenskim intervalima (dnevno, mesečno, kvartalno ili godišnje). Osobina prekidnosti vremenske serije proističe iz prirode posmatrane pojave. Međutim, do prekidne vremenske serije možemo doći i na osnovu neprekidne, tako što ćemo kod ove potonje snimanje posmatrane pojave vršiti samo u određenim vremenskim intervalima. Tada kažemo da smo *sistematskim uzorkom* (engl. *systematic sample*) (u jednakim vremenskim intervalima) beležili vrednosti neprekidne vremenske serije. Primer tako dobijene serije je cena akcije na berzi. Naime, cena akcije varira neprekidno tokom dana, ali se njena vrednost beleži u trenutku zatvaranja berze. Drugi način dobijanja prekidne vremenske serije je *vremenskim agregiranjem* (engl. *temporal aggregation*) (kumuliranjem) posmatrane neprekidne vremenske serije u izabranom intervalu vremena. Primeri tako dobijenih prekidnih vremenskih serija jesu vrednost društvenog proizvoda ili uvoza, odnosno izvoza u određenom vremenskom periodu<sup>4</sup>. Kao što se može zaključiti na osnovu rečenog, u bliskoj vezi sa načinom dobijanja prekidne vremenske serije na osnovu neprekidne, sistematskim uzorkom i vremenskim agregiranjem, jeste podela ekonomskih veličina na tzv. promenljive stoka (cene, kamatne stope, vrednost akcija i sl.) i promenljive toka (narodni dohodak, proizvodnja, potrošnja i sl.). Promenljive stoka imaju u svakom vremenskom trenutku određenu vrednost, a mi biramo trenutke kada ćemo tu vrednost zabeležiti. Za promenljivu toka kažemo da ju je moguće zabeležiti, odnosno da postoji samo protokom vremena, u nekom vremenskom intervalu, a ne u vremenskom trenutku. Tako može biti reči o vrednosti društvenog proizvoda u prvom kvartalu godine, ali ne i na dan, na primer 12. maja 1981. godine.

Nekoliko karakterističnih tipova vremenskih serija prikazano je na Slici 1.1 i Slici 1.2, gde smo sa  $X_t$  označili opservaciju vremenske serije u trenutku  $t$ . Prvi tip vremenske serije na Slici 1.1(a) karakterišu slučajna odstupanja oko konstantnog nivoa. Za takve vremenske serije kažemo da su stacionarne u sredini (nivo serije ne menja se tokom vremena). Na Slici 1.1(b) prikazana je serija sa trendom sa slučajnim fluktuacijama oko tog uzlaznog trenda. Ova serija predstavlja primer nestacionarne serije u sredini (nivo serije povećava se tokom vremena). Istovremeno sa porastom nivoa ove vremenske serije povećava se i njena varijansa, pa je serija nestacionarna i u varijansi. Na naredne dve slike prikazane su vremenske serije kod kojih se varijacije u nivou

<sup>4</sup> Pored navedenih srećemo i specifične prekidne vremenske serije koje imaju još i svojstvo da njihove opservacije mogu biti samo nenegativni celi brojevi. Primer takve vremenske serije jeste broj postignutih golova na fudbalskim utakmicama. U operacionim istraživanjima registrujemo niz događaja koji se na slučaj javljaju tokom vremena (na primer slučajni dolasci klijenata u sisteme masovnog opsluživanja). Ovde nas interesuje raspored broja klijenata koji će doći u određenom vremenskom intervalu, a takode i raspored vremenskih intervala između dva uzastopna dolaska. Takva vrsta serije se modelira posebnim modelima vremenskih serija, a sam proces se naziva *prebrojiv proces* (engl. *count process*). U okviru ovih procesa, a sa primenom u teoriji komunikacije, javljaju se tzv. *binarni procesi*, odnosno vremenske serije kod kojih opservacije uzimaju samo dve vrednosti (označavaju se obično sa 0 i 1).

serije periodično ponavljaju. Ako je period ponavljanja sličnog toka serije duži od godinu dana tada govorimo o cikličnom karakteru te serije (Slika 1.1(c)).

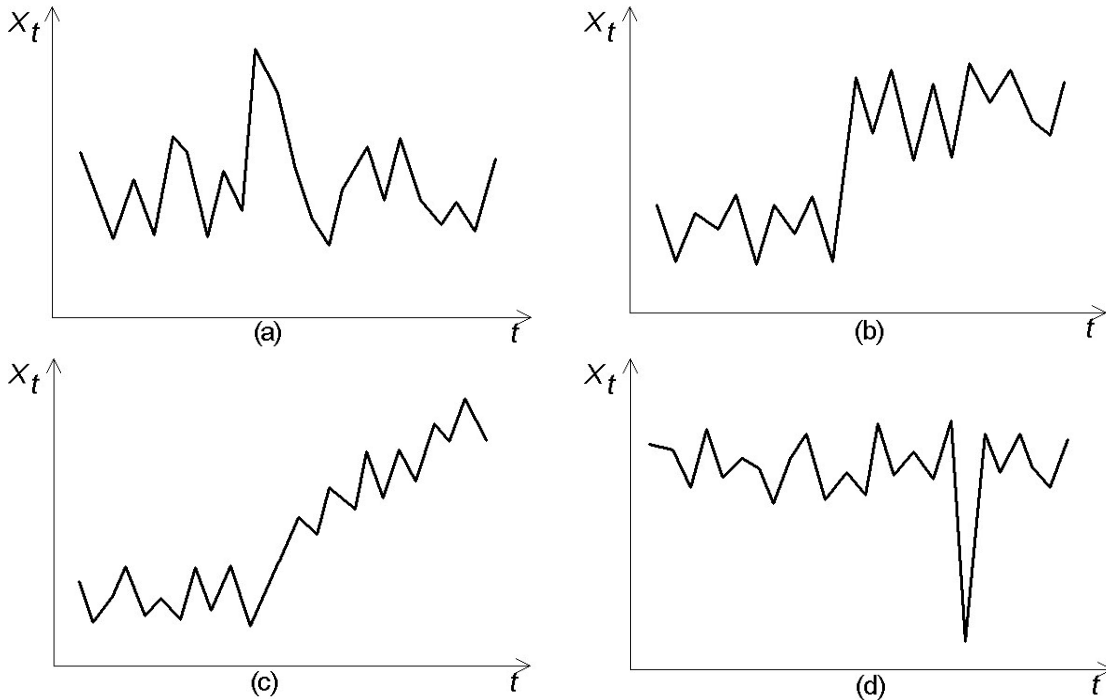


**Slika 1.1 Tipovi vremenskih serija:** (a) konstantan proces; (b) proces sa trendom; (c) serija sa cikličnim varijacijama; (d) serija sa sezonskim varijacijama

Tako na primer, pojava usporenja ili ubrzanja privredne aktivnosti (prisustvo poslovnih ciklusa) predstavlja objašnjenje pojave cikličnog kretanja vremenske serije proizvodnje. Ako se oscilacije ponavljaju u periodima do godinu dana (mesečno, kvartalno ili polugodišnje) tada je reč o sezonskim varijacijama, a same serije nazivamo sezoneke vremenske serije. Do sezonskih oscilacija dolazi na primer zbog različitih vremenskih uslova, odnosno pojava koje se mogu pripisati klimatskim ili kalendarskim faktorima. Tako će prodaja osvežavajućeg pića u letnjem, biti po pravilu znatno viša od prodaje u zimskom periodu, a proizvodnja će po pravilu biti manja u januaru od proizvodnje u decembru zbog manjeg broja radnih dana u januaru (novogodišnji i božićni praznici). Nestacionarne vremenske serije sa Slike 1.1(b)-(d) odgovarajućom transformacijom svodimo na stacionarne serije.

Na Slici 1.2 data su četiri tipa vremenske serije čija se struktura tokom vremena jednokratno ili trajno promenila pod dejstvom egzogenih poremećaja. Tako na primer Slika 1.2(a) prikazuje vremensku seriju kod koje je u jednom vremenskom trenutku došlo do promene u strukturi zbog spoljnog, jednokratnog poremećaja, pa su dve opservacije vremenske serije na višem nivou u odnosu na ostale opservacije. Primer jednog takvog egzogenog poremećaja jeste naftni embargo koji su uvele zemlje članice OPEK-a prema privredama Zapada 1973. godine. Kod serije sa Slike 1.2(b) je u izvesnom vremenskom trenutku došlo do trajnog porasta nivoa što se odrazilo u stepenastom izgledu njenog nivoa. Primer ovog tipa serije predstavlja vremenska serija

prodaje proizvoda nekog preduzeća u situaciji pojave novog kupca. Naime, u trenutku pojave novog kupca doći će do povećane prodaje proizvoda, što će se odraziti u trajnom povećanju nivoa vremenske serije.



**Slika 1.2 Tipovi vremenskih serija:** (a) sa jednokratnom intervencijom; (b) sa stepenastom intervencijom; (c) serija sa rampom; (d) serija sa nestandardnom opservacijom.

Naredni tip serije kod koga se uočava promena u strukturi prikazan je na Slici 1.2(c). Kod njega se nakon fluktuacija oko konstantnog nivoa, u jednom vremenskom trenutku počinje da iskazuje uzlazni trend, a sama vremenska serija ima izgled podignute rampe. Naposljetku, poslednji tip vremenske serije sa Slike 1.2(d) sadrži jednu *nestandardnu opservaciju* (engl. *outlier*). Do pojave nestandardne opservacije u vremenskoj seriji proizvodnje moglo je doći na primer zbog štrajka, nestanka struje ili je ona jednostavno rezultat slučajne greške u registrovanju posmatrane pojave.

## 1.2 CILJEVI ANALIZE VREMENSKIH SERIJA I RAZLIČITI PRISTUPI ANALIZI

Korišćenjem različitih modela analize vremenskih serija želimo opisati izučavanu pojavu, po mogućnosti dati objašnjenje zašto i kako je do nje došlo, zatim predvideti njeno kretanje u narednom periodu i naposljetku, manipulacijom veličina koje uslovljavaju posmatranu pojavu, istu držati pod kontrolom. Da bismo izašli u susret ovim ciljevima možemo koristiti alternativne pristupe analizi vremenskih serija, odnosno različita metodološka i modelska rešenja u okviru svakog od njih.

### 1.2.1 Ciljevi analize vremenskih serija

Kao što smo gore nagovestili, analizom vremenskih serija želimo postići sledeća četiri parcijalna cilja, koji se mogu smatrati delovima jednog sveopšteg cilja:

- (1) **Deskripcija.** U cilju izučavanja osnovnih karakteristika vremenske serije koristimo njene grafičke prikaze i sumarne statistike. Opis ključnih karakteristika serije ima vrednost po sebi, ali najčešće predstavlja prvu etapu analize vremenske serije. Mi bismo je preporučili kao obaveznu etapu. Naime, često se tokom analize pokaže da je već jednostavnim grafičkim prikazom došla do izražaja suštinska karakteristika posmatrane pojave, te da nema potrebe pozivati u pomoć složenije statističke metode analize vremenskih serija.
- (2) **Objašnjenje.** Kada raspoložemo sa više serija moguće je koristiti varijacije jedne serije u cilju objašnjenja varijacija u drugoj vremenskoj seriji. Jedan od pristupa u tom smislu baziran je na regresionoj analizi vremenskih serija (model jedne jednačine ili model simultanih jednačina), a drugi na analizi modela funkcije prenosa (ulazna serija se transformiše u izlaznu seriju linearnom transformacijom). Takođe, generalizacijom modela jednodimenzionih vremenskih serija kao što su na primer autoregresioni modeli, dobijamo modele višedimenzionih vremenskih serija, tzv. vektorske autoregresione modele. U poslednje vreme ovi modeli vremenskih serija predstavljaju osnovu za strukturnu analizu posmatrane pojave (ispitivanje egzogenosti, uzročnosti i dr.).
- (3) **Prognoziranje.** Na osnovu prošlih opservacija identifikujemo i ocenimo model vremenske serije koga potom koristimo za formiranje prognoze budućih vrednosti serije. U svakoj od navedenih etapa gradnje modela koristimo razudeni skup statističkih testova i kriterijuma kojima verifikujemo valjanost korišćenog prognostičkog modela u poređenju sa drugima konkurentskim modelima.
- (4) **Kontrola.** Da bismo postigli ovaj cilj analize gradimo model funkcije prenosa vremenske serije i na osnovu njega formiramo prognozu. Zatim ulaznu seriju prilagođavamo tako da rezultirajući, izlazni proces bude u blizini željenog cilja. Kontrola kao cilj analize posebno je interesantan u analizi vremenskih serija koje se javljaju u statističkoj kontroli kvaliteta.

### 1.2.2 Različiti pristupi analizi vremenskih serija

Moguće je metode analize vremenskih serija klasifikovati korišćenjem različitih kriterijuma. Osnovna podela različitih metoda analize vremenskih serija vezana je za domen analize. Tako razlikujemo metode analize vremenskih serija kod kojih se analiza obavlja u *vremenskom domenu* i u *frekventnom domenu*. Analiza serije u vremenskom domenu je ekonomistima intuitivno bliža. Ona je zasnovana na posmatranju opservacija vremenske serije kao funkcije vremena. Za analizu vremensko zavisnih opservacija kakve su one u vremenskoj seriji u vremenskom domenu koristimo tzv. *autokorelacionu funkciju*. Njome je iskazana korelaciona struktura vremenske serije (uzajamna zavisnost

dve opservacije vremenske serije udaljene međusobno za izvestan vremenski period). Ona predstavlja osnovno oruđe analize i modeliranja vremenske serije u vremenskom domenu. Ako smo opservacije vremenske serije prikazali kao funkciju frekvencija tada kažemo da analizu vršimo u frekventnom domenu. Za analizu u frekventnom domenu koristimo *spektralnu funkciju gustine*. Ona ukazuje na doprinose periodičnih komponenti na različitim frekvencijama ukupnoj varijansi vremenske serije. Analizom jedne vremenske serije u vremenskom domenu bavimo se od druge do osme glave, a u devetoj glavi izlažemo analizu u frekventnom domenu. Pogrešno bi bilo zaključiti da analiza u vremenskom i frekventnom domenu predstavljaju dve međusobno isključive mogućnosti analize vremenske serije. Upravo suprotno od toga, kažemo da su ova dva pristupa ekvivalentna međusobom s obzirom da se spektralna funkcija gustine iskazuje na osnovu autokorelacione funkcije i obratno.

Pored dva navedena pristupa analizi vremenskih serija s obzirom na domen analize, izložit ćemo klasifikaciju metoda u okviru analize u vremenskom domenu. Dajemo ukratko njihove definicije, dobre i loše strane i situacije u kojima se preporučuje njihovo korišćenje.

1. **Metod dekompozicije.** Metod dekompozicije polazi od pretpostavke da je vremenska serija komponovana na aditivan ili multiplikativan način od četiri komponente: trenda, ciklične, sezonske i slučajne komponente. U postupku primene prve tri komponente se ocene na osnovu svih raspoloživih podataka, a potom se njihovom ekstrapolacijom formira prognoza budućih vrednosti serije. Kada se u literaturi govori o klasičnom metodu statističke analize vremenskih serija podrazumeva se upravo ovaj metod dekompozicije<sup>5</sup>. Najpoznatija operacionalizacija ovog metoda predstavlja računarski program X-11 koji se između ostalog koristi za desezoniranje vremenskih serija i od strane zvanične statistike. Glavna prednost metoda dekompozicije je njegova razumljivost, lakoća primene i jednostavnost interpretacije. Najveći nedostatak metoda je njegova arbitrarnost u tom smislu što ne postoji teorijski model na osnovu koga možemo izvršiti statističko vrednovanje dobijenih rezultata dekompozicije. Takođe se od strane korisnika zahteva intervencija u etapi formiranja prognoze trenda i ciklične komponente.
2. **Jednostavno eksponencijalno izravnanje.** Ovaj metod izravnanja predstavlja ponderisani prosek opservacija vremenske serije pri čemu veličina pondera opada sa starošću podataka. Prednost metoda je njegova jednostavnost, nije zahtevan u pogledu dužine vremenske serije i potpuno je automatizovan. Stoga nalazi veliku primenu u situacijama kada je potrebno u relativno kratkom vremenskom roku za stotine vremenskih serija formirati prognozu. Osnovni nedostatak je što ne omogućava tretman serija sa trendom i sezonom. Naredni metod prevazilazi taj problem.

---

<sup>5</sup> O načinu analize vremenskih serija metodom dekompozicije videti standardne udžbenike iz statistike kao što je na primer udžbenik autora: Žižić, Lovrić i Pavličić (1992, 14. Glava).

3. **Holt-Wintersov (Holt-Vintersov) metod izravnanja.** Ovaj metod predstavlja proširenje metoda jednostavnog eksponencijalnog izravnanja dvema jednačinama od kojih prvom vršimo reviziju ocene trenda, a drugom reviziju ocene sezone. Preciznost mu je veća u odnosu na metod jednostavnog eksponencijalnog izravnanja, a zadržava sve dobre osobine ovog potonjeg metoda.
4. **Strukturni modeli.** Ovu klasu modela jednostavno bismo opisali kao regresione modele kod kojih su regresori funkcije vremena sa koeficijentima koji se menjaju tokom vremena. Prethodna dva metoda mogu se smatrati pretečama strukturnih modela. No, za razliku od njih, strukturni modeli su zasnovani na teorijski definisanom statističkom modelu, što omogućava vrednovanje ocenjenog modela. Međutim, sa računске strane ovi modeli su veoma zahtevni. Slično narednoj klasi modela zahtevaju relativno veliko iskustvo za uspešnu primenu. Jednostavno eksponencijalno izravnanje, Holt-Wintersov metod izravnanja i strukturni modeli izlažu se u okviru 3. Glave.
5. **Box-Jenkinsov (Boks-Dženkinsov) metod.** Zasnovan je na klasi ARIMA modela<sup>6</sup>. Na osnovu analize podataka vremenske serije identifikuje se odgovarajući model iz ove klase. Zatim se vrši njegovo ocenjivanje i provera adekvatnosti. Postupak se ponavlja ukoliko se pokaže da je model neadekvatan. U suprotnom model se može koristiti u svrhe prognoziranja. U odnosu na ostale metode Box-Jenkinsov metod daje najpreciznije prognoze. Metod je fleksibilan jer razmatra veoma široku klasu modela među kojima se po definisanom postupku bira onaj koji najbolje reprezentuje podatke. Počevši već od etape identifikacije dolazi do izražaja osnovni nedostatak metoda, a to je da je za korišćenje ovog metoda potreban dobro uvežban analitičar sa velikim iskustvom. Sam postupak dolaženja do modela je spor i iziskuje znatne troškove. U svakoj etapi zahteva se intervencija od strane analitičara i donošenje odluke u kom pravcu nastaviti dalje. Što se preciznosti prognoze tiče, Holt-Wintersov metod je sasvim konkurentan Box-Jenkinsovom metodu. Ova konstatacija važi posebno u situacijama kada raspoložemo sa relativno kratkim vremenskim serijama (do 50 opservacija). Uzimajući u obzir velike troškove koji se javljaju pri korišćenju, neki autori (kao na primer Chatfield (Četfild) (1989)), Box-Jenkinsov metod preporučuju samo ako se pokaže da je analitičar kompetentan da koristi metod, da je kompleksnost postupka opravdana ciljevima koji se žele postići i naposljetku da varijacije u seriji nisu pod dominantnim uticajem trenda i sezone.
6. **Metod stepenaste autoregresije.** Metod koji je predložen od strane Newbolda (Njubold) i Grangera (Grendžer) (1974) može se posmatrati kao varijanta Box-Jenkinsovog metoda. Njime je pokušano prevazilaženje potrebe za intervencijom analitičara u svakoj fazi gradnje modela definisanjem potpuno automatskog postupka izbora modela iz klase autoregresionih modela. Sam metod je zasnovan

---

<sup>6</sup> Kod ARIMA modela tekuća vrednost nestacionarne vremenske serije predstavljena je kao funkcija sopstvenih prošlih vrednost, a takode tekuće i prošlih vrednosti slučajnih grešaka. Ovu klasu modela definišemo u 4. Glavi.

na dobro poznatom postupku uključivanja regresora u stepenastoj regresiji. U ovom slučaju ulogu regresora preuzimaju vrednosti vremenske serije s docnjom. Prednost metoda je u njegovoj potpunoj automatizaciji uz korišćenje standardnih statističkih programskih paketa sa programima za stepenastu regresiju. Nedostatak je što se ograničava samo na klasu autoregresionih modela, mada modelirana vremenska serija može biti generisana procesom pokretnih sredina ili mešovitim ARMA procesom.

7. **Parzenovi ARARMA modeli.** Ovi modeli su delimično u tradiciji Box-Jenkinsovog pristupa. Parzen (Parzen) (1982) je izvršio modifikaciju u početnoj etapi u tom smislu što ne zahteva diferenciranje vremenske serije u cilju postizanja njene stacionarnosti. On predlaže korišćenje autoregresionih modela prvog ili drugog reda čiji koeficijenti mogu biti veći od jedinice u cilju otklanjanja nestacionarnosti. Nakon toga se serija reziduala tih modela tretira kao stacionarna serija i za nju se bira model iz klase ARMA modela korišćenjem jednog od formalnih kriterijuma. Time je subjektivnost postupka izbora modela, koja inače krasí Box-Jenkinsov pristup, u celini ili barem delimično eliminisana, što istovremeno predstavlja glavni argument u prilog ovog pristupa.
8. **Bayesov (Bajesov) metod.** Ovaj metod omogućava definisanje ne jednog, nego čitavog skupa modela sa apriornim verovatnoćama koje analitičar pridružuje svakom modelu iz tog skupa, odnosno koje pridružuje njegovim koeficijentima. Zatim se koeficijenti modela ponovo izračunavaju čim nova opservacija postane dostupna, odnosno određuju se aposteriorne verovatnoće. Bayesov pristup prognoziranju, može se posmatrati kao stohastička verzija Holt-Wintersovog metoda izravnjanja. Izračunavanje nove ocene koeficijenata modela zasnovano je na postupku tzv. Kalmanovog filtriranja. Prema definiciji ovaj metod može obuhvatiti prethodno izložene modele što samo svedoči o njegovoj fleksibilnosti. Zbog stalne izmene koeficijenata modela prilivom nove opservacije ovaj metod uspešno modelira vremenske serije sa promenljivom strukturom. Mada se po svojoj preciznosti može porediti sa Box-Jenkinsovom metodom u manjoj je upotrebi zbog svoje računске složenosti kao i poteškoća koje korisnici imaju u razumevanju dobijenih rezultata. U svakoj etapi od analitičara se zahteva intervenciju u smislu pridruživanja verovatnoća koeficijentima modela.

Ovim spiskom nisu iscrpljeni svi metodi, odnosno modeli vremenih serija koji su predloženi i korišćeni u literaturi. Tako su na primer Carbone (Karboun) i Longini (Londžin) (1977) predložili postupak AEP filtriranja koji u suštini definiše model sa vremenski zavisnim koeficijentima. Lewandowski (Levandovski) (1982) je predložio FORSYS koji kombinuje metod dekompozicije i Holt-Wintersov metod modifikujući ovaj potonji tako što dozvoljava mogućnost da njegovi koeficijenti budu promenljivi, a ne konstantni. Uniformisani pristup alternativnim modelima vremenskih serija dat je u odličnom članku Harveya (Harvi) (1984). Kratak prikaz navedenih metoda i modela dat je kod Wheelwrighta (Vilrajt) i Makridakisa (Makridakis) (1984).



### 1.3 OSNOVNI POJMOVI I OZNAKE U ANALIZI VREMENSKIH SERIJA

U ovom poglavlju izložit ćemo osnovne pojmove i veličine koje srećemo pri korišćenju metoda analize vremenskih serija, prvenstveno u vremenskom domenu. U prvom čitanju ovo se poglavlje može preskočiti<sup>7</sup>.

Opservaciju vremenske serije u vremenskom trenutku  $t$  označavamo sa  $X_t$ , kao što smo inače označili na Slici 1.1. Jedan od osnovnih ciljeva koje želimo postići u analizi vremenskih serija jeste prognoza budućih opservacija vremenske serije. Do prognoziranih vrednosti dolazimo na osnovu  $n$  raspoloživih opservacija vremenske serije  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Ne ulazeći u način dolaženja do prognozirane vrednosti (za to se koristi jedan od predloženih metoda iz prethodnog odeljka) naš je zadatak da u sadašnjem periodu  $n$ , korišćenjem svih prethodnih opservacija, formiramo te prognozirane vrednosti. Neka na primer raspoložimo mesečnom vremenskom serijom industrijske proizvodnje u periodu od januara 1987. godine do maja 1994. godine, što znači da imamo na raspolaganju 89 opservacija ( $n=89$ ). Vrednost industrijske proizvodnje u maju 1994. godine je poslednji raspoloživi podatak (to označavamo sa  $X_n = X_{89} = X_{\text{maj},94}$ ). Na osnovu jednog od izloženih metoda dolazimo do prognoze industrijske proizvodnje u junu 1994. godine, odnosno u prvom narednom periodu. Tu prognozu za jedan period unapred označavamo sa  $\hat{X}_{\text{maj},94}(\text{jun},94)$ , a u opštem slučaju  $\hat{X}_n(1)$ , čime se oznakom sugerije da je prognoza formirana u tom periodu (početni period prognoze) za prvi naredni period. Od nas se može zahtevati da formiramo prognozu za više perioda unapred. Broj budućih perioda za koji je potrebno formirati prognozu označavamo sa  $h$  i nazivamo ga *dužinom horizonta prognoziranja*. Tako u opštem slučaju imamo *prognozu za  $h$  perioda unapred*  $\hat{X}_n(h)$ . Ako u našem primeru stavimo da je  $h=3$ , to znači da u maju 1994. godine, na osnovu raspoloživih 89 podataka, formiramo prognozu za jun, jul i avgust 1994. godine.

Ne ulazeći u izvore grešaka prognoze konstatujemo da između ostvarene i prognozirane vrednosti postoje razlike. Te razlike ili odstupanja označavamo sa

$$e_n(h) = X_{n+h} - \hat{X}_n(h) \quad (1.1)$$

i nazivamo *greška prognoze za  $h$  perioda unapred*. U našem primeru prognoza junske proizvodnje dobijena u maju 1994. godine generiše *grešku prognoze za jedan period unapred*

$$e_n(1) = X_{n+1} - \hat{X}_n(1) \quad (1.2)$$

<sup>7</sup> To se posebno odnosi na deo posvećen razmatranju prognoziranja. Mada se u šestoj glavi bavimo prognoziranjem na osnovu ARIMA modela vremenskih serija, zbog strukturnih modela koje izlažemo u trećoj glavi smatrali smo za potrebno ukratko navesti neke pojmove u vezi s tim.

Ove greške predstavljaju osnovu za konstruisanje pokazatelja tačnosti različitih metoda i modela prognoziranja.

Ako se početni period prognoze poklapa sa dužinom vremenske serije tada *unutar uzorka* formiramo razlike opservacija vremenske serije i odgovarajućih ocenjenih vrednosti na osnovu korišćenog modela. Te razlike nazivamo rezidualima, a s obzirom na gornje označavanje, one predstavljaju grešaka prognoze za jedan period unapred, tj. to su  $e_0(1), e_1(1), \dots, e_{n-1}(1)$ . Poređenje prognoza različitih modela vršimo korišćenjem sumarnih statistika kao što su na primer *srednja kvadratna greška reziduala* (engl. *Mean Square Error*)

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} e_t^2(1) \quad (1.3)$$

i *srednja apsolutna greška reziduala* (engl. *Mean Absolute Error*)

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} |e_t(1)| \quad (1.4)$$

Međutim, pravu meru kvaliteta prognoze nekog modela dobićemo ukoliko koristimo prognoze *izvan uzorka* koji je korišćen za ocenu modela. Tako na primer, našu vremensku seriju industrijske proizvodnje posmatramo u periodu od januara 1987. do maja 1993. godine i na osnovu 77 opservacija ocenjujemo model, da bi zatim formirali prognozu dvanaest meseci unapred. Preostalih 12 opservacija (od juna 1993. do maja 1994. godine) koristimo za vrednovanje kvaliteta prognoze. Znači da smo našu vremensku seriju podelili na dva dela. Na osnovu prvog dela (unutar uzorka) ocenjujemo model vremenske serije, a na osnovu drugog dela (izvan uzorka) vrednujemo prognozu poredeći ostvarene i prognozirane vrednosti. U maju 1993. godine formiramo prognozu za jun 1993. (jedan period unapred), jul 1993. (dva perioda unapred), da bi naposljetku prognozirali proizvodnju u maju 1994. godine (12 perioda unapred). Imamo dakle seriju grešaka prognoze:  $e_n(1), e_n(2), \dots, e_n(12)$ , gde se  $n$  odnosi na maj 1993. godine. *Srednje kvadratnu grešku prognoze* definišemo na sledeći način:

$$\text{MSE} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h e_n^2(j) \quad , \quad (1.5)$$

a *srednja apsolutna greška prognoze* je

$$\text{MAE} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h |e_n(j)| \quad . \quad (1.6)$$

Koristimo istu oznaku za srednju kvadratnu i apsolutnu grešku reziduala i prognoze, a

iz konteksta u kome se ove mere kvaliteta prognoze koriste biće jasno da li su računane na osnovu greške unutar ili izvan uzorka. Tako na primer u trećoj glavi, kada je reč o oceni koeficijenata modela izravnjanja, koristimo u svim primerima MSE i MAE reziduala, jer se radi o greškama unutar uzorka.

U analizi vremenske serije u širokoj upotrebi je tzv. *operator docnje*, u oznaci  $B^8$ , koji definišemo sa

$$BX_t = X_{t-1} \quad (1.7)$$

Jednostavno rečeno operator docnje tekuću opservaciju vremenske serije pomera jedan period unazad (u prošlost). U opštem slučaju imamo

$$B^k X_t = X_{t-k}, \quad (1.8)$$

a definiciju kompletiramo ako uzmemo da je  $B^0 X_t = X_t$ . Očigledno da je za proizvoljnu konstantu  $\mu$ ,  $B^k \mu \equiv \mu$ , tj. konstanta pomerenjena za  $k$  perioda unazad ima istu vrednost. Definicija (1.7) važi za ma koju celobrojnu vrednost  $k$ <sup>9</sup>. Od interesa je ukazati na značenje operatora docnje kada  $k$  uzima vrednosti iz skupa negativnih celih brojeva. Naime, tada je  $B^{-k} X_t = X_{t+k}$ , što znači da smo tekuću opservaciju pomerili  $k$  perioda unapred (u budućnost).

Operator docnje tretiramo kao ma koju algebarsku veličinu. Polinom po operatoru docnje označavamo sa

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q, \quad (1.9)$$

gde su  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  konstantni koeficijenti polinoma. Koreni ovog polinoma su  $q$  vrednosti  $B$  koje zadovoljavaju polinomijalnu jednačinu

$$\theta(B) = 0. \quad (1.10)$$

Na primer, ako u izrazu (1.9) zamenimo  $q=1$  dobijamo

$$\theta(b) = 1 + \theta_1 B, \quad (1.11)$$

pa je koren jednačine  $1 + \theta_1 B = 0, B = -1/\theta_1$ . Za koren kažemo da leži *van* jediničnog kruga ako je po modulu veći od jedinice. U suprotnom slučaju, koren leži *na* ili *unutar*

<sup>8</sup> Operator docnje na engleskom jeziku nosi naziv *lag operator*, pa se često u literaturi umesto oznake  $B$  koristi oznaka  $L$ . Inače, oznaka  $B$  je od prvog slova engleske reči *backward* (unazad).

<sup>9</sup> Detaljnije o operatoru docnje i njegovoj algebri videti u Dhrymes (Drajmz) (1971, 2. Glava).

jediničnog kruga ako je po modulu manji ili jednak jedinici. U našem primeru da bi koren polinoma (1.11) ležao van jediničnog kruga mora biti  $|\theta_1| < 1$ .

*Operator prve difference* definišemo na osnovu operatora docnje

$$\Delta = 1 - B. \quad (1.12)$$

Tako imamo  $\Delta X_t = (1 - B)X_t = X_t - X_{t-1}$ . Dvostrukom primenom operatora prve difference dobićemo polinom drugog reda po operatoru docnje, tj.

$$\Delta^2 = (1 - B)^2 = 1 - 2B + B^2. \quad (1.13)$$

U opštem slučaju  $\Delta^d = (1 - B)^d$  je polinom  $d$ -tog reda po operatoru docnje, a njegovi koreni su svi jednaki jedinici.

*Operator  $k$ -te difference* definišemo sa

$$\Delta_k = 1 - B^k, \quad k = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, \quad (1.14)$$

pa je  $\Delta_k = X_t - X_{t-k}$ . Od posebnog je interesa u analizi sezonskih vremenskih serija *operator sezonske difference* kod koga je vrednost  $k$  jednaka broju sezona  $s$ :

$$\Delta_s = 1 - B^s. \quad (1.15)$$

Na primer, za kvartalne vremenske serije ( $s = 4$ ) imamo:  $\Delta_4 = 1 - B^4$ , odnosno,  $\Delta_4 X_t = (1 - B^4)X_t = X_t - X_{t-4}$ , a za mesečne vremenske serije ( $s = 12$ ) imamo:  $\Delta_{12} = 1 - B^{12}$ , odnosno  $\Delta_{12} X_t = (1 - B^{12})X_t = X_t - X_{t-12}$ .

## 1.4 OSVRT NA ISTORIJSKI RAZVOJ ANALIZE VREMENSKIH SERIJA

Kratak osvrt na istorijski razvoj analize vremenskih serija<sup>10</sup> uopšte, a posebno u ekonomiji, čini se prevashodno iz razloga upoznavanja sa evolucijom interesovanja analitičara vremenskih serija. Time će se omogućiti razumevanje konvergencije dva pristupa koja je nastala u poslednjoj deceniji u analizi vremenskih serija: ekonometrijskog i statističkog. Istovremeno će se staviti u istorijsku perspektivu savremeni pristup analizi vremenskih serija i nagovestiti njen budući razvoj.

Prvobitno je analiza vremenskih serija bila orijentisana na analizu individualne vremenske serije i to serija koje su se javljale u astronomiji, geofizici i meteorologiji.

<sup>10</sup> Osnovni izvor za ovaj osvrt predstavljaju sledeće knjige: Epstein (Epstajn) (1987), Granger i Hatanaka (Hatanaka) (1964, ss. 4-9), Mills (Milz) (1990, ss. 1-4), Nerlove (Nerlav) i dr. (1979, ss. 1-21) i Spanos (Spano) (1986, ss. 3-15).

Uočavano je relativno glatko kretanje vremenskih serija sa cikličnim pravilnostima kao što su jedanaestogodišnji ciklusi u slučaju pojava sunčanih pega ili godišnji ciklusi u meteorološkim podacima. Stoga je sa metodološke strane glavni pravac istraživanja bio usmeren ka otkrivanju "skrivenih perioda" u vremenskim serijama. U to vreme naslućuje se da vremensku seriju treba posmatrati kao da je komponovana od sinusoida različitih, ali nepoznatih amplituda i perioda. Otuda se sa puno prava može konstatovati da koreni strukturnih modela vremenskih serija sežu u daleku prošlost. Tako Nerlove i dr. (1979) ukazuju na to da su astronomi sedamnaestog veka u računanju orbita planeta posmatrali opservacije vremenske serije kao da su sastavljene od neopažljivih komponenata. Krajem prošlog i početkom ovog veka glavni doprinos u pogledu analize skrivenih perioda daje Sir Arthur Schuster (Artur Šuster) (1898) definisanjem tzv. periodograma koji je po njemu dobio ime. Mada je prvobitna namena periodograma za otkrivanje perioda u savremenoj analizi vremenskih serija uglavnom napuštena, periodogram se koristi kao polazno sredstvo za ocenu spektralne funkcije gustine (osnovne funkcije u analizi vremenskih serija u frekventnom domenu). Dvadesetih godina ovoga veka jedan od prvih autora koji je eksplicitno definisao vremensku seriju kao da je komponovana od četiri tipa fluktuacija (trend, ciklus, sezona i rezidual) bio je Persons (Pirson).

U to vreme, u praktičnim primenama periodograma, nije bila retkost da se otkriju periode i kod serija koje su generisane od strane istraživača, a za koje se znalo da ne sadrže cikluse. To je navelo neke autore, među njima i Yulea (Jul), da još 1927. godine definišu modele vremenskih serija koji bi preciznije modelirali vremenske serije sa cikličnim fluktuacijama, a istovremeno poslužili za pouzdanije otkrivanje osobine tih cikličnih fluktuacija. Tako se Yuleu pripisuje definisanje modela vremenskih serija koji iskazuju zavisnost tekuće vrednosti od svojih sopstvenih prošlih vrednosti i slučajne greške. Radilo se o tzv. *modelima autoregresionih procesa*. U isto vreme Slutsky (Slucki) (1927) je prvi definisao alternativni model vremenske serije koji iskazuje tekuću vrednost serije kao ponderisanu sumu slučajnih grešaka, odnosno radilo se o tzv. *modelima pokretnih proseka*. Ovi modeli su proistekli iz njegove diskusije opasnosti koja se javlja pri izravnavanju vremenskih serija korišćenjem ponderisanih proseka. Naime, u to vreme, u potrazi za cikličnim kretanjem u vremenskoj seriji, koristili su se postupci izravnavanja kojima se želelo doći do osnovne tendencije u seriji. Slutsky je pokazao da postupak izravnavanja generiše ciklus u seriji u kojoj on nije postojao, a fenomen je prema njemu nazvan *efekat Sluckog*. Dalji razvoj i primenu autoregresionih i modela pokretnih proseka unapredio je Herman Wold (Herman Vould) (1938) koji je postavio teorijsku osnovu metodologije vremenskih serija baziranu s jedne strane na ove dve klase modela, a sa druge ih je povezao sa teorijom verovatnoće Kolmogorova.

U ekonometriji je neposredno pred Drugi svetski rat istraživanje bilo usmereno ka uključivanju do tada razvijenih metoda deskriptivne statističke analize kao i teorije verovatnoće u linearni regresioni model. Nekako u to vreme, 1943. godine Haavelmo (Havelmo) formuliše model simultanih jednačina, koji predstavlja referentni okvir za razvoj novih metoda ocenjivanja i testiranja zasnovanih na pojmu najveće verodostojnosti, istraživača okupljenih u tzv. Cowles Foundation Group (Kaule Faundejšn Grup). Njihov napor je krunisan radovima publikovanim početkom pedesetih

godina u dve monografije (Koopmans (Kupmens) (1950) i Hood (Hud) i Koopmans (1953)). Time je postavljen temelj klasičnoj ekonometriji, odnosno trasiran je put budućih istraživača u narednih četvrt veka. Ekonometrija se tako bazirala na linearnom regresionom modelu i analizi pogrešne specifikacije, odnosno modelu simultanih jednačina i njegovoj identifikaciji i ocenjivanju.

Pored spomenutih istraživanja u analizi vremenskih serija i ekonometriji istraživači u okviru operacionih istraživanja početkom šezdesetih, bave se formiranjem jednostavnih metoda prognoziranja zasnovanih na pojmu lokalnog trenda i nivoa serije. Autori kao što su Holt (Holt) i dr. (1960), Winters (Vinters) (1960) i Brown (Braun) (1963) razvijaju metod poznat pod imenom eksponencijalnog izravnjanja. Ovi *ad hoc* modeli predstavljaju preteču savremenih strukturnih modela vremenskih serija.

U statističkoj literaturi se knjiga Box i Jenkinsa (1976), prvi put objavljena 1970. godine, uzima kao početni korak konvergencije pristupa sa stanovišta analize vremenskih serija i ekonometrijskog u analizi vremenskih serija. U njoj je razvijen metodološki postupak gradnje tzv. *ARIMA modela*. Prognoze na osnovu ovih modela pokazale su se superiorne na kratak rok u poređenju sa prognozama velikih makroekonometrijskih modela<sup>11</sup>. Ovi poslednji su predstavljali operacionalizaciju teorijskih pojmova razvijenih u okviru Cowles Commission. Uzvratni argument protiv modela vremenskih serija bio je da oni ne omogućavaju vrednovanje mera ekonomske politike. Slični prigovori makroekonometrijskim modelima upućeni su kroz poznatu Lucasovo kritiku. Lucas (Lukas) (1976) argumentuje da su strukturni koeficijenti ovih modela zavisni od ekonomske politike koju treba da vrednuju.

Potreba za sintezom dva pristupa analizi vremenskih serija u punoj meri se predočava radom Grangera i Newbolda (1974) u kome se izlaže i analizira *problem lažne regresije*<sup>12</sup> (engl. *spurious regression*). U radu Grangera i Newbolda pokazano je da se regresirajući dva međusobno nezavisna procesa slučajnog hoda<sup>13</sup> dobija visoka verovatnoća odbacivanja tačne hipoteze o odsustvu veze između dve serije. Dobijena je čak i u slučaju nezavisnosti serija visoka vrednost koeficijenta determinacija uz istovremeno nisku vrednost Durbin-Watsonove (Darbin-Votson) statistike. Njihovo istraživanje je sugerisalo da se ne sme zanemariti specifična korelaciona struktura korišćenih vremenskih serija, za koju inače možemo reći da reprezentuje korelacionu strukturu većine ekonomskih vremenskih serija. Time se potencira sva relevantnost istraživanja ova dva autora u ekonometrijskom modeliranju. Nakon njihovog rada sledila

<sup>11</sup> Videti na primer istraživanja Coopera (Kuper) (1972) i Naylora (Nejlor) i dr. (1972) u kojima se pokazuje nemoć velikih makroekonometrijskih modela da uspešno pariraju preciznošću svojih prognoza, prognozama jednostavnih modela vremenskih serija.

<sup>12</sup> Istini za volju ovaj problem uočio je još davne 1926. godine Yule razmatrajući teškoće koje se javljaju pri korišćenju vremenskih serija u kontekstu linearnog regresionog modela. Pored ranije navedenog razloga vezanog za ispitivanje cikličnih kretanja ovo je bio drugi razlog koji je naveo Yulea da definiše autoregresione modele vremenskih serija.

<sup>13</sup> Proces slučajnog hoda formalno definišemo u 5. Glavi, a na ovom mestu za taj proces kažemo da tekuću opservaciju vremenske serije predstavlja kao zbir vrednosti serije iz prethodnog perioda i slučajne greške.

je serija radova koji su se bavili nestacionarnošću vremenskih serija. Radovi posvećeni problemima ocenjivanja i testiranja tipa nestacionarnosti, te tzv. *testovi integrisanosti* poslednjih su godina dominirali u analizi vremenskih serija.

Uporedo sa tim pravcem u analizi ekonomskih vremenskih serija uočava se napor istraživača da reše probleme modeliranja višedimenzionih vremenskih serija. Tu svakako treba spomenuti postupke za ocenu i testiranje prisustva i tipa zajedničkog trenda, a takode i postojanje *kointegracije*<sup>14</sup> između posmatranih vremenskih serija. Operacionalizacijom pojmova kao što su egzogenost/endogenost, uzročnost i drugi fundamentalni pojmovi u ekonometriji i ekonomiji uopšte, počinju da se bave istraživači u okviru analize vremenskih serija. U tom smislu posebnu popularnost u ekonomiji imaju tzv. *VAR modeli*<sup>15</sup>, pa je pristup zasnovan na njima postao jedan od dominantnih pristupa ekonometrijskoj analizi vremenskih serija, posebno kod američkih istraživača. Kao što smo to na prvoj strani već nagovestili, ispostavilo se da je statističko-metodološki okvir Novoklasične ekonomske škole definisan upravo analizom vektorskih vremenskih serija, odnosno VAR modelima. Drugi pristup ekonometrijskoj analizi vremenskih serija u većoj meri se oslanja na tradiciju britanske ekonometrijske škole. Ona u svome savremenom izdanju<sup>16</sup> pri specifikaciji ekonometrijskog modela, odnosno njegovog ravnotežnog dela, polazi od ekonomske teorije. Koristeći zatim dostignuća analize vremenskih serija u njega uključuje, podacima utvrđenu specifičnu korelacionu strukturu vremenskih serija. Dakle, ostavlja se analizi vremenskih serija da sugeriše kratkoročnu dinamiku vremenskih serija u okviru celovitog modela. Ti modeli se nazivaju *modeli korekcije greškom* (engl. *error correction models*).

Decenija koja je za nama u ekonometrijskoj literaturi je ukazala da najdinamičniji rast imaju upravo reference na temu ekonometrijske analize vremenskih serija. U njima se čine pokušaji da kroz međusobno prožimanje ekonometrije i analize vremenskih serija dođe do rezultata koji će predstavljati valjan okvir praktičnog modeliranja ekonomskih fenomena. U tim modelima trebalo bi da kako ekonomska teorija, tako i struktura podataka igraju jednu od glavnih uloga. Smatramo da će i budući razvoja analize vremenskih serija potvrditi valjanost dosadašnjeg izbora analitičara da nađu svojevrсну sintezu dva pristupa. Sa svoje strane razvoj računarske tehnike i pratećih programa predstavlja osnovnu pretpostavku za korišćenje u većoj meri višedimenzionih vremenskih serija.

---

<sup>14</sup> Kointegracija je pojam novijeg datuma u analizi vremenskih serija koji ukazuje na mogućnost i uslove postojanja stacionarne veze između nestacionarnih vremenskih serija. Detaljnije se ovaj pojam izlaže u 10. Glavi.

<sup>15</sup> Iskazuju zavisnost svake promenljive u skupu posmatranih promenljivih od svojih sopstvenih prošlih vrednosti, a takode od prošlih vrednosti ostalih promenljivih. Može se reći da oni predstavljaju svojevrсну generalizaciju dinamičkih ekonometrijskih modela simultanih jednačina.

<sup>16</sup> Videti na primer: Charemza (Haremza) i Deadman (Dedmen) (1992), Granger (1992, 13-15. Glava) i Spanos (1986).

## **2 DESKRIPTIVNI METODI ANALIZE VREMENSKIH SERIJA**

U skladu sa prvim ciljem analize vremenskih serija - opisom izučavane pojave, u ovoj glavi bavimo se metodama koje nam kroz grafički prikaz, sumarne statistike, preko transformacije serije i njenog izravnjanja, pružaju prvu informaciju o karakteristikama vremenske serije. Dobijena informacija ima vrednost po sebi, ali nam takode koristi u daljoj analizi pri izboru odgovarajućeg metoda analize, odnosno modela vremenske serije.

### **2.1 UVOD**

Vremenska serija predstavlja u vremenu uređeni niz podataka. U ovoj knjizi bavimo se vremenskim serijama kod kojih opservacije registrujemo u jednakim vremenskim razmacima. Stoga je grafički prikaz sa vremenom na apscisi "prirodan" način njihovog prezentiranja. Sa grafikona vremenskih serija, kao što su oni na Slici 1.1, odmah uočavamo osnovne karakteristike izučavanog fenomena, što inače nije slučaj sa njihovim tabelarnim prikazom. Pored tog vida grafičkog prikaza, za sagledavanje međusobne povezanosti dve vremenske serije koristimo tzv. dijagram rasturanja.

Nakon grafičkog prikaza vremenske serije na raspolaganju nam stoji spektar statističkih metoda koji omogućavaju dalje izučavanje karakteristika vremenske serije, posebno onih koje se tiču njenog rasporeda. Prikazima koji sumiraju informaciju u vremenskoj seriji bavimo se u Poglavlju 2.3.

Pošto smo korišćenjem grafičkog prikaza vremenske serije i formiranjem sumarnih pokazatelja došli do saznanja o njenim osobinama pristupamo transformaciji serije. Višestruki su razlozi za transformaciju vremenskih serija. U istraživačkoj fazi analize nju koristimo da bi učinili očiglednijim neke karakteristike serije koje nisu vidljive u originalnoj seriji. Pored toga, do zahteva za transformacijom vremenske serije dolazi i zbog potreba da se izade u susret pretpostavkama modela koje ćemo za nju graditi.



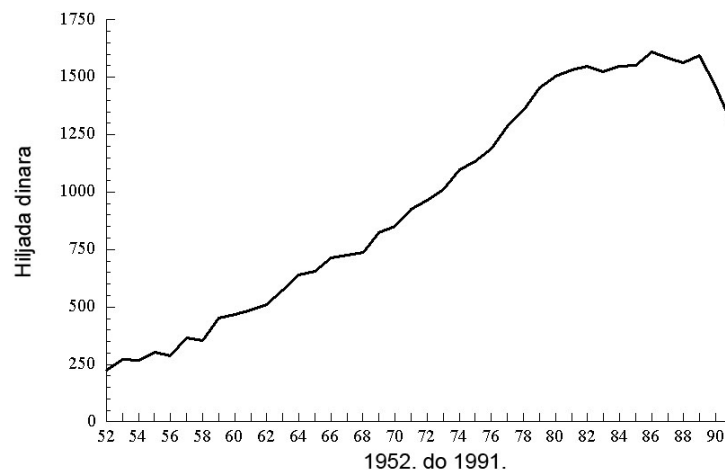
Naposletku, često nas u ovoj fazi analize interesuje osnovni tok serije koji predstavlja obrazac njenog ponašanja tokom vremena. Zbog velikog varijabiliteta vremenske serije, odnosno zbog izraženih lokalnih fluktuacija oko tog osnovnog toka on nije na osnovu grafičkog prikaza odmah uočljiv. Zato pristupamo izravnavanju vremenske serije, tj. primenjujemo specifičan statistički postupak prigušivanja spomenutih lokalnih fluktuacija čime postizemo da dođe do izražaja osnovna tendencija u seriji.

## 2.2 GRAFIČKI PRIKAZI VREMENSKIH SERIJA

Korišćenje grafičkih prikaza u statistici uopšte ima dvojak uлогу. Prvobitno su grafikoni trebalo samo da zamene tabelarno prezentirane podatke, jer se na osnovu tabela nije mogla dati očigledna karakterizacija izučavane pojave. Potom su modifikacijom i razvojem postojećih grafikona, odnosno kreiranjem novih, grafički prikazi u statistici uopšte, postali snažno sredstvo za kompleksno izučavanje statističkih pojava. Krajem šezdesetih, tome je svojim radom poseban doprinos dao Tukey (Tjuki) (1972) i (1977). Pregled poslednjih istraživanja o grafičkoj prezentaciji statističkih podataka dat je kod Clevelanda (Klivlend) (1987).

Grafički prikaz vremenske serije u toj meri se odomaćio u svakodnevnom životu da nije potrebno posebno ukazivati na način njegove konstrukcije. Ipak skrećemo pažnju da svaki od grafikona mora sadržati informaciju o kojoj se pojavi radi, naznaku merne jedinice na ordinati, vremenskog perioda na apscisi, a u cilju lakšeg očitavanja vrednosti sa grafikona mogu se dodati i odgovarajuće horizontalne linije. Korišćenje uobičajenog grafičkog prikaza vremenske serije sa vremenom na apscisi ilustrovaćemo na konkretnim ekonomskim vremenskim serijama.

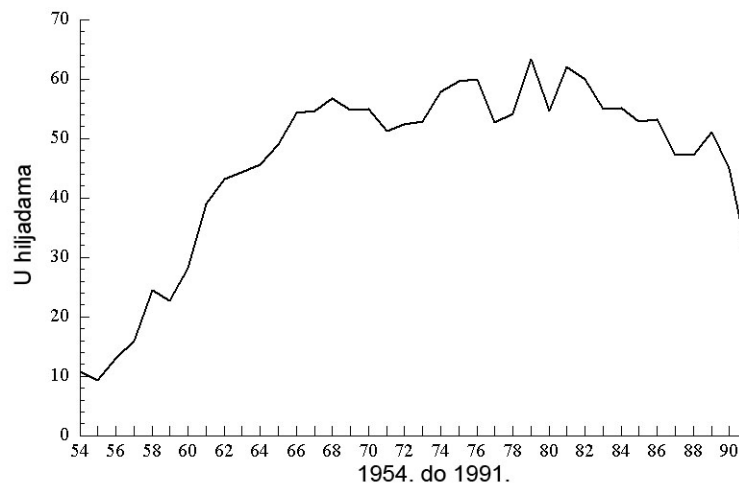
Na Slici 2.1 prikazana je vremenska serija nivoa društvenog proizvoda SR Jugoslavije u realnom izrazu (po stalnim cenama iz 1972. godine). Sa grafikona uočavamo da društveni proizvod SR Jugoslavije sve do početka osamdesetih godina pokazuje uzlazni trend, u narednoj deceniji beleži se uglavnom stagnacija nivoa realnog društvenog proizvoda, da bi zatim od početka devedesetih došlo do njegovog drastičnog pada.



Slika 2.1 Realni društveni proizvod SR Jugoslavije

Istovremeno na grafikonu društvenog proizvoda uočavamo brojna ciklična kretanja. Iz ekonomske istorije poznato je da je sredinom šezdesetih godina pokušana (pokazalo se neuspješno) privredna reforma. Ona je dovela do stagnacije privrede u naredne 2-3 godine što se odrazilo na nivo realnog društvenog proizvoda. U manjoj meri je poznato da je prvi signal neefikasnosti privrednog sistema bio upućen već 1962/63. godine što će na grafikonu tek izoštreno oko uočiti kao izvesnu stagnaciju nivoa serije. Praktično već od 1979. godine u punoj meri se ispoljava ekonomska kriza koja je kulminirala početkom devete decenije raspadom SFR Jugoslavije. Na Slici 2.1 u navedenom periodu dolazi do oštrog zaokreta trenda, tako da ovaj u devedesetim godinama ima izrazito negativan nagib.

Na Slici 2.2 prikazana je vremenska serija broja završenih stanova u SR Jugoslaviji. Za razliku od realnog društvenog proizvoda ova serija ne pokazuje izraziti trend nego uočavamo fluktuacije oko promenljivog nivoa. Pored te razlike konstatujemo da je kod ove serije znatno veći intenzitet i stepen fluktuacija, no što je to slučaj sa nivoom društvenog proizvoda.

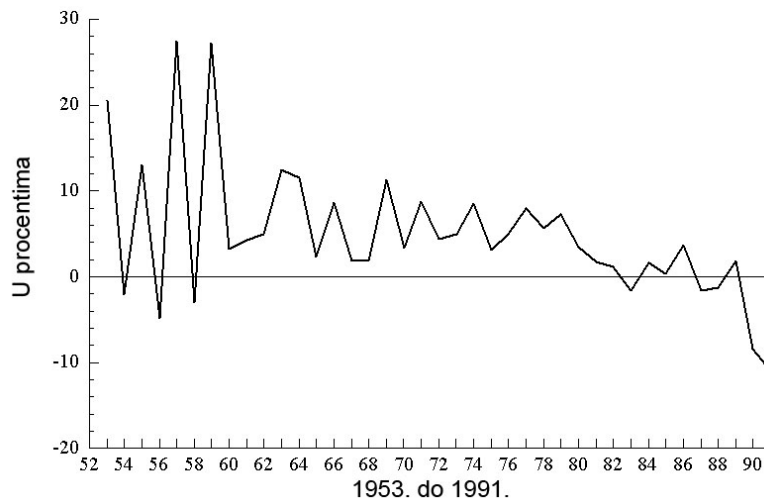


**Slika 2.2** Broj završenih stanova u SR Jugoslaviji

Posmatrajući Sliku 2.1, tek uz napomene o ekonomskoj istoriji Jugoslavije bili smo u stanju da uočimo periode stagnacije u porastu društvenog proizvoda. Međutim, pogodnom transformacijom dobijamo vremensku seriju koja ima znatno različite karakteristike od polazne, ali koja nam omogućava da bolje sagledamo spomenute periode stagnacije. Transformacija koju smo primenili na seriju realnog društvenog proizvoda odnosi se na računanje godišnje stope rasta posmatrane veličine. Ova vremenska serija prikazana je na Slici 2.3. Za razliku od vremenske serije nivoa realnog društvenog proizvoda koja ima relativno glatko kretanje sa uzlaznim trendom, serija stope rasta iskazuje velike oscilacije od 27.5% (1957. godine) do -11% (1991. godine) oko nivoa koji se takođe menja tokom vremena.

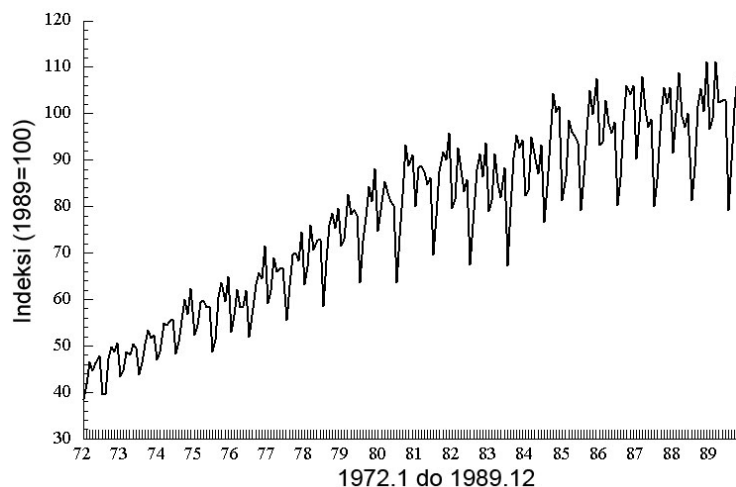
Sada se jasno uočavaju tri karakteristična perioda u rastu društvenog proizvoda. Prvi period, od 1952. do 1960. godine, karakteriše velike fluktuacije u stopama rasta (smeњуju se godine u kojima smo imali izrazito visoke stope rasta sa godinama u

kojima su beležene negativne stope rasta). Drugi period, od 1961. do 1979. godine karakterišu relativno skromnije stope rasta u odnosu na prethodni period. Naposljetku, od 1980. godine pa do danas privreda SR Jugoslavije beleži usporavanje rasta realnog društvenog proizvoda uz retke godine sa pozitivnim stopama rasta. Na ovom grafikonu bolje sagledavamo, ranije spomenute, godine stagnacije.



**Slika 2.3** Stope rasta realnog društvenog proizvoda SR Jugoslavije

Do sada smo grafički prikazali godišnje vremenske serije. Ukoliko opservacije registrujemo u kraćim vremenskim intervalima (mesečno ili kvartalno) tada vremenska serija pored trenda i cikličnog karaktera može imati novu karakteristiku. Naime, u tom slučaju postoji mogućnost da je u seriji prisutna i sezona. Na Slici 2.4 prikazana je mesečna vremenska serija industrijske proizvodnje u Srbiji. Na grafiku ove serije ističe se uzlazni trend, ali serijom dominira sezonska komponenta.

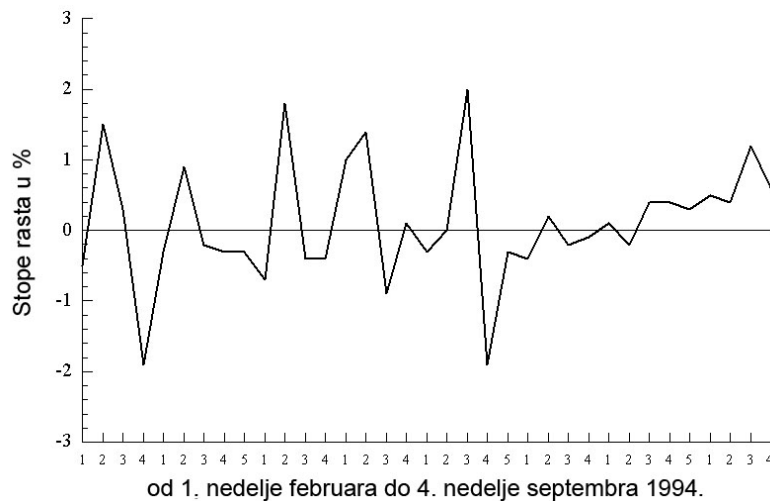


**Slika 2.4** Industrijska proizvodnja u Srbiji

Uočava se da tokom jula meseca, zbog godišnjih odmora, dolazi do pada proizvodnje u odnosu na prethodni mesec. Sličnu pojavu imamo i na početku godine, u januaru, kada zbog novogodišnjih i božićnih praznika imamo manji broj radnih dana u odnosu

na prethodni mesec, pa se beleži i niži nivo proizvodnje. Pored sezonske karakteristike, ova serija ima još jedno interesantno svojstvo. Naime, serija industrijske proizvodnje ima sezonu čija se amplituda povećava protokom vremena, odnosno sa porastom trenda. Za takve vremenske serije kod kojih sezona povećava amplitudu protokom vremena kažemo da su *serije sa multiplikativnom sezonom*. Za razliku od njih, vremenske serije sa sezonom koja ima konstantnu amplitudu tokom vremena kažemo da su *serije sa aditivnom sezonom*. Na osnovu rečenog za mesečne i kvartalne vremenske serije ne treba zaključiti da sve one imaju izraženu sezonu. Primer vremenske serije kod koje nije izražena sezona je mesečna serija cena na malo.

Pored mesečnih i kvartalnih vremenskih serija imamo i serije kod kojih opservacije registrujemo u kraćim vremenskim intervalima (danima ili nedeljama). Tako je na primer na Slici 2.5 prikazana nedeljna vremenska serija stopa rasta cena na malo u SR Jugoslaviji.



**Slika 2.5** Nedeljne stope rasta cena na malo u SR Jugoslaviji

S obzirom na dinamiku hiperinflacije tokom 1993. godine<sup>1</sup> Savezni zavod za statistiku je od jula meseca počeo da prati nedeljno kretanje cena na malo. 24. januara 1994. godine startovao je *Program za rekonstrukciju monetarnog sistema SR Jugoslavije*. Kao rezultat imamo da praktično od prve nedelje februara meseca cene na malo, kao jedan od pokazatelja inflacije, beleže nulti rast. Sa grafika vidimo da su sve do kraja avgusta meseca nedeljne stope rasta oscilirale oko tog konstantnog nivoa. Međutim, od kraja avgusta počinje da se aktivira crno devizno tržište uz istovremeno masovnije povećanje cena većeg broja proizvoda i usluga. Takve pojave su našle svoga odraza na izgledu vremenske serije stopa rasta cena na malo. Kažemo da je vremenska serija "odlutila" od konstantnog nivoa oko koga je do tada oscilirala.

<sup>1</sup> Krajem godine postalo je bespredmetno pratiti čak i nedeljne stope inflacije jer su iznosile nekoliko hiljada procenata. U decembru 1993. i januaru 1994. godine stopa inflacije tokom jednog sata se kretala u intervalu od 1% do 2%. U isto vreme dnevni rast cena bio je po stopi od 20% do 70%.

Ukoliko raspolažemo parom vremenskih serija tada je korišćenje *dijagrama rasturanja* grafički jednostavno sredstvo za prikazivanje međusobne zavisnosti dve promenljive. Mada je na prvi pogled teško pretpostaviti mogućnost unapređenja ove vrste grafičkog prikaza ipak ukazujemo na dve njegove modifikacije:

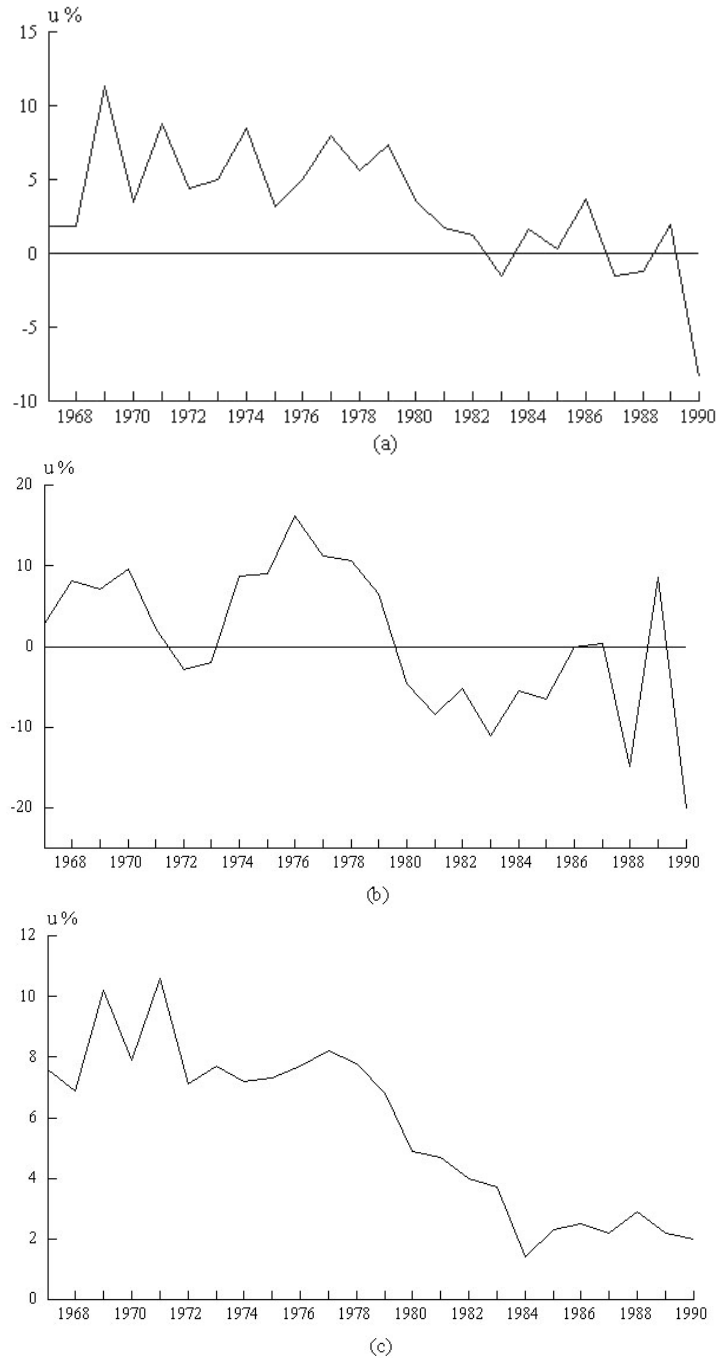
- (1) grafikon tačka-crta (engl. *dot-dash-plot*) i
- (2) matrica dijagrama rasturanja (engl. *scatterplot matrix*).

Kod prve varijante dijagram rasturanja postaje, na osnovu dva nova elementa, informativniji u odnosu na svoj prvobitni izgled. Na grafikonu tačka-crta ose dijagrama rasturanja protežu se samo do ekstremnih vrednosti prve, odnosno druge promenljive. Time je pored ostalog prikazan i interval varijacija svake promenljive. Drugo odlika modifikovanog dijagrama rasturanja tiče se "crtica" na osama koje predstavljaju projekcije tačaka iz dijagrama rasturanja na svaku osu. Ovom izmenom grafika "crtice" nam pružaju informaciju o marginalnom rasporedu dve promenljive. Korišćenjem navedene modifikacije dijagrama rasturanja pored samog dijagrama rasturanja imamo istovremeno prikazane i marginalne rasporede obe promenljive, a takođe i informaciju o njihovoj minimalnoj i maksimalnoj vrednosti.

**Tabela 2.1** Stope rasta tri serije

Godina	Stope rasta (u %)		
	Društveni proizvod	Investicije	Osnovna sredstva
1967	1.80	2.90	7.60
1968	1.80	8.20	6.90
1969	11.30	7.20	10.20
1970	3.40	9.60	7.90
1971	8.80	2.30	10.60
1972	4.40	-2.80	7.10
1973	5.00	-1.90	7.70
1974	8.50	8.70	7.20
1975	3.10	9.10	7.30
1976	5.0	16.20	7.70
1977	8.0	11.30	8.20
1978	5.60	10.70	7.80
1979	7.30	6.50	6.80
1980	3.50	-4.60	4.90
1981	1.70	-8.40	4.70
1982	1.20	-5.20	4.00
1983	-1.60	-11.10	3.70
1984	1.60	-5.40	1.40
1985	0.30	-6.50	2.30
1986	3.70	0.0	2.50
1987	-1.60	0.40	2.20
1988	-1.30	-14.80	2.90
1989	1.90	8.60	2.20
1990	-8.40	-20.10	2.00

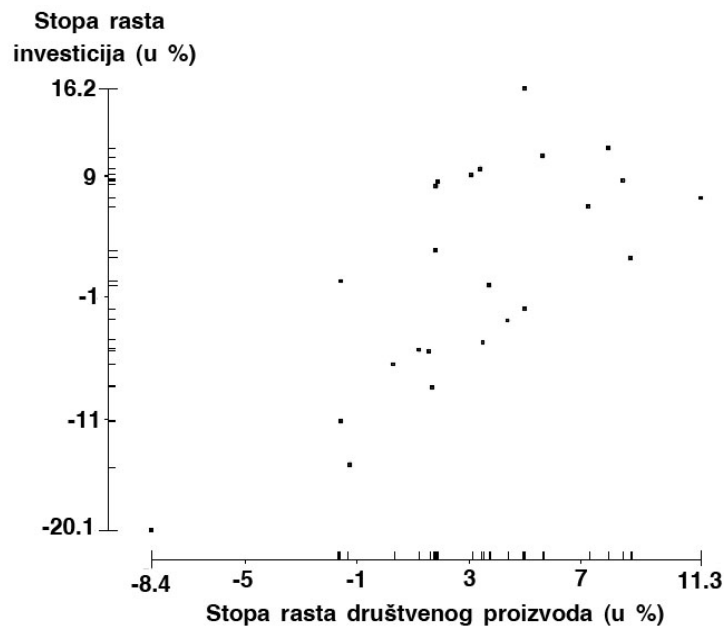
**Primer 2.1** Na osnovu vremenskih serija SR Jugoslavije: realni društveni proizvod (serija S5), realne investicija u osnovne fondove (serija S6) i realna vrednost osnovnih sredstava privrede društvenog sektora (serija S7), izračunati godišnje stope rasta navedenih veličina za period 1967-1990. godine. Dobijene vremenske serije iskoristiti za formiranje grafičkog prikaza oblika tačka-crta.



**Slika 2.6** Stope rasta: (a) društvenog proizvoda, (b) investicija i (c) osnovnih sredstava

U Tabeli 2.1 date su vremenske serije stopa rasta društvenog proizvoda, investicija i osnovnih sredstava. Ove tri vremenske serije prikazali smo na Slici 2.6. Sa slike se vidi da u navedenom periodu sve tri posmatrane veličine pokazuju velike oscilacije oko opadajućeg trenda. To nam, s obzirom da su u pitanju stope rasta, ukazuje na sporiji rast, a počevši od 1980. godine i opadanje realne vrednosti društvenog proizvoda i investicija.

Posmatrajmo par promenljivih: društveni proizvod i investicije. Za njega ćemo formirati grafikon tačka-crta. Čitaocu se ostavlja da nacrtava grafikone za ostala dva para promenljivih. Na Slici 2.7 dat je zahtevani grafički prikaz tačka-crta.

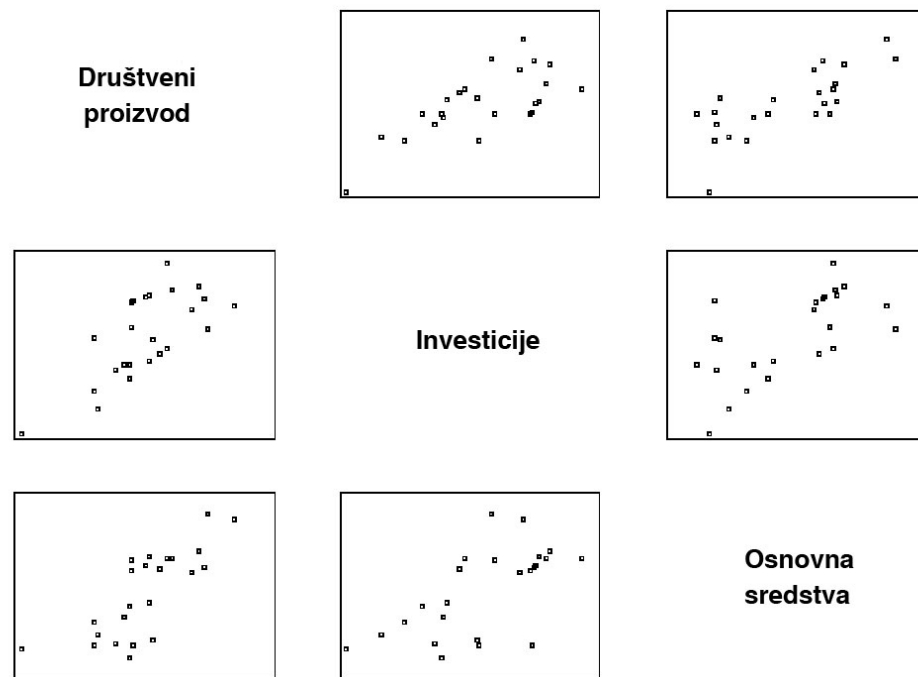


**Slika 2.7** Modifikovani dijagram rasturanja (tačka-crta)

Na grafikonu se vidi da između stopa rasta realnog društvenog proizvoda i investicija u osnovna sredstva postoji pozitivna zavisnost u periodu od 1967. do 1990. godine. Kao svojevrsna nestandardna opservacija javlja se tačka koja pripada 1990. godini, a koja je locirana u donjem levom uglu na grafikonu. Treba naglasiti da je opservacija potpuno u skladu sa korelacionom strukturom ovog para vremenskih serija. Posmatrajući njihove marginalne rasporede za stopu rasta investicija u 1990. godini konstatujemo da predstavlja minimalnu vrednost, ali nikako nestandardnu opservaciju. S druge strane, stopa rasta društvenog proizvoda u 1990. godini se jasno izdvaja kao nestandardna opservacija. Korišćenjem sumarnih statistika i grafičkih prikaza koji vode računa o rasporedu opservacija iz narednog poglavlja potvrdićemo gornje navode. ■

Druga inovacija urađena kod dijagrama rasturanja relevantna je za slučaj tri i više vremenskih serija čiju međusobnu povezanost želimo ispitati. U tom slučaju možemo formirati *matricu dijagrama rasturanja* čiji su elementi pojedinačni dijagrami rasturanja. Oni su tako raspoređeni da elementi u kolonama imaju na x-osi istu promenljivu, pa time i istu podelu čime se eliminiše potreba dodavanja legende uz svaki dijagram. S druge strane, elementi u redu imaju istu promenljivu na y-osi. Ukratko rečeno, odgovarajući dijagrami rasturanja nalaze se na poljima gde se seku nazivi promenljivih. Na osnovu matrice dijagrama rasturanja istraživaču je omogućeno da uoči međusobnu vezu parova promenljivih, a takođe da posmatra poziciju pojedinačne opservacije u različitim dijagramima rasturanja jednostavno se krećući po redovima i kolonama ove matrice.

**Primer 2.2** Korišćenjem tri vremenske serije iz Primera 2.1 formirati njihov grafički prikaz u vidu matrice dijagrama rasturanja.



**Slika 2.8** Matrica dijagrama rasturanja

Na osnovu matrice dijagrama rasturanja tri serije konstatujemo da između stopa rasta društvenog proizvoda i investicija, kao i društvenog proizvoda i osnovnih sredstava postoji pozitivna međuzavisnost, a slabo izražena veza između stopa rasta investicija i osnovnih sredstava. Sada se jasnije sagledava ekstremnost, odnosno nestandardnost opservacije iz 1990. godine posebno kada je reč o stopi rasta društvenog proizvoda. Ova opservacija je locirana kod svih pojedinačnih dijagrama rasturanja u donji levi ugao. ■

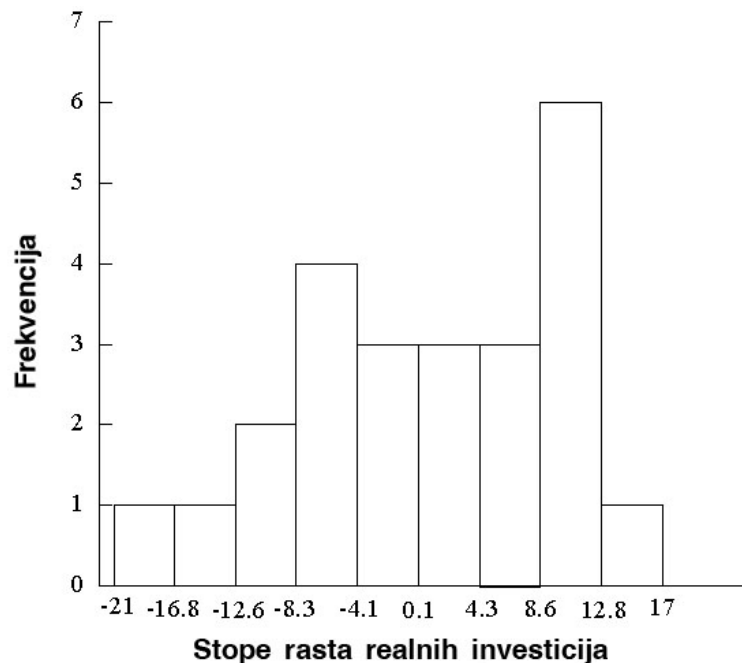


Pored navedenih grafikona u literaturi je predloženo niz drugih za prikaz multivarijacionih podataka. Sumarni pregled različitih grafičkih prikaza može se naći kod Kovačića (1994, 1. Glava).

### 2.3 SUMARNI POKAZATELJI VREMENSKIH SERIJA

Za sumiranje informacije sadržane u vremenskoj seriji služimo se različitim grafičkim prikazima koji ukazuju na karakteristike rasporeda opservacija. Jedan od osnovnih grafikona u tom smislu svakako je histogram kojim prikazujemo distribuciju frekvencija. Na osnovu njega uočavamo koncentraciju opservacija u pojedinim grupnim intervalima kao i oblik rasporeda frekvencija.

**Primer 2.3** Na osnovu podataka iz Primera 2.1 formirati histogram frekvencija za stope rasta realnih investicija u osnovna sredstva.



**Slika 2.9** Histogram frekvencija stope rasta realnih investicija

Interval vrednosti stopa rasta realnih investicija u osnovna sredstva od -21% do 17% podelili smo na devet jednakih grupnih intervala. Brojevi na apscisi histograma frekvencija na Slici 2.9 označavaju vrednosti granice tih grupnih intervala.

Pored standardnog histograma, koristi se i specifičan grafički način prezentacije podataka koji istovremeno zadržava informaciju o pojedinačnoj vrednosti opservacije uz prikazivanje distribucije frekvencija kao što se to inače radi na histogramu. Takav grafik naziva se *prikaz u obliku stabljike i lista* (engl. *stem-and-leaf display*).

1	-2	4	1
3	-1	21	2
6	-0	876	3
11	0	45779	5
(7)	1	2466889	7
14	2	001157	6
8	3	689	3
5	4	224	3
2	5	1	1
1	6		0
1	7	6	1

**Slika 2.10** Prikaz u obliku stabljike i lista

Osnovni izgled tog grafikona dat je na Slici 2.10 za hipotetične podatke jedne promenljive<sup>2</sup>. Stabljika je na ovom prikazu u ulozi grupnog intervala kod distribucije frekvencija, odnosno histograma frekvencija. Listovi formiraju oblik distribucije frekvencija kao kod klasičnog histograma (rotiranog za 90<sup>0</sup>) zadržavajući informaciju o individualnom podatku. Primera radi navodimo da na Slici 2.10 prvi red prikazuje opservaciju čija je vrednost -2.6. Dakle, levo od crte (stabljike) predstavljene su cifre levo od decimalnog zareza našeg originalnog podatka, a prva decimala je prikazana kao cifra desno od crte (list). Sasvim desna kolona brojeva predstavlja frekvenciju, a sasvim leva kolona treba da predoči "dubinu" rasporeda. Naime, brojevi iz te kolone ukazuje koliko listova leži ili na toj stabljici ili na stabljici bližoj najbližem kraju rasporeda. Medijana je "najdublja" vrednost među podacima. Na Slici 2.10, broj (7) označava poziciju do koja se vrši kumuliranje frekvencija od jednog i drugog kraja rasporeda, tj poziciju medijane. Broj 14 neposredno ispod njega sugerise da ima upravo toliko opservacija čija vrednost leži na toj stabljici ili na stabljici bliže desnom kraju rasporeda.

**Primer 2.4** Korišćenjem vremenskih serija stopa rasta tri ekonomske promenljive iz Primera 2.1, dati njihov sumarni prikaz u obliku stabljike i lista.

U odnosu na grafik sa Slike 2.10 uočavamo dve razlike. Prva razlike javlja se kod prikaza društvenog proizvoda gde su dve stope rasta (-8.4% u 1990. godini i 11.3% u 1969. godini) znatno udaljene od preostalih opservacija. Da se ne bi na grafiku javljao prevelik broj praznih redova koji razdvajaju ove ekstremne opservacije od prestalog dela njih izdvajamo posebno. Druga razlika se tiče grafika stopa rasta investicija.

<sup>2</sup> Ukoliko raspolažemo parom vremenskih serija, a želimo porediti njihove distribucije frekvencija moguće je koristiti jednu of dve varijante ovog prikaza: (a) jedno pored drugog (engl. *side-by-side*) i(b) jedno uz drugo (engl. *back-to-back*)

Kod ove serije prikazane su samo vrednosti levo od decimalnog zareza. Broj u prvom redu označava stopu rasta od -20%. No, značajnija je razlika koju smo pomenuli, a javlja se u zavisnosti od strukture podataka (slučaj investicija). Kod ove serije granu treba razdeliti na dva reda inače bi imali suviše malo grana. Stoga ćemo stope rasta od 10% do 14% prikazati u jednom redu (označavajući ga sa zvezdicom (\*) iza oznake grane), a stope od 15% do 19% u drugom redu (označavajući ga sa kružićem (o) iza oznake grane). Tako na primer na grafiku investicija imamo dva poslednja reda koja počinju sa jedinicom. U pretposlednjem redu iza jedinice stoji zvezdica, a listovi sugerišu da su prikazane dve stope rasta: 10% (tačnije 10.7% u 1978. godini) i 11% (tačnije 11.3% u 1977. godini). U poslednjem redu iza jedinice stoji kružić, a list sugeriše da je prikazana stopa rasta od 16% (tačnije 16.2% u 1976. godini).

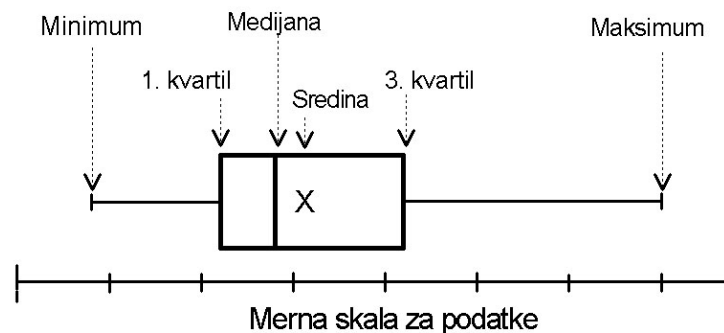
Društveni proizvod			Investicije			Osnovna sredstva		
Donji ekstrem   -8.4								
4	-1	663	1	-2 *	0	1	1	4
4	-0		1	-1 o		7	2	022359
5	0	3	3	-1 *	41	8	3	7
11	1	267889	7	-0 o	8655	11	4	079
11	2		11	-0 *	4210	11	5	
(4)	3	1457	(3)	0 *	022	(2)	6	89
9	4	4	10	0 o	678899	11	7	12367789
8	5	006	3	1 *	01	3	8	2
5	6		1	1 o	6	2	9	
5	7	3				2	10	26
4	8	058						
Gornji ekstrem   11.3								

**Slika 2.11** Grafikon u obliku stabljike i lista (tri serije)

Sa grafika uočavamo da raspored prve dve serije pokazuje tendenciju ka asimetričnosti: pozitivno asimetričan (asimetrija "udesno") je raspored serije društvenog proizvoda, a negativno asimetričan (asimetrija "ulevo") je raspored serije investicija. Što se tiče rasporeda serije osnovnih sredstava uočavamo da postoje dva modusa. Sa grafika vremenske serije (Slika 2.6(c)) zapaža se da je vrednost osnovnih sredstava rasla po godišnjim stopama od oko 7.5% sve do sredine sedamdesetih godina. Nakon toga beleže se skromnije stope rasta od oko 2.4%. Otuda dva modusa na grafičkom prikazu u obliku stabljike i lista sugerišu postojanje dva međusobno različita perioda u kretanju vrednosti osnovnih sredstava, period brzog rasta do sredine sedamdesetih i period sporog rasta od sredine sedamdesetih godina.

*Napomena:* U zavisnosti od strukture podataka može se javiti potreba da se svaka grana razdeli ne na dva nego na pet redova. Tada iza oznake za granu u prvom redu stoji (\*), a u taj red unose se opservacije čija je druga cifra 0 i 1, u drugi red unose se opservacije sa drugom cifrom 2 i 3 (oznaka grane je T), u treći red unose se opservacije sa drugom cifrom 4 i 5 (oznaka grane je F), u četvrti red unose se opservacije sa drugom cifrom 6 i 7 (oznaka grane je S) i naposljetku u peti red unose se opservacije sa drugom cifrom 8 i 9 (oznaka grane je o). ■

Pored grafičkog prikaza distribucije frekvencija koristimo i sumarne pokazatelje oblika rasporeda: koeficijente asimetrije i spljoštenosti. Oba ova koeficijenta računamo na osnovu prethodno izračunate vrednosti sredine i varijanse posmatrane promenljive. Zbog velikog uticaja nestandardnih opservacija na vrednost sredine i varijanse promenljive koristi se druga robustnija mera centralne tendencije kao što je na primer medijana, a za meru disperzije koristi se interkvartilna razmak<sup>3</sup>. Ovi pokazatelji predstavljaju osnovu za definisanje narednog grafičkog prikaza koji nam omogućava donošenje suda o obliku rasporeda i postojanju nestandardnih opservacija u seriji. U literaturi se ovaj grafik naziva *prikazom u obliku pravougaonika* (engl. *boxplot* ili *box-whisker plot*).



**Slika 2.12** Grafički prikaz u obliku pravougaonika

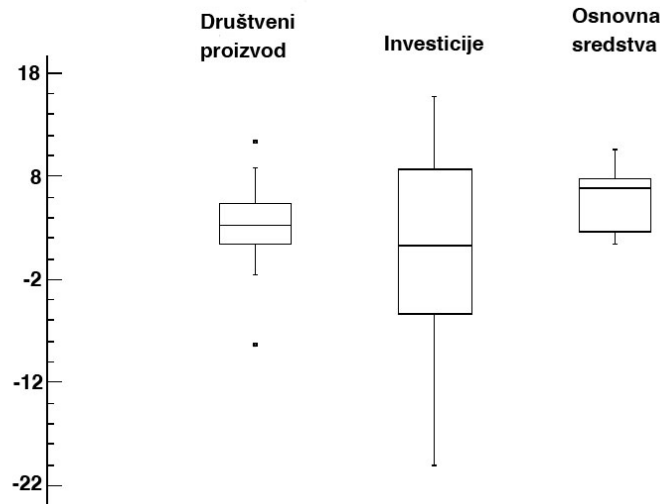
Postoje brojne varijante ovog grafika<sup>4</sup>, a mi smo se u izlaganju priklonili osnovnoj verziji prikaza u obliku pravougaonika koji je dat na Slici 2.12. Pravougaonikom je obuhvaćeno 50% opservacija koje su locirane između prvog i trećeg kvartila, odnosno obuhvaćene su interkvartilnom razlikom. Crta na pravougaoniku označava lokaciju medijane, a sa  $x$  je označena sredina promenljive (opciono). Crte koje izlaze iz pravougaonika na levo i desno najčešće sežu do ekstremnih vrednosti serije. Kažemo

<sup>3</sup> Za definiciju i osobine kao i korišćenje mera centralne tendencije, disperzije i oblika rasporeda videti Žižić, Lovrić i Pavličić (1992, ss. 38-61). Isti autori interkvartilni razmak nazivaju interkvartilna razlika.

<sup>4</sup> Videti na primer: McGill (Mekdžil), Tukey i Larsen (Larsen) (1978).

najčešće, jer u slučaju postojanja nestandardnih opservacija ove se posebno označavaju, a crte se produžavaju do tačaka koje su locirane na udaljenosti od jedanipo puta vrednost interkvartilne razlike, računajući od prvog i trećeg kvartila.

**Primer 2.5** Korišćenjem vremenskih serija tri ekonomske promenljive iz Primera 2.1 dati njihov sumarni prikaz u obliku pravougaonika.



**Slika 2.13** Grafikon u obliku pravougaonika (tri serije)

Sa Slike 2.13 vidimo da su medijane tri serije međusobom različite. Pri tome su kod društvenog proizvoda i investicija one bliže međusobom, no što je to slučaj sa ma kojom od njih dve u odnosu na medijanu osnovnih sredstava. Interkvartilni razmak (dužina pravougaonika) je najmanja kod društvenog proizvoda, zatim kod osnovnih sredstava, a najveći stepen varijabiliteta je kod serije investicija. Lokacija medijane kod osnovnih sredstava sugeriše asimetričnost ove serije (u Primeru 2.4 ukazano je na bimodalnost distribucije frekvencija ove serije). Kod serije društvenog proizvoda javljaju se dve nestandardne opservacije označene kao posebne tačke u odnosu na crte koje izlaze iz tela pravougaonika. Na konkretne vrednosti kao i godine u kojima su registrovane ove nestandardne opservacije ukazali smo u Primeru 2.4. ■

Postoji mogućnost kombinovanja grafičkog prikaza u obliku pravougaonika i modifikovanog dijagrama rasturanja tačka-crta. Naime, marginalni rasporedi kod ovog dijagrama rasturanja zamenjuju se pravougaonicima koji su informativniji u odnosu na prvobitni sadržaj grafika tačka-crta, tačnije njegov marginalni raspored.

Pored navedenih sumarnih prikaza u grafičkom obliku koji nam pomažu u prosuđivanju o rasporedu vremenske serije u iste svrhe može nam poslužiti i  $\chi^2$  - test za testiranje da li raspored frekvencija vremenske serije odgovara pretpostavljenom teorijskom rasporedu. Takođe se u iste svrhe može koristiti grafički pristup poznat pod

imenom *Q-Q graf* (engl. *Quantile-Quantile plot*) koji su predložili Wilk (Vilk) i Gnanadesikan (Ganadesikan) (1968) ili *korenogram* (engl. *rootogram*) Tukeya (1972), kod koga se vrednost frekvencije kod histograma frekvencija zamenjuje njihovim kvadratnim korenom. Ova transformacija frekvencija je predložena jer je uočeno da varijabilitet frekvencija nije konstantan nego proporcionalan samim frekvencijama.

## 2.4 TRANSFORMACIJA VREMENSKIH SERIJA

Naredna faza u istraživačkoj analizi vremenskih serija jeste njihova transformacija. Na osnovu rezultata prethodnih faza analize možemo zaključiti o osnovnim karakteristikama vremenske serije. To saznanje zatim koristimo u transformaciji vremenske serije da bi obezbedili uslove za gradnju modela. Naime, modeli vremenskih serija kojima se bavimo u ovoj knjizi polaze od pretpostavki da su serije određenih osobina. Ukoliko smo na osnovu dosadašnjih istraživanja zaključili da te pretpostavke kod konkretne vremenske serije nisu ispunjene, pristupamo njenoj transformaciji izlazeći na taj način u susret zahtevima modela.

Transformacija podataka ima dugu tradiciju u statistici, pa isto važi i za analizu vremenskih serija. Objasnjenje za široku upotrebu transformacije u statistici leži u činjenici da je lakši rad sa transformisanom u odnosu na originalnu seriju. Tako smo u izučavanju kretanja realnog društvenog proizvoda koristili grafički prikaz njegovog nivoa. Međutim, kada smo izvršili transformaciju vremenske serije, izračunavajući godišnje stope rasta realnog društvenog proizvoda, dobili smo seriju na osnovu koje smo lakše mogli prosuđivati o fazama ubrzanja i usporenja privrednog rasta.

Navodimo i drugi primer kada se na osnovu grafičkog prikaza vremenske serije može zaključiti o potrebi i tipu transformacije vremenske serije. Na Slici 2.4 prikazano je kretanje industrijske proizvodnje u Srbiji. Istaknuto je da serija ima sezonski karakter, uz očigledno prisutan trend. Ako želimo ispitati da li proizvodnja ima i ciklični karakter tada nam dve spomenute karakteristike vremenske serije otežavaju sagledavanje cikličnog kretanja u njoj. Primenom transformacije koja eliminiše sezonsku i trend komponentu u vremenskoj seriji dobićemo transformisanu seriju na osnovu koje ćemo lakše utvrditi postojanje poslovnih ciklusa u proizvodnji.

Kroz izložene primere naveli smo neke od razloga za transformaciju vremenske serije. U opštem slučaju imamo dva razloga zbog kojih pristupamo transformaciji vremenskih serija:

1. ***Da bismo dobili podatke koji su simetrični i po mogućnosti normalno raspoređeni.*** Često se pri modeliranju vremenske serije i njenom prognoziranju polazi od pretpostavke da su podaci saglasni sa normalnom raspodelom ili da su simetrično raspoređeni. Međutim, za tipične ekonomske vremenske serije raspodela opservacija biće obično asimetričan "udesno".
2. ***Da bismo stabilizovali nivo i varijansu.*** Vremensku seriju industrijske proizvodnje (mesečni i kvartalni podaci) karakteriše porast nivoa i varijanse tokom vremena. Ova druga pojava svojstvena je multiplikativnim sezonskim

vremenskim serijama. Transformacijom takve vremenske serije sezonske efekte činimo aditivnim, a nivo konstantnim.

U cilju transformacije vremenskih serija koristi se tzv. *Box-Coxova transformacija* (Box i Cox (Koks) (1964)). Za vremensku seriju  $X_t$  i koeficijent transformacije  $\lambda$  (lambda) transformisana serija  $X_t^{(\lambda)}$  je:

$$X_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{(X_t^\lambda - 1)}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ \log X_t, & \lambda = 0 \end{cases}, \quad (2.1)$$

Pri transformaciji konkretne vremenske serije postavlja se pitanje izbora vrednosti . Moguće je koristiti jedan od sledeća dva pristupa. Prema prvom, češće korišćenom pristupu, koeficijent se ocenjuje korišćenjem metode najveće verodostojnosti, ili ekvivalentno, minimiziranjem sume kvadrata reziduala za transformisanu seriju:

$$S(\lambda) = \sum_{t=1}^n (X_t^{(\lambda)} - \mu^{(\lambda)})^2, \quad (2.2)$$

gde je  $\mu^{(\lambda)}$  sredina transformisane serije. Ocena najveće verodostojnosti koeficijenta  $\lambda$ , dobija se iterativnom metodom korišćenjem kompjuterskog statističkog programa. Neke od najčešće korišćenih vrednosti  $\lambda$  i odgovarajuće transformacije date su u Tabeli 2.2.

Drugi pristup baziran je na neparametarskim pokazateljima kao što su medijana, kvartili i percentili, a takođe na Q-Q grafu, na osnovu kojih proveravamo simetričnost rasporeda. Kako je ovaj pristup izboru koeficijenta  $\lambda$  retko u upotrebi, to zainteresovanog čitaoca upućujemo da o načinu njegove primene pročita kod Millsa (1990, ss. 40-48).

**Tabela 2.2** Box-Coxova transformacija

Vrednost lambda	Transformacija
-1.0	recipročna vrednost od $X_t$
-0.5	recipročna vrednost korena od $X_t$
0.0	logaritam od $X_t$
0.5	kvadratni koren od $X_t$
1.0	$X_t$ (bez transformacije)

U klasi Box-Coxove transformacije za ekonomske vremenske serije najčešće je u upotrebi logaritamska transformacija (vrednost koeficijenta  $\lambda = 0$ ). Pored toga što se ovom transformacijom postiže simetričnost rasporeda opservacija vremenske serije njome

se stabilizuje i varijansa serije kao što se može videti na Slici 2.14(a) na primeru serije indeksa industrijske proizvodnje u Srbiji (uporediti ovu sliku sa Slikom 2.4).

Pri korišćenju Box-Coxove transformacije treba imati u vidu sledeće:

1. Gornja transformacija definisana je samo za pozitivne serije. To ne predstavlja ograničenje u njenoj primeni, s obzirom da pozitivnost možemo postići dodavanjem konstante svim opservacijama. Kao što ćemo u 4. Glavi videti, korelaciona struktura vremenske serije ne menja se dodavanjem iste konstante svim opservacijama.
2. Transformaciju u cilju stabilizovanja varijanse treba sprovesti pre ma koje druge transformacije, kao što je na primer diferenciranje koje se primenjuje u cilju stabilizovanja nivoa serije.
3. Pri korišćenju transformacije javlja se problem jer se prognoza transformisane serije mora transformisati nazad da bi bila porediva sa originalnom serijom. Pri tome se suočavamo sa pristrasnošću dobijenih prognoza.

U pogledu opravdanosti korišćenja transformisane vremenske serije ne postoji jedinstveno mišljenje. Nalazi autora kao što su Nelson (Nelson) i Granger (1979) sugerišu da su marginalna poboljšanja postignuta u prognoziranju vremenskih serija kada je korišćena Box-Coxova transformacija. U literaturi se često nekritički koristi transformacija tipa Box-Coxa kao obavezna u pripremnoj fazi pri modeliranju vremenske serije. U tom pogledu delimo mišljenje Chatfielda (1989, s. 12) da transformaciju treba izbeći kad god je to moguće, osim kada transformisani podaci imaju direktnu interpretaciju. Ako nas na primer interesuju procentualna povećanja serije, tada njena logaritamska transformacija ima smisla.

Do sada smo se bavili transformacijom u cilju postizanja simetričnosti i normalnosti rasporeda opservacija vremenske serije. Videli smo da u nekom slučaju Box-Coxova transformacija stabilizuje i varijansu serije. Za razliku od drugih statističkih podataka vremensku seriju karakteriše i vremenski poredak opservacija što otvara problem vremenske zavisnosti momenata rasporeda. Jednostavno rečeno, nivo i varijansa vremenske serije menjaju se tokom vremena. Mada je transformacijom postignuta stabilnost varijanse vremenske serije, zbog osobine Box-Coxove transformacije da čuva poredak opservacija, njome se ne može stabilizovati u vremenu promenljiv nivo serije.

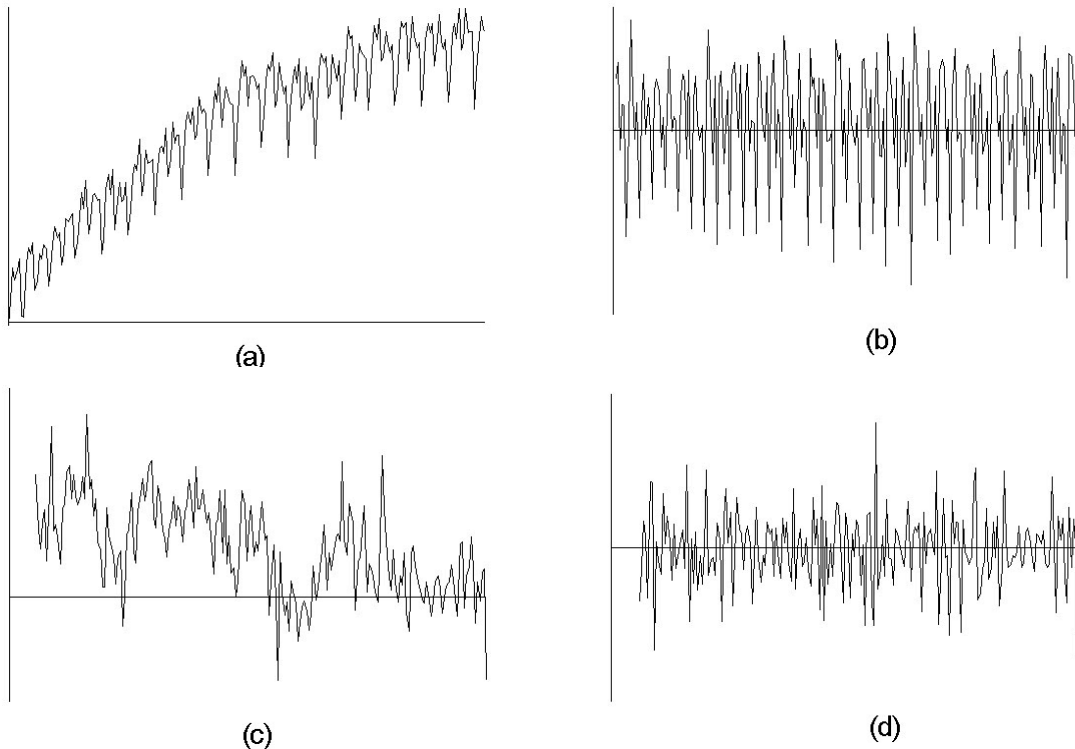
Takve vremenske serije sa trendom, ili kako smo ih nazvali - nestacionarne serije, karakteriše porast nivoa tokom vremena i relativno glatko kretanje. Primer takve serije je realni društveni proizvod čiji je grafik dat na Slici 2.1. Da bismo ispitali periode usporenja ili ubrzanja privredne aktivnosti na osnovu te serije nužno je eliminisati trend iz nje. Kako ćemo se već u narednom poglavlju i u 5. Glavi detaljnije baviti problemom detekcije prisustva i tipa trenda kao i njegovog izdvajanja iz vremenske serije, ovde ukazujemo na jedan, u analizi vremenskih serija veoma često korišćen, tip transformacije kojim se eliminiše trend. Radi se o postupku diferenciranja, tj. računanja



razlike uzastopnih članova vremenske serije:  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ . U analizi ekonomskih vremenskih serija veoma je popularna kombinacija specijalnog tipa Box-Coxove transformacije i diferenciranja. Naime, ukoliko na logaritamski transformisanu seriju primenimo postupak diferenciranja, odnosno operator diferenciranja:

$$\Delta \log(X_t) = \log(X_t) - \log(X_{t-1}) = \log\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) \approx \frac{X_t}{X_{t-1}} - 1 = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} \quad (2.3)$$

dobićemo da prva diferencija logaritma vremenske serije predstavlja približno stopu rasta posmatrane pojave (pod uslovom da je količnik  $X_t / X_{t-1}$  relativno mali). Upravo ovu kombinaciju dva tipa transformacije primenili smo u Primeru 2.1 na tri vremenske serije. U opštem slučaju, ukoliko je u vremenskoj seriji prisutan polinomijalni trend reda  $d$ , on se eliminiše primenom operatora diferenciranja  $d$  puta, tj.  $\Delta^d = (1-B)^d$  (videti Odeljak 1.3).



**Slika 2.14 Tipovi transformacije serije indeksa industrijske proizvodnje u Srbiji:** (a) logaritamska, (b) prva diferencija logaritama, (c) sezonska diferencija logaritama i (d) prva i sezonska diferencija logaritama

Vremenske serije kod kojih je sezonski efekat posebno izražen, transformišemo takođe korišćenjem operatora diferenciranja, ali sezonskog tipa:  $\Delta_s X_t = X_t - X_{t-s}$ . Njime otklanjamo efekat sezone. U slučaju serije indeksa industrijske proizvodnje u Srbiji (Slika 2.4) kod koje imamo izražen trend i sezonu sa promenljivim varijansom, korišćićemo sledeću kombinaciju tipova transformacije:

1. logaritamsku, za stabilizovanje varijanse,
2. prvu diferencu, za eliminisanje trenda i
3. sezonsku diferencu, za eliminisanje sezone ( $s=12$ ).

Prema tome, dalju analizu serije indeksa industrijske proizvodnje obavljamo na osnovu transformisane serije:

$$\Delta\Delta_{12} \log X_t = (1-B)(1-B^{12}) \log X_t \quad (2.4)$$

Obratiti pažnju na izgled transformisane serije kada se primeni samo prva diferencu (Slika 2.14(b)) ili samo sezonska diferencu (Slika 2.14(c)). U prvom slučaju u seriji ostaje uticaj sezone, a u drugom slučaju prisustvo trenda je očigledno. Stoga se serija mora diferencirati korišćenjem kako prvog tako i sezonskog operatora diferenciranja (Slika 2.14(d)).

Do sada smo razmatrali transformaciju jedne vremenske serije. O transformaciji više vremenskih serija, odnosno o neparametarskom pristupu transformaciji međusobne veze vremenskih serija pročitati kod Millsa (1990, ss. 50-54).

## 2.5 IZRAVNANJE VREMENSKE SERIJE

U deskriptivnoj ili istraživačkoj fazi analize vremenske serije često nas interesuje osnovni tok vremenske serije. Pod osnovnim tokom serije podrazumevamo njenu dugoročnu tendenciju, tj. imamo u vidu njeno karakteristično ponašanje ("glatko" kretanje serije). Prema terminologiji koju koristi Tukey (1977) kažemo da se vremenska serija može predstaviti na sledeći način<sup>5</sup>:

$$\begin{array}{l} \text{opservacija vremenske} \\ \text{serije} \end{array} = \begin{array}{l} \text{glatki deo opservacije} \\ \text{vremenske serije} \end{array} + \begin{array}{l} \text{hrapavi deo opservacije} \\ \text{vremenske serije} \end{array}$$

Dugu tradiciju u analizi vremenskih serija ima pristup prema kome do glatkog kretanja serije dolazimo prilagodavanjem linije trenda svim opservacijama serije. Na raspolaganju su nam polinomijalni trendovi (linearni, kvadratni, itd.) ili se koristi S kriva (Gomperzova (Gomperc) ili logistička kriva). U svakom od navedenih slučajeva prilagodena linija trenda predstavlja ocenu glatkog kretanja serije, a razlike između opservacija vremenske serije i ocenjenog trenda su reziduali. Oni predstavljaju ocenu lokalnih fluktuacija vremenske serije.

Narednu grupu metoda predstavljaju postupci izravnjanja vremenske serije zasnovani na tzv. *pokretnim prosecima*. Ove postupke možemo podeliti u dve grupe. Prvu grupu metoda izravnjanja sačinjavaju oni postupci koji proseke računaju na osnovu aritmetičke

<sup>5</sup> Nazivi komponenti opservacije na engleskom jeziku su: *smooth* (glatki deo) i *rough* (hrapav deo). Standardniji naziv u statistici za "hrapavi deo" opservacije jeste rezidual.

sredine, a drugu oni koji za proseke koriste medijanu. Prednost ove druge grupe neparametarskih metoda ispoljava se u situacijama kada u vremenskoj seriji imamo prisutne nestandardne opservacije. Zbog neosetljivosti medijane na prisustvo takvih opservacija dobijaju se bolji rezultati korišćenjem metoda izravnjanja zasnovanih na medijani, od onih zasnovanih na aritmetičkoj sredini. Zajedničko za obe grupe je to da nisu bazirani na bilo kakvom statističkom modelu, što znači da nema potrebe ni za ocenom nepoznatih koeficijenata.

Razmotrimo definiciju, način primene i osobine prve grupe metoda izravnjanja. Za datu vremensku seriju  $X_1, X_2, \dots, X_n$  računamo izravnatu seriju prema izrazu:

$$\sum_{j=-q}^q a_j X_{t+j}, \quad t = p+1, p+2, \dots, n-q \quad (2.5)$$

gde je  $\{a_j\}$  skup pondera koji zadovoljavaju uslov

$$\sum_{j=-q}^q a_j = 1. \quad (2.6)$$

Može se pokazati da izravnata serija na osnovu izraza (2.5) ima približno istu sredinu kao i originalna serija, ali da ima manju varijansu. U zavisnosti od konkretne definicije skupa pondera razlikujemo posebne slučajeve izravnjanja:

1. Podskup pondera za slučaj  $m = p = q$  i  $a_j = a_{-j}$  generiše tzv. *simetrične pokretne proseke*. Posmatrajmo slučaj kada je  $m = 1$ . Tada u izrazu (2.5) figurišu tri opservacije vremenske serije (broj tri predstavlja *korak pokretnog proseka*):  $X_{t-1}, X_t, X_{t+1}$ , a ponderi su  $a_{-1}, a_0, a_1$ , pri čemu je  $a_{-1} = a_1$ . Očigledno je da za  $t = 1$  i  $t = n$  na osnovu (2.5) ne možemo izračunati vrednost izravnate serije, jer tada u izrazu figurišu opservacije  $X_0$  i  $X_{n+1}$  sa kojima ne raspolažemo. U opštem slučaju pri korišćenju simetričnih pokretnih proseka, uz korak pokretnog proseka od  $2m+1$  opservacije, na početku i kraju serije nedostajace nam  $m$  opservacija. Ovo skraćivanje izravnate serije predstavlja jedan od osnovnih nedostataka simetričnih pokretnih proseka i razlog za definisanje i korišćenje asimetričnih pokretnih proseka.
2. Ako su svi ponderi kod simetričnih pokretnih proseka međusobom jednaki, tada imamo posla sa *jednostavnim pokretnim prosecima*. Oni zbog svoje jednostavnosti imaju najčešće korišćeni skup pondera. U našem primeru ( $m = 1$ ) vrednost pondera je  $a_{-1} = a_0 = a_1 = 1/3$ , pa je prva opservacija izravnate vremenske serije raspoloživa za  $t = 2$  i predstavlja aritmetičku sredinu prve tri opservacije vremenske serije. U opštem slučaju vrednost pondera kod jednostavnih pokretnih proseka je jednaka  $1/(2m+1)$ .

3. Uzastopnom primenom jednostavnih pokretnih proseka generiše se široka klasa pokretnih proseka. Razlog ove uzastopne primene jednostavnih pokretnih proseka leži u nameri da se vremenska serija što bolje izravna. Pojedini članovi dobijene klase pokretnih proseka stekli su veliku popularnost (na primer Spencerovi (Spenser) i Hendersonovi (Henderson) pokretni proseci). Zato ćemo njima u narednim redovima posvetiti više pažnje.
4. Rečeno je da se u slučaju korišćenja simetričnih filtera pri izravanju javlja problem, što na krajevima serije dolazi do njenog "skraćanja". On se može prevazići korišćenjem asimetričnih filtera ili projekcijom "od oka" izravnete serije na njenim krajevima. Jedna od veoma popularnih metoda koja koristi asimetrični filter je *eksponencijalno izravnaje* kod koga su ponderi  $a_j(1-\alpha)^j$ , gde je konstanta  $\alpha$  takva da je  $0 < \alpha < 1$ , a ponderi opadaju po geometrijskoj progresiji sa porastom  $j$ . Ovu klasu metoda izravnanja razmatramo u narednoj glavi.

Na osnovu uzastopnih primena jednostavnog pokretnog proseka generišu se različiti skupovi simetričnih pondera<sup>6</sup>. Ovde navodimo samo tri. Prvi skup čine tzv. *Spencerovi 15-o člani pokretni proseci* ( $m=7$ ) čiji su simetrični ponderi

$$\frac{1}{320}[-3, -6, -5, 3, 21, 46, 67, 74, \dots]. \quad (2.7)$$

Može se pokazati da je ovaj skup pondera dobijen uzastopnom primenom pokretnih proseka čije pondere navodimo u izrazu (2.8).

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right). \quad (2.8)$$

Prvo se na originalnu seriju primenjuje četvoročlani pokretni proseci čiji su ponderi jednaki 1/4 (ponderi iz prve zagrade u izrazu (2.8)), zatim se na dobijenu izravnatu seriju ponovo primenjuje isti četvoročlani pokretni proseci čiji su ponderi jednaki 1/4 (ponderi iz druge zagrade u izrazu (2.8)). Dobijena serija se ponovo podvrgava izravanju, pri čemu se koriste petočlani pokretni proseci čiji su ponderi 1/5 (ponderi iz treće zagrade u izrazu (2.8)). Poslednja izravnata serija se naposletku izravna korišćenjem petočlanih pokretnih proseka čiji su ponderi dati u četvrtoj zagradi u izrazu (2.8). Drugi skup pondera odnosi se na *21-o člani Spencerove pokretne proseke* ( $m=10$ ) čiji su simetrični ponderi:

$$\frac{1}{350}[-1, -3, -5, -5, -2, 6, 18, 33, 47, 57, 60, \dots]. \quad (2.9)$$

<sup>6</sup> Detalje o postupku uzastopne primene jednostavnog pokretnog proseka, kao i uopšte o metodu pokretnih proseka videti kod Kendalla (Kendal), Stuarta (Stjuart) i Orda (Ord) (1983, 46. Glava).

Pored brojnih drugih rasporeda pondera spomenimo još samo *Hendersonove pokretne proseke* zato što se koriste u okviru zvaničnog statističkog postupka desezoniranja vremenskih serija<sup>7</sup>. Navodimo kao primer Hendersonove 9-o članne pokretne proseke ( $m = 4$ ), odnosno odgovarajuće pondere:

$$[-0.041, -0.010, 0.119, 0.267, 0.330, \dots]. \quad (2.10)$$

Ovi ponderi teže da slede kubni polinomijalni trend, a izbor veličine  $m$  zavisi od stepena iregularnosti serije. Osnovna ideja je da se prilagodi kriva ne celoj seriji, nego njenom delu.

Pokretni proseci se zbog svoje jednostavnosti mogu primeniti bez korišćenja savremene računarske tehnike i statističkih programa. Međutim, mi preporučujemo njihovo korišćenje jer većina statističkih programa za personalne računare<sup>8</sup> sadrže skoro sve metode izravnjanja koje navodimo u knjizi, a pri radu sa većim brojem dužih vremenskih serija mogućnost greške pri ručnom računanju se povećava.

Ranije je rečeno da se primenom metoda pokretnih sredina "skraćuje" izravnata vremenska serija na njenim krajevima za ukupno  $2m$  opservacija. Ukoliko smo koristili pokretne proseke sa simetričnim ponderima, tada na svakom kraju izravnate serije "nedostaje" po  $m$  opservacija. Ovo "skraćivanje" serije na njenom početku, tj. levom kraju ne izaziva posebnu glavobolju, ali je problematično "skraćivanje" serije na njenom desnom kraju. Naime, ukoliko izravnatu seriju koristimo za prognoziranje budućeg toka serije tada su nam upravo poslednje opservacije od izuzetne važnosti.

Postupak pokretnih proseka primenjen čak i na serije kod kojih su opservacije međusobno nezavisne - tzv. potpuno slučajne serije, generiše izravnatu seriju čije su opservacije međusobno korelisane. Naredna osobina postupka pokretnih proseka u bliskoj vezi sa navedenom, tiče se pojave cikličnog kretanja u izravnatoj seriji. Naime, još je Slutsky (1927) pokazao da se korišćenjem postupka uprosečavanja i diferenciranja na potpuno slučajnoj seriji može indukovati ciklična varijacija u podacima. To sugerise da se ciklično kretanje koje je utvrđeno za neke vremenske serije može pripisati postupku izravnjanja koji je korišćen u postupku analize podataka.

**Primer 2.6** Vremensku seriju stope rasta realnog društvenog proizvoda iz Tabele 2.1 izravnati korišćenjem jednostavnog pokretnog proseka sa korakom od 5 perioda, Spencerovim 15-o članim pokretnim prosecima, kao i Hendersonovim 5-o članim pokretnim prosecima. Prikazati zatim grafike dobijenih vremenskih serija.

<sup>7</sup> Izvođenje Hendersonovog pokretnog proseka dato je kod Kenya (Keni) i Durbina (1982).

<sup>8</sup> Primer statističkog programa koji sadrži opcije izravnjanja vremenskih serija jeste *Statgraphics* (Statgrafik) (Statistical Graphics System) čiji je proizvođač Statistical Graphics Corporation. U primerima koji slede koristili smo upravo ovaj program za izravnjanje vremenskih serija.

Dobijeni rezultati izravnanja na osnovu primene zahtevanih tipova pondera dati su u Tabeli 2.3.

U Tabeli 2.3 u trećoj, petoj i šestoj koloni prikazane su izračunate vrednosti izravnate serije stopa rasta društvenog proizvoda korišćenjem jednostavnog, Spencerovog i Hendersonovog pokretnog proseka. Obratiti pažnju da je korišćenjem Spencerovog 15-o članog pokretnog proseka serija "skraćena" za po sedam opservacija na krajevima. Preostala dva metoda koriste 5-o člane proseke, pa su odgovarajuće izravnate serije kraće za po dve opservacije na krajevima.

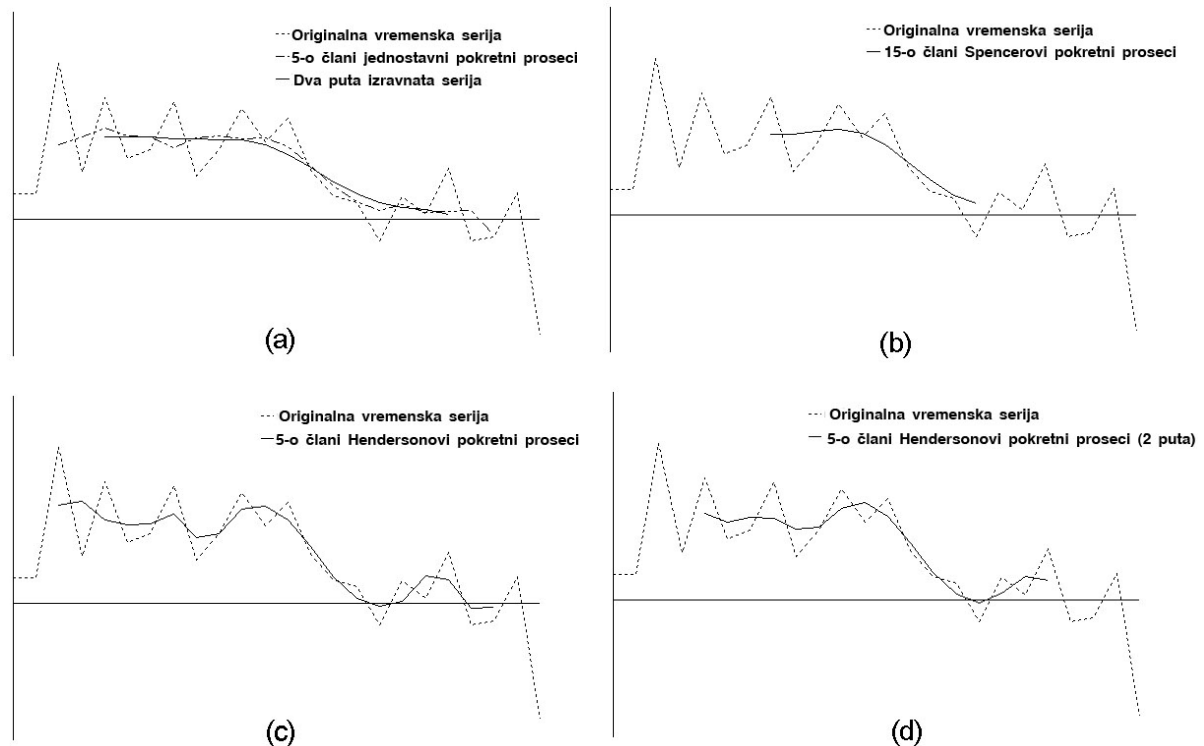
Ponekad se na dobijene izravnate serije primenjuje postupak ponovne primene izabrane metode pokretnog proseka na već izravnatu seriju. Time se dobija još "glatkije" kretanje serije. Nažalost, po cenu daljeg skraćivanja serije na krajevima. U četvrtoj i sedmoj koloni Tabele 2.3 date su drugi put izravnate vrednosti kod jednostavnog i Hendersonovog pokretnog proseka.

**Tabela 2.3** Izravnanje stopa rasta društvenog proizvoda

Godina	Originalna serija	Metodi pokretnih proseka				
		5-o člani jednostavni		Spencerovi 15-o člani	Hendersonovi 5-o člani	
		izravnata serija	2 puta izravnata		izravnata serija	2 puta izravnata
1967	1.80	-	-	-	-	-
1968	1.80	-	-	-	-	-
1969	11.30	5.42	-	-	7.07	-
1970	3.40	5.94	-	-	7.35	-
1971	8.80	6.58	5.98	-	6.02	6.24
1972	4.40	6.02	5.94	-	5.64	5.59
1973	5.00	5.96	5.94	-	5.71	5.95
1974	8.50	5.20	5.83	5.78	6.44	5.89
1975	3.10	5.92	5.78	5.84	4.74	5.10
1976	5.00	6.04	5.77	6.05	5.02	5.22
1977	8.00	5.80	5.77	6.15	6.83	6.56
1978	5.60	5.88	5.36	5.88	7.00	7.03
1979	7.30	5.22	4.64	5.08	6.04	6.00
1980	3.50	3.86	3.73	3.84	4.10	4.09
1981	1.70	2.42	2.68	2.52	1.91	1.94
1982	1.20	1.28	1.85	1.40	0.33	0.37
1983	-1.60	0.64	1.17	0.81	-0.22	-0.27
1984	1.60	1.04	0.80	-	0.15	0.45
1985	0.30	0.48	0.66	-	1.96	1.67
1986	3.70	0.54	0.30	-	1.67	1.41
1987	-1.60	0.60	-	-	-0.35	-
1988	-1.30	-1.14	-	-	-0.29	-
1989	1.90	-	-	-	-	-
1990	-8.40	-	-	-	-	-

Na Slici 2.15 prikazani su grafici originalne serije stopa rasta društvenog proizvoda i odgovarajućih izravnatih serija. Sa Slike 2.15 uočavamo da je kod jednostavnog i Hendersonovog pokretnog proseka ponovna primena

izravnanja na već izravnatu seriju dala zaista seriju koja je "glatkija" od prvobitno izravunate serije.



**Slika 2.15 Pokretni proseci serije stopa rasta društvenog proizvoda SR Jugoslavije:** (a) jednostavni 5-o člani primenjeni jedan i dva puta, (b) Spencerovi 15-o člani, (c) Hendersonovi 5-o člani primenjeni jedanput i (d) Hendersonovi 5-o člani primenjeni dva puta

Međutim, u slučaju jednostavnih pokretnih proseka druga primena pokretnih proseka previše je izravнала seriju tako da na osnovu nje nismo u mogućnosti suditi o cikličnosti proizvodne aktivnosti. Sličan je zaključak u slučaju primene Spencerovih pokretnih proseka uz dodatni problem da je serija isuviše skraćena, pa je ma kakva analiza u ovom slučaju praktično onemogućena. Naposljetku dvostrukom primenom Hendersonovih pokretnih proseka dobijena je izravната vremenska serija na osnovu koje smo u mogućnosti ispitati periode ubrzanja i usporenja privrednog rasta mereno porastom realnog društvenog proizvoda. ■

Drugu grupu metoda izravnanja karakteriše to da se umesto pokretnih proseka (aritmetičke sredine) koriste *pokretne medijane*. Uobičajeno je da se koriste tročlane ili 5-o člane pokretne medijane. U slučaju korišćenja tročlanih medijana tekuća opservacija se zamenjuje medijanom tri opservacije (prošle, tekuće i buduće opservacije). Ova grupa metoda izravnanja preporučuje se kad god je u analiziranoj vremenskoj seriji prisutna nestandardna opservacija. Ako u nizu od tri opservacije imamo dve nestandardne, tada se savetuje primena 5-o članih pokretnih medijana jer se tročlanim pokretnim medijanama ne eliminiše njihov uticaj.

Primena tročlanih pokretnih medijana dovodi do pojave parova opservacija izravnate serije koje imaju istu vrednost. Takva serija na grafiku ima ravnine (dve susedne opservacije iste vrednosti) i "izlomljeno" kretanje. Da bi se ona izravnala koristi se postupak tzv. *deobe* (engl. *splitting*) prema kome se izravnata serija deli na tri dela. Označimo sa  $X_{t-1}$  i  $X_t$  par opservacija koje uzimaju istu vrednost. Tada će prvi deo podeljene serije biti upravo ovaj par opservacija, drugi će biti deo serije levo od ovog para, a pripadaju mu opservacije ...,  $X_{t-4}, X_{t-3}, X_{t-2}$ . Naposljetku trećem delu pripadaju opservacije desno od ovog para opservacija, odnosno radi se o opservacijama  $X_{t+1}, X_{t+2}, X_{t+3}, \dots$ . Sada ćemo vrednost  $X_{t-1}$  iz para  $(X_{t-1}, X_t)$  zameniti vrednošću

$$Z_{t-1} = \text{medijana} \{X_{t-2}, X_{t-1}, 3X_{t-2} - 2X_{t-3}\}, \quad (2.11)$$

a  $X_t$  sa

$$Z_t = \text{medijana} \{3X_{t+1} - 2X_{t+2}, X_t, X_{t+1}\}. \quad (2.12)$$

Na ovaj način dobili smo seriju koja ima "glatkiji" tok u odnosu na izravnatu seriju dobijenu primenom tročlanih medijana. Ovako dobijena serija ili prethodno izravnata serija može biti podvrgnute postupku *ponovnog izravnjanja* (engl. *resmoothing*) u cilju dobijanja "glatkije" serije od prvobitne. Postupak ponovnog izravnjanja može se primenjivati sve dok izravnata serija ne pokaže da njeno dalje izravnavanje ne dovodi do izmena. Naposljetku, izravnata serije se podvrgava tzv. *hanning postupku*<sup>9</sup> prema kome se svaka opservacija finalne izravnate serije zamenjuje ponderisanim pokretnim prosekom nje same i dve opservacije iz njenog susedstva, prema izrazu:

$$Z_t = \frac{1}{4} X_{t-1} + \frac{1}{2} X_t + \frac{1}{4} X_{t+1}. \quad (2.13)$$

Ovaj ponderisani pokretni prosek primenjuje se tek kada se pokretnim medijanama eliminisao uticaj nestandardnih opservacija.

Za razliku od metoda izravnjanja zasnovane na pokretnim prosecima, kod primene izravnjanja na bazi pokretnih medijana definisan je postupak<sup>10</sup> za određivanje vrednosti izravnate serije na krajevima. Na taj način je izbegnuto "skraćivanje" izravnate serije. Ovaj postupak se primenjuje u finalnoj fazi izravnjanja, a do tada se jednostavno koristi prva i poslednja opservacija originalne vremenske serije na krajevima izravnate serije, ako je na primer korišćena tročlana pokretna medijana.

U literaturi je uobičajena sledeća oznaka postupaka izravnjanja iz ove grupe kao na primer: 3RSSH. U ovoj oznaci trojka se odnosi na korišćenje tročlanih pokretnih medijana, R označava da se koristio postupak ponovnog izravnjanja, S znači da je zatim

<sup>9</sup> Ovaj postupak je dobio ime prema austrijskom meteorologu XIX veka Julius von Hannu (Džulius fon Han) koji je u analizi meteoroloških vremenskih serija koristio postupke koji pripadaju ovim metodama izravnjanja.

<sup>10</sup> Videti kod Vellemana (Velmen) i Haoglina (Haolin) (1981).



korišćen postupak deobe u cilju eliminisanja ravnina u vremenskoj seriji i to dva puta (drugo S), a naposljetku je izravnata serija podvrgnuta dodatnom izravnanju korišćenjem *hanning* postupka (slovo H u oznaci postupka).

**Primer 2.7** Vremensku seriju stope rasta realnog društvenog proizvoda iz Tabele 2.1 izravnati korišćenjem postupka u čijoj osnovi su pokretne medijane. Prema uobičajenoj oznaci u ovoj klasi metoda izravnjanja primeniti sledećih pet postupaka: 3RSS, 3RSSH, 5RSS, 5RSSH i 3RSR. Prikazati zatim grafike izravnatih vremenskih serija.

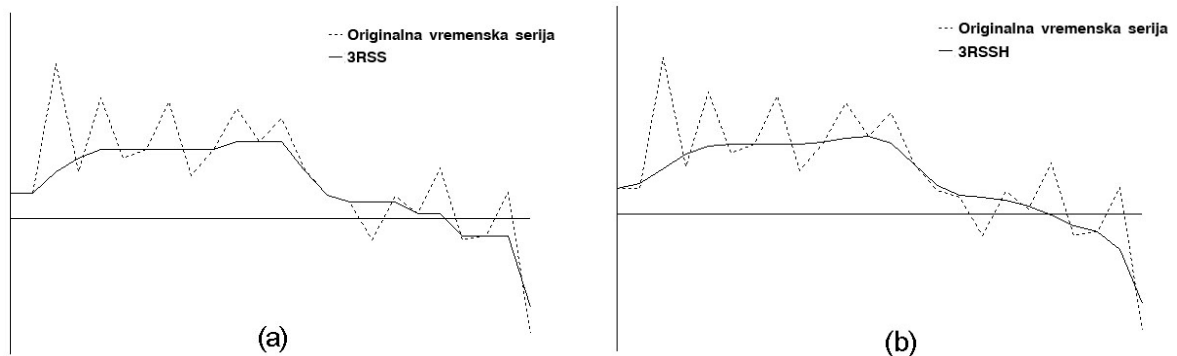
Treća kolona u Tabeli 2.4 sadrži tročlane pokretne medijane serije, a u narednoj, četvrtoj koloni smešteni su izravnati podaci nakon primene postupka deobe na opservacije iz treće kolone. Brojevi iz ostalih kolona Tabele 2.4 dobijeni su korišćenjem odgovarajućih opcija statističkog programa *Statgraphics*.

**Tabela 2.4** Izravnate vrednosti stopa rasta društvenog proizvoda (pokretne medijane)

Godina	Originalna serija	3R	S	3RSS	3RSSH	5RSS	5RSSH	3RSR
1967	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80
1968	1.80	1.80	1.80	1.80	2.20	1.80	2.20	1.80
1969	11.30	3.40	3.40	3.40	3.25	3.40	3.25	3.40
1970	3.40	8.80	8.80	4.40	4.30	4.40	4.30	4.40
1971	8.80	4.40	4.40	5.0	4.85	5.0	4.85	5.0
1972	4.40	5.0	4.40	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
1973	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
1974	8.50	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
1975	3.10	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.15	5.0
1976	5.0	5.0	5.0	5.0	5.15	5.60	5.45	5.0
1977	8.0	5.60	5.60	5.60	5.45	5.60	5.60	5.60
1978	5.60	7.30	7.30	5.60	5.60	5.60	5.60	5.60
1979	7.30	5.60	5.60	5.60	5.07	5.60	5.07	5.60
1980	3.50	3.50	3.50	3.50	3.58	3.50	3.58	3.50
1981	1.70	1.70	1.70	1.70	2.03	1.70	2.13	1.70
1982	1.20	1.20	1.20	1.20	1.33	1.60	1.53	1.20
1983	-1.60	0.30	0.30	1.20	1.20	1.20	1.30	1.20
1984	1.60	0.30	1.60	1.20	0.98	1.20	0.98	1.20
1985	0.30	1.60	1.60	0.30	0.53	0.30	0.53	0.30
1986	3.70	0.30	0.30	0.30	-0.10	0.30	0.30	0.30
1987	-1.60	-1.30	-1.30	-1.30	-0.90	0.30	-0.10	-1.30
1988	-1.30	-1.30	-1.30	-1.30	-1.30	-1.30	-0.90	-1.30
1989	1.90	-1.30	-1.30	-1.30	-2.60	-1.30	-1.30	-1.30
1990	-8.40	-1.30	-1.30	-6.50	-6.50	-1.30	-1.30	-6.50

Dobijeni rezultati na osnovu primene pokretnih medijana i odgovarajućih postupaka izravnjanja dati su u Tabeli 2.4. Kako je iz Tabele 2.4 vidljivo da primenjeni postupci 3RSS i 3RSR daju identične izravnate serije to smo na Slici 2.16 prikazali samo grafike originalne i izravnate serije dobijene primenom postupaka 3RSS i 3RSSH. Čitaocu se ostavlja da

grafički prikaže izravnete serije dobijene primenom postupka 3RSS i 3RSSH.



**Slika 2.16** Pokretne medijane i postupci izravnanja serije stopa rasta društvenog proizvoda SR Jugoslavije: (a) 3RSS i (b) 3RSSH

Sa grafika izravnete serije dobijene primenom postupka 3RSS uočavamo da je njeno kretanje "izlomljeno" sa brojnim ravninama. Zato bi dodatno izravnanje moglo biti postignuto primenom hanning postupka. Zaista je serija sa Slike 2.16(b) (postupak 3RSSH) "glatkija" u odnosu na izravnatu seriju 3RSS, a pogotovo u odnosu na originalnu seriju. ■

Do sada smo se u ovom poglavlju bavili metodama izravnanja nesezonskih vremenskih serija. Sezonske vremenske serije u istraživačkoj fazi analize vremenskih serija možemo dvojako tretirati u zavisnosti od toga da li želimo meriti uticaj sezone i/ili otkloniti efekte sezone da bismo proučili dugoročno kretanje posmatrane pojave. Ako smo sebi postavili oba navedena cilja, tada je iz elementarne analize vremenskih serija poznato da se sezonski indeksi mogu koristiti u svrhe iskazivanja efekta sezone u pojedinim periodima, a da takode mogu poslužiti za eliminisanje njenog uticaja<sup>11</sup>. Ako nam je cilj da analiziramo dugoročno kretanje serije, tada nam na raspolaganju stoje i drugi metodi analize, a to su postupci izravnanja. Sada ćemo ukratko ukazati na postupak njihove primene kod sezonskih vremenskih serija.

Bez obzira da li serija pored sezonskog karaktera ima i izražen trend možemo koristiti pokretne proseke za njihovo izravnanje. Tako kod mesečnih vremenskih serija eliminišemo uticaj sezone korišćenjem sledećeg izravnanja:

$$Z_t = \frac{1}{12} \left( \frac{1}{2} X_{t-6} + X_{t-5} + X_{t-4} + \dots + X_{t+5} + \frac{1}{2} X_{t+6} \right). \quad (2.14)$$

U slučaju da analiziramo kvartalnu vremensku seriju, efekat sezone se može eliminisati korišćenjem sledećeg izravnanja:

<sup>11</sup> O izračunavanju sezonskih indeksa kao i njihovom korišćenju u postupku desezoniranja vremenske serije videti: Žižić, Lovrić i Pavličić (1992, 424-437).

$$Z_t = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} X_{t-2} + X_{t-1} + X_t + X_{t+1} + \frac{1}{2} X_{t+2} \right). \quad (2.15)$$

Da se ne bi stekao pogrešan utisak da postupkom izravnjanja sezonske vremenske serije dobijamo samo njenu dugoročnu komponentu, napominjemo da se izravnata serija može koristiti i za ocenu efekata sezone. U zavisnosti od toga da li je u pitanju vremenska serija sa multiplikativnom ili aditivnom sezonom ocenu efekata uticaja sezone dobijamo formiranjem količnika originalne i izravnate serije  $X_t/Z_t$  (kod multiplikativne sezone) ili razlike  $X_t - Z_t$  (kod aditivne sezone).

## Zadaci

- 2.1 Grafički prikazati vremensku seriju godišnja nezaposlenost u SR Jugoslaviji (serija S4) u periodu od 1964-1992. godine korišćenjem grafika sa vremenom na apscisi. Koje su osnovne karakteristike ove vremenske serije? Šta se može reći o kretanju nezaposlenosti u navedenom periodu? Pokušati navesti razloge za povremena usporenja ili ubrzanja u kretanju posmatrane pojave.
- 2.2 Izračunati stope rasta serije godišnja nezaposlenost u SR Jugoslaviji (serija S4) u periodu od 1964-1992. godine, a zatim korišćenjem grafika sa vremenom na apscisi grafički ih prikazati. Šta se sada može reći o kretanju nezaposlenosti u posmatranom periodu?
- 2.3 Grafički prikazati kvartalnu vremensku seriju nezaposlenosti u bivšoj Jugoslaviji (serija S12) u periodu od 1956.I-1991.I korišćenjem grafika sa vremenom na apscisi. Koje su osnovne karakteristike ove vremenske serije?
- 2.4 Na osnovu izračunatih serija stopa rasta realnog društvenog proizvoda SR Jugoslavije (Tabela 2.1) i stopa rasta godišnje nezaposlenosti u periodu od 1967-1990. godine iz 2. Zadatka, formirati dijagram rasturanja ove dve serije sa stopom rasta društvenog proizvoda na apscisi i stopom rasta nezaposlenosti na ordinati. Dati i modifikovani dijagram rasturanja tipa tačka-crta. Šta se može zaključiti o međusobnoj povezanosti ove dve serije?
- 2.5 Za izračunatu vremensku seriju stopa rasta godišnje nezaposlenosti u SR Jugoslaviji u periodu od 1964-1992. godine, u okviru 2. Zadatka, formirati a) klasičan histogram frekvencija, b) prikaz u obliku stabljike i lista, c) prikaz u obliku pravougaonika. Da li postoji nestandardna opservacija u ovoj seriji? Koji od grafičkih prikaza daje odgovor na prethodno pitanje?
- 2.6 Uporediti grafičke prikaze u obliku pravougaonika za vremenske serije stopa rasta društvenog proizvoda i stopa rasta godišnje nezaposlenosti u SR Jugoslaviji u periodu od 1967-1990. godine. Šta se može zaključiti o međusobnom sličnosti ili razlici rasporeda opservacija ove dve serije?
- 2.7 Na osnovu grafika kvartalne vremenske serije indeksa industrijske proizvodnje u Srbiji (serija S10) u periodu od 1972.I do 1989.IV predložiti i primeniti

- odgovarajući tip Box-Coxove transformacije. Primeniti Box-Coxovu transformaciju za sve vrednosti koeficijenta lambda iz Tabele 2.2. Prema kriterijumu minimalne sume kvadrata reziduala transformisane serije izabrati odgovarajući tip transformacije. Da li je korišćenjem navedenog kriterijuma potvrđen vaš izbor na osnovu grafika serije?
- 2.8 Na osnovu karakteristika kvartalne vremenske serije nezaposlenosti u bivšoj Jugoslaviji (serija S12) u periodu od 1956.I-1991.I (videti Zadatak 2.3) predložiti njenu transformaciju. Primeniti izabrani tip transformacije i konstatovati da li transformisana serija ima očekivani izgled. Ako se zahteva primena Box-Coxove transformacije o čemu treba voditi računa pre nego što se ona primeni na ovu seriju?
- 2.9 Izvršiti izravnavanje vremenskih serija stopa rasta investicija i osnovnih sredstava iz Tabele 2.1 korišćenjem metode jednostavnog pokretnog proseka. Izravnatu seriju izračunati korišćenjem sledećih koraka izravnanja: a)  $m = 1$ , b)  $m = 2$  i c)  $m = 3$ . Na osnovu dobijenih rezultata šta zaključujete o uticaju koraka izravnanja na ponašanje izravnate serije kod ovog metoda?
- 2.10 Izvršiti izravnavanje vremenskih serija stopa rasta investicija i osnovnih sredstava iz Tabele 2.1 korišćenjem Hendersonovog postupka izravnavanja.
- 2.11 Izvršiti izravnavanje vremenskih serija stopa rasta investicija i osnovnih sredstava iz Tabele 2.1 korišćenjem metoda na bazi pokretnih medijana. Izravnatu seriju izračunati korišćenjem sledećih metoda izravnanja: a) 3RSSH i b) 5RSSH. Na osnovu dobijenih rezultata šta zaključujete o uticaju koraka izravnanja na ponašanje izravnate serije kod ovog metoda?
- 2.12 Izvršiti eliminisanje efekata sezone korišćenjem odgovarajućeg metoda izravnanja za kvartalnu vremensku seriju indeksa industrijske proizvodnje u Srbiji (serija S10) u periodu od 1972.I do 1989.IV. Da li dobijena izravnata serija dovoljno "glatka" da bi omogućila analizu dugoročne tendencije u seriji?
- 2.13 Izvršiti eliminisanje efekata sezone korišćenjem odgovarajućeg metoda izravnanja za mesečnu vremensku seriju indeksa industrijske proizvodnje u Srbiji (serija S14) u periodu od 1972.1 do 1989.12. Da li dobijena izravnata serija dovoljno "glatka" da bi omogućila analizu dugoročne tendencije u seriji?
- 2.14 Pokazati da izravnata serija kod metoda pokretnih proseka ima približno istu sredinu kao i originalna serija. Obrazložiti sve pretpostavke koje se uvode u toku dokaza.
- 2.15 Pokazati da izravnata serija kod metoda pokretnih proseka ima manju varijansu od originalne serije. Koliko iznosi smanjenje varijanse izravnate serije u odnosu na originalnu priliko primene: a) jednostavnog pokretnog proseka, b) Spencerovih 15-o članih pondera, c) Hendersonovog 9-o članih pondera?

- 2.16 Objasniti i ilustrovati tvrdnju iz teksta da metod izravnjanja primenjen na potpuno slučajnu seriju uvodi međusobnu korelisanost observacija izravnanate serije.

### **3 STRUKTURNI MODELI VREMENSKIH SERIJA**

Strukturni modeli vremenskih serija su modeli koji se definišu direktno preko izraza za svaku komponentu od interesa. Ukoliko vremensku seriju karakteriše trend (dugoročno kretanje u seriji) i sezona (periodične fluktuacije konstantne dužine kraće od godine), tada će komponente od interesa biti upravo trend i sezona, a sam strukturni model te vremenske serije biće predstavljen dvema jednačinama, po jedna za svaku od komponenti posebno. Na prvi pogled strukturni modeli liče metodološki na metode dekompozicije vremenskih serija. Pre nego što ukažemo na osnovne razlike između strukturnih modela vremenskih serija i metoda dekompozicije, ukratko iznesimo osnovne ideje metode dekompozicije.

Metodi dekompozicije polaze od pretpostavke da se vremenska serija može razložiti u četiri komponente: trend, ciklus, sezonu i slučajnu grešku. Međusobna veza ovih komponenti može biti aditivna (opservacija vremenske serije jednaka je zbiru komponenti) ili multiplikativna (opservacija vremenske serije jednaka je proizvodu komponenti). Zadatak nam je da na osnovu raspoloživih podataka što je preciznije moguće identifikujemo i izdvojimo svaku od komponenti posebno. Uobičajeno je da se prvo eliminiše sezonska komponenta, zatim trend, pa naposljetku ciklus. Ovakav pristup kod metoda dekompozicije sasvim je u skladu sa prvobitnom primenom ovih metoda u svrhu desezoniranja vremenskih serija (videti Poglavlje 8.6). U poslednje vreme metodi dekompozicije koriste se i u svrhu prognoze. Detaljnije o ovim metodama videti u standardnim udžbenicima iz osnova statističke analize (na primer: Žižić, Lovrić i Pavličić (1993, 13. Glava)) ili kod Wheelwrighta i Makridakisa (1985, 5. Glava).

Kao što se može na osnovu rečenog zaključiti, izdvajanje komponenti u okviru metoda dekompozicije predstavlja empirijski koncept. To znači da ne postoji opšti teorijski statistički model dekompozicije na osnovu koga će se vršiti izdvajanje komponenti za svaku konkretnu vremensku seriju, kao i vrednovanje izdvojenih komponenti. Takođe, kod metoda dekompozicije svakoj opservaciji dat je isti značaj bez obzira na njenu "starost". Tako se na primer pri izdvajanju trenda, kao determinističke

funkcije vremena, koriste sve opservacije i daju im se isti ponderi prilikom prilagodavanja izabrane funkcije podacima.

Za razliku od metoda dekompozicije, strukturni modeli, onako kako se definišu u svojoj savremenoj varijanti, pretpostavljaju da je svaka komponenta (trend, ciklus, sezona i slučajna greška) neopaživ stohastički proces<sup>1</sup> i koje u međusobnoj interakciji daju opažljivu vremensku seriju. Kod ovih modela, pri formiranju izraza za svaku komponentu, "svežiji" podaci imaju veći ponder od "starijih" opservacija. Dakle, prepoznatljiv statistički okvir strukturnih modela i davanje većeg pondera "novijim" podacima čini osnovnu razliku ovih modela i metoda dekompozicije.

U uvodnom poglavlju, kroz definiciju globalnog i lokalnog trenda, ukazujemo na dodatnu razliku ova dva pristupa analizi vremenskih serija. Kao preteča savremenih strukturnih modela javljaju se tzv. *ad hoc* postupci za koje se naknadno pokazalo da imaju jasno utemeljenje u statističkoj teoriji, odnosno mogu se smatrati specijalnim slučajevima opšte klase strukturnih modela vremenskih serija ili ARIMA modela<sup>2</sup>. Stoga izlaganje u ovoj glavi, nakon uvoda, započinjemo upravo *ad hoc* postupcima, jer predstavljaju polaznu tačku u razvoju strukturnih modela vremenskih serija. Njima posvećujemo izlaganje u naredna četiri poglavlja. Razmatramo eksponencijalno izravnanje, Brownov i Holt-Wintersov postupak izravnanja kao i opšte eksponencijalno izravnanje. Ovu glavu zaključujemo konciznim izlaganjem jednostavnog strukturnog modela. Kako su strukturni modeli zasnovani na potpuno drugačijoj filozofiji od većine modela kojima se bavimo u ovoj knjizi, to im posvećujemo manju pažnju, a čitaoca upućujemo na knjigu Harveya (1989) koja je u celini posvećena ovim modelima, a takode i na knjigu Nerlovea i dr. (1979) koja se bavi sintezom strukturnih i ARIMA modela.

---

<sup>1</sup> Pre nego što i 4. Glavi formalno definišemo stohastički process, recimo samo da pod ovim pojmom podrazumevamo evoluciju slučajne promenljive tokom vremena. U literature se ovi modeli sreću i pod nazivom *UC modeli* od engleskog naziva *unobserved components models* (modeli sa neopažljivim komponentama).

<sup>2</sup> ARIMA modeli predstavljaju najopštiju klasu modela kojima se bavimo u ovoj knjizi. Njihova formalna definicija je data u naredne dve glave.

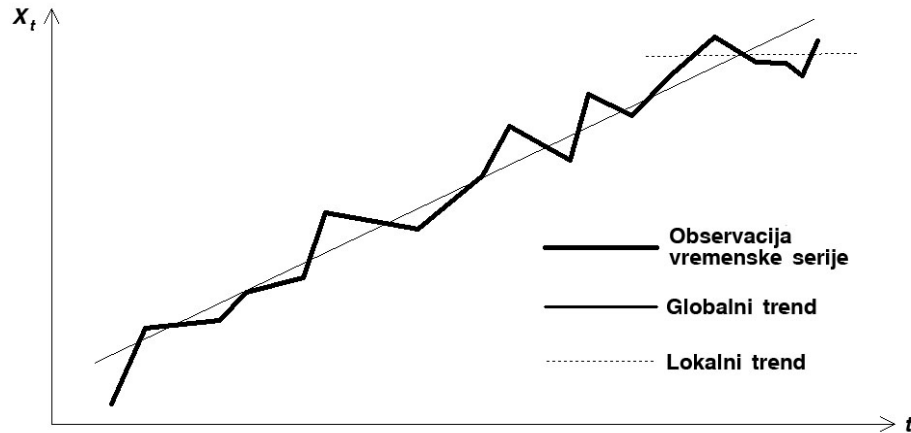
### 3.1 UVOD

U preduzećima je čest slučaj da se, u svrhe planiranja proizvodnje i kontrole zaliha, zahteva formiranje prognoza buduće prodaje za stotine proizvoda ili rezervnih delova na zalihama. Pri tome je uobičajena situacija da se raspolaže relativno kratkim mesečnim vremenskim serijama, a prognoze je potrebno formirati za jedan do četiri kvartala unapred. Zahtev da se to uradi u relativno kratkom vremenskom periodu za veliki broj vremenskih serija podstakao je istraživače u oblasti operacionih istraživanja da konstruišu postupke koji će biti relativno jeftini, brzi i dovoljno pouzdani. Automatizacija takvog postupka predstavljala bi samo argument više u korist njegove primene. Upravo postupci pod opštim nazivom *postupci izravnjanja* ispunjavaju postavljene zahteve. Oni polaze od pretpostavke da je u seriji prisutan izvesna zakonitost ponašanja opservacija zajedno sa slučajnim fluktuacijama. Naš je zadatak da korišćenjem ovih postupaka na osnovu podataka dobijamo "izravnatu" seriju sa prigušenim slučajnim fluktuacijama. Ova izravnata serija ukazuje upravo na osnovnu tendenciju prisutnu u vremenskoj seriji. Ta izravnata vrednost koristi se zatim kao prognoza budućih vrednosti vremenske serije.

U okviru ove glave bavićemo se *postupcima eksponencijalnog izravnjanja* kod kojih koristimo nejednake pondere za prošle opservacije vremenske serije (vrednost pondera opada po geometrijskoj progresiji sa starošću podataka). Izlaganje svakog modela je tako sistematizovano da se prvo daje intuitivna osnova ovih modela. Zatim se ukazuje na njihove statističke osobine i naposljetku odgovara na pitanja koja se vrednost parametara preporučuje pri njihovoj primeni, a takode kakav je način inicijalizacije procesa izravnjanja.

Prvobitno je postupak prognoziranja vremenskih serija bio zasnovan na prilagodavanju neke funkcije vremena datim podacima. Njenom ekstrapolacijom u budućnost formirala se serija prognoza. Tako na primer kod metoda dekompozicije pri računanju trenda, bez obzira na izabranu funkciju, korišćene su sve opservacije vremenske serije. Njegovi koeficijenti su konstantni u celom posmatranom periodu. Takav trend nazivamo *globalni trend*. Njegov osnovni nedostatak je što polazi od pretpostavke da posmatrana pojava sledi izabrani obrazac ponašanja u celom posmatranom periodu. Bez obzira na fleksibilnost različitih formi modela trenda koji mogu da se koriste pri prilagodavanju globalnog trenda podacima, ostaje uvek bitno ograničenje da se računa sa njegovom neizmenjenom strukturom u celom periodu. Saznanje o ovom nedostatku globalnog trenda vodilo je ka razvoju metoda ocene tzv. *lokalnog trenda*. Ove metode različito tretiraju opservacije u zavisnosti od starosti podataka. Veći naglasak daje se "svežijim" podacima u odnosu na podatke iz dalje prošlosti. Na taj način dozvoljava se mogućnost da se koeficijenti lokalnog trenda menjaju pristizanjem nove opservacije, čime se vrši prilagodavanje linije trenda promenama podataka.





**Slika 3.1** Globalni i lokalni trend

Rečeno je da se globalni trend može predstaviti determinističkom funkcijom vremena koja važi za sve opservacije u uzorku. Nasuprot njemu lokalni trend menja pravac tokom vremena i samo u nekim delovima ima isti nagib kao i globalni trend. Ako nam je cilj formiranje prognoze, tada poslednje uočeni pravac ekstrapoliramo u budućnost korišćenjem upravo lokalnog trenda. Ovo smo ilustrovali na Slici 3.1 na kojoj je pored vremenske serije i linearnog determinističkog trenda prikazana i vrednost prognoze na osnovu lokalnog trenda.

Intuitivna osnova pristupa prognozi na osnovu lokalnog trenda dobro se sagledava kroz sledeći citata iz Harrisona (Harison) (1967, s. 835):

"U opštem slučaju, prodavac suočen sa grafikonom tražnje proizvoda, svoj pristup prognoziranju iskazuje crtanjem neke funkcije, obično prave linije, kroz opservacije i izvođenjem prognoze projekcijom te funkcije u budućnost. Pri crtanju funkcije on će se truditi da je najbolje prilagodi poslednje registrovanim podacima".

U zavisnosti od karakteristika vremenske serije koju podvrgavamo postupku izravnjanja biramo odgovarajući model izravnjanja. Na Slici 3.2 dati su karakteristični tipovi vremenskih serija sa klasifikacijom modela izravnjanja koja sugerise korišćenje određenog modela izravnjanja prema karakteristikama vremenskih serija (prisustvo i tip trenda, kao i tip sezonske komponente - aditivna ili multiplikativna). Izlaganje modela izravnjanja zasnovano je na odličnom pregledu metoda izravnjanja Gardnera (Gardner) (1985), kao i radovima Browna (1963), Grangera i Newbolda (1977), Harrisona (1965, 1967), Harveya (1984, 1989), Holta i dr. (1960), Millsa (1990), Montgomeryja (Montgomeri) i Johnsona (Džonson) (1976), Wheelwrighta i Makridakisa (1985) i Wintersa (1960).

## 3.2 JEDNOSTAVNO EKSPONENCIJALNO IZRAVNANJE

### 3.2.1 Definicija i osobine

Pretpostavimo da se vremenska serija  $X_t$  može prikazati modelom u kome posmatrana pojava iskazuje slučajne fluktuacije oko prosečnog nivoa  $\mu$ . U ovom slučaju model vremenske serije  $X_t$  je:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t, \quad (3.1)$$

gde je  $E(\varepsilon_t) = 0$  i  $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$ . Na ma kom intervalu vremena nivo serije je konstantan, ali je ostavljena mogućnost njegovog sporog menjanja tokom vremena. Jedan način ocene tog nivoa sastoji se u korišćenju sredine svih opservacija. Drugi način se sastoji u tome što se koristi ponderisana sredina koja veći ponder daje novijim podacima. Ovde se mogu koristiti eksponencijalno opadajući ponderi. Njihovim korišćenjem dolazimo do ocene  $\mu_t$ :

$$\begin{aligned} \mu_t &= \alpha X_t + \alpha(1-\alpha)X_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 X_{t-2} + \dots = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j X_{t-j} = \\ &= \alpha \left[ 1 + (1-\alpha)B + (1-\alpha)^2 B^2 + \dots + (1-\alpha)^j B^j + \dots \right] X_t. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Kako izraz u srednjoj zagradi predstavlja zbir članova beskonačne opadajuće geometrijske progresije on iznosi  $[1 - (1-\alpha)B]^{-1}$ , pa izraz (3.2) možemo pisati u obliku:


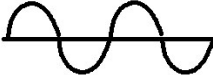
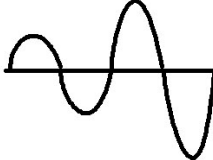
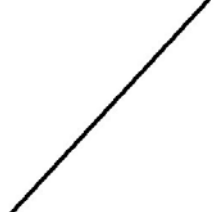
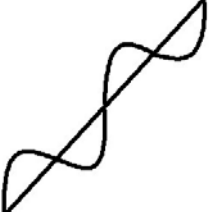







$$[1 - (1-\alpha)B]^{-1} \mu_t = \alpha X_t, \quad (3.3)$$

odnosno u obliku

$$\mu_t = \alpha X_t + (1-\alpha)\mu_{t-1}, \quad (3.4)$$

izražavajući time tekuću vrednost nivoa  $\mu_t$  kao linearnu kombinaciju, odnosno kao ponderisani prosek tekuće vrednosti vremenske serije  $X_t$  i prethodne vrednosti nivoa  $\mu_{t-1}$ . Ponder  $\alpha$  naziva se *konstanta izravnanja*, a postupak rekurzivnog određivanja tekuće vrednosti nivoa koja je definisana izrazom (3.4) naziva se *jednostavno eksponencijalno izravnanje* (engl. *simple exponential smoothing*). Alternativni i savremeniji način izražavanja jednostavnog eksponencijalnog izravnanja jeste u *obliku korekcije greškom* (engl. *error correction form*). Prema njemu se tekuća vrednost nivoa dobija modifikacijom prethodne vrednosti nivoa delom tekuće greške  $e_t = X_t - \mu_{t-1}$  koja je nastala korišćenjem ocene nivoa iz prethodnog perioda kao prognoze u tekućem periodu. Model u ovom obliku pišemo kao:  $\mu_t = \mu_{t-1} - \alpha(X_t - \mu_{t-1}) = \mu_{t-1} + \alpha e_t$ . Oba

oblika modela jednostavnog eksponencijalnog izravnanja zajedno sa funkcijom prognoze i proširenjem modela na sezonske vremenske serije data su u Tabeli 3.1.

	Nesezonska serija	Aditivna sezona	Multiplikativna sezona
Konstantan nivo	 JEI	 JEI-A	 JEI-M
Linearni trend	 Brown-1; Brown-2; HW	 Brown-A; HW-A	 Brown-M; HW-M
Eksponencijalni trend	 ET	 ET-A	 ET-M
Prigušeni trend	 HW-PT	 B2-PT-A	 B2-PT-M

**Slika 3.2** Tipovi vremenskih serija i modeli eksponencijalnog izravnanja

U praksi raspoložemo vremenskom serijom konačne dužine  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  na osnovu koje treba oceniti tekuću vrednost nivoa. Korišćenje jednostavnog eksponencijalnog izravnanja u slučaju vremenskih serija konačne dužine suočava nas sa problemom izbora početne ocene nivoa. Pre nego što se pozabavimo problemom izbora

početne ocene nivoa, ukažimo na dve osobine ocene nivoa dobijene jednostavnim eksponencijalnim izravnjanjem. Prvo pokažimo da je ocena nivoa ponderisana sredina svih prošlih opservacija. Ocena nivoa će biti ponderisana sredina ako se  $\mu_n$  može napisati kao linearna kombinacija prošlih opservacija, pri čemu je zbir koeficijenata linearne kombinacije jednak jedinici. Za  $t=n$  i  $t=n-1$  iz (3.4) dobijamo:  $\mu_n = \alpha X_n + (1-\alpha)\mu_{n-1}$  i  $\mu_{n-1} = \alpha X_{n-1} + (1-\alpha)\mu_{n-2}$ . Zamenom  $\mu_{n-1}$  u prvu jednačinu dobijamo:

$$\begin{aligned}\mu_n &= \alpha X_n + (1-\alpha)[\alpha X_{n-1} + (1-\alpha)\mu_{n-2}] \\ &= \alpha X_n + \alpha(1-\alpha)X_{n-1} + (1-\alpha)^2 \mu_{n-2}.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Ako nastavimo da zamenjujemo  $\mu_{n-j}, j=2,3,\dots,n$  u izrazu (3.5) dobićemo naposljetku:

$$\mu_n = \alpha \sum_{j=0}^{n-1} (1-\alpha)^j X_{n-j} + (1-\alpha)^n \mu_0, \quad (3.6)$$

gde je  $\mu_0$  početna ocena nivoa vremenske serije. Kako je

$$\alpha \sum_{j=0}^{n-1} (1-\alpha)^j = \alpha \left[ \frac{1-(1-\alpha)^n}{1-(1-\alpha)} \right] = 1-(1-\alpha)^n, \quad (3.7)$$

prema izrazu (3.6) sledi da je  $\alpha \sum_{j=0}^{n-1} (1-\alpha)^j + (1-\alpha)^n$  jednako jedinici. Znači da je ocena nivoa zaista ponderisana sredina prošlih opservacija. Vrednost ovih koeficijenata, odnosno pondera, osim poslednjeg, opada po geometrijskoj progresiji sa starošću podataka.

Prema drugoj osobini ocena nivoa je asimptotski nepristrasna ocena nepoznatog nivoa vremenske serije.  $(1-\alpha)^n \mu_0$  teži nuli kad  $n \rightarrow \infty$ , pa je

$$E(\mu_n) = E \left[ \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j X_{n-j} \right] = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j E(X_{n-j}) = \mu \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j = \mu. \quad (3.8)$$

Zato u periodu  $n$  koristimo  $\mu_n$  kao ocenu nepoznatog parametra  $\mu$ , a prognoza vrednosti vremenske serije za  $h$  perioda unapred, zasnovana na  $n$  raspoloživih opservacija biće

$$\hat{X}_n(h) = \mu_n. \quad (3.9)$$

Na primer, ako je poslednji raspoloživi podatak iz marta meseca, prognozu za april (dakle, prognozu za jedan period unapred) formiramo na osnovu izraza (3.9):

$$\hat{X}_{mart}(1) = \mu_{mart}.$$

U velikim uzorcima pokazano je da jednostavno eksponencijalno izravnanje predstavlja optimalan metod za ocenu nivoa serije u modelima datim izrazom (3.1), ako se pri tome koristi metod ponderisanih najmanjih kvadrata, odnosno minimizira ponderisana suma kvadrata reziduala:

$$Q(\mu, \omega) = \sum_{i=1}^n \omega^{n-i} (X_i - \mu)^2, \quad 0 \leq \omega \leq 1 \quad (3.10)$$

gde se veličina pondera  $\omega$  smanjuje sa starošću podataka.

Ocena na kraju perioda  $n$ , označena sa  $\mu_n$ , mora zadovoljiti uslov:

$$\frac{dQ(\mu_n, \omega)}{d\mu_n} = -2 \sum_{i=1}^n \omega^{n-i} (X_i - \mu_n) = 0. \quad (3.11)$$

odnosno

$$\mu_n \sum_{i=1}^n \omega^{n-i} = \sum_{i=1}^n \omega^{n-i} X_i. \quad (3.12)$$

**Tabela 3.1** Modeli jednostavnog eksponencijalnog izravnjanja (JEI modeli)

Vrsta sezone i model	Rekurzivni oblik modela	Model u obliku korekcije greškom
Nesezonska serija JEI	$\mu_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)\mu_{t-1}$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t$	$\mu_t = \mu_{t-1} + \alpha e_t$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t$
Aditivna sezona JEI-A	$\mu_t = \alpha(X_t - I_{t-s}) + (1 - \alpha)\mu_{t-1}$ $I_t = \delta(X_t - \mu_t) + (1 - \delta)I_{t-s}$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t + I_{t-s+h}$	$\mu_t = \mu_{t-1} + \alpha e_t$ $I_t = I_{t-s} + \delta(1 - \alpha)e_t$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t + I_{t-s+h}$
Multiplikativna sezona JEI-M	$\mu_t = \alpha(X_t / I_{t-s}) + (1 - \alpha)\mu_{t-1}$ $I_t = \delta(X_t / \mu_t) + (1 - \delta)I_{t-s}$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t I_{t-s+h}$	$\mu_t = \mu_{t-1} + \alpha e_t / I_{t-s}$ $I_t = I_{t-s} + \delta(1 - \alpha)e_t / \mu_t$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t I_{t-s+h}$

Rešenje je dato izrazom:

$$\mu_n = \frac{1 - \omega}{1 - \omega^n} \sum_{i=1}^n \omega^{n-i} X_i. \quad (3.13)$$

Može se pokazati da je  $\mu_n$  moguće izraziti preko sledeće rekurzivne formule:

$$\mu_n = \frac{(1 - \omega)X_n + \omega(1 - \omega^{n-1})\mu_{n-1}}{1 - \omega^n}. \quad (3.14)$$

Ako je  $n$  veliko, tada je  $\omega^n \approx 0$ , pa izraz (3.14) postaje:  $\mu_n = (1 - \omega)X_n + \omega\mu_{n-1}$ . Ako označimo  $\alpha = 1 - \omega$ , dobijamo izraz:  $\mu_n = \alpha X_n + (1 - \alpha)\mu_{n-1}$  što je identično izrazu (3.4).

### 3.2.2 Izbor konstante izravnjanja i početne vrednosti

Na kraju se pozabavimo izborom konstante izravnjanja i početne vrednosti izravnate statistike, jer njihova vrednost opredeljuje ponašanje eksponencijalnog izravnjanja u primeni na konkretnu vremensku seriju. Na osnovu izraza (3.4) očigledno je, da što je manja vrednost konstante izravnjanja to će ocena nivoa sporije reagovati na promenu lokalnog nivoa serije (izravnate vrednosti će imati glatko kretanje). Veća vrednost konstante izravnjanja uzrokuje da izravnata vrednost reaguje brzo i to ne samo na stvarne promene nivoa nego i na slučajne fluktuacije.

U literaturi se obično pretpostavlja da konstanta izravnjanja  $\alpha \in (0,1)$ , mada se preporučuje još uži interval, od 0.01 do 0.3 (Montgomery i Johnson (1976, s. 67)). Isti autori ukazuju da se metodom pokušaja različitih vrednosti konstante izravnjanja iz navedenog intervala bira ona vrednost koja optimizira izabranu statističku funkciju kriterijuma (jedan od pokazatelja kvaliteta prognoze kao što je na primer srednje kvadratna greška prognoze). Ukoliko se pokaže tokom primene ovog postupka da je izabrana vrednost  $\alpha > 0.3$ , tada se sugeriše korišćenje složenijih modela izravnjanja, kao što je na primer dvostruko eksponencijalno izravnjanje primereno procesima sa trendom.

Istraživanja drugih autora upozoravaju na opasnost apriornog fiksiranja konstante izravnjanja nezavisno od karakteristika vremenske serije. Pokazalo se da vrednost konstante, ocenjena na osnovu podataka uz korišćenje jednog od statističkih kriterijuma optimalnosti, znatno prevazilazi gornju granicu predloženog intervala, tj. 0.3. Stoga se preporučuje da se konstanta ocenjuje na osnovu podataka. Pri ocenjivanju konstante izravnjanja, teorijski i empirijski radovi ukazuju na potrebu korišćenja šireg intervala mogućih vrednosti, naime, od 0 do 2. Teorijsko obrazloženje ove sugestije bazira se na činjenici da je diferencna jednačina zasnovana na modelu JEI (vidi Tabelu 3.1) stabilna upravo za vrednosti konstante iz tog intervala. Takode se sugeriše da se izabrana, odnosno ocenjena konstanta podvrgne *ex ante* testiranju, pošto je često mala korelacija između *ex post* prilagodavanja i *ex ante* preciznosti.

Za kraj nam ostaje problem određivanje početne vrednosti  $\mu_0$ . Formulirano je nekoliko rešenja ovog problema:

1. **Prva opservacija ili nula.** U ovom postupku se kao početna vrednost uzima vrednost prve opservacije same vremenske serije. Ukoliko je serija dovoljno dugačka uticaj početne vrednosti postaje sve manji kako se udaljavamo od početnog perioda, pa inicijalizaciju postupka izravnjanja možemo započeti nulom.

2. *Sredina svih opservacija.* Kod ovog postupka za početnu vrednost uzeti sredinu vremenske serije.
3. *Podela serije na dva dela.* U ovom slučaju prvi deo serije koristimo za određivanje početne vrednosti ocene nivoa serije potrebnu za inicijalizaciju postupka izravnjanja. To možemo uraditi, na primer, izračunavanjem sredine prvog dela serije. Drugi deo serije koristimo zatim za određivanje optimalne vrednosti konstante izravnjanja.
4. *Metod prognoziranja unazad.* Ovaj metod se koristi u okviru Box-Jenkinsove metodologije modeliranja ARIMA modela, a zasniva se na okretanju vremenskog sleda tako što bi se započeo postupak ocenjivanja od poslednje (najsvežiji podatak) do prve opservacije (najstariji podatak). Time ćemo obezbediti prognozu za početak serije, odnosno početnu vrednost izravnate statistike.
5. *Kratke vremenske serije.* Ukoliko raspolažemo sa relativno kratkim vremenskim serijama tada je moguće izbeći izbor početne vrednosti izravnate statistike tako što će se koristiti egzaktni metod ponderisanih najmanjih kvadrata kod određivanja. Kako je model (3.4) aproksimacija egzaktnog metoda ponderisanih najmanjih kvadrata to ćemo egzaktni pristup koristiti sve dok ne prikupimo dovoljno podataka da bismo nadalje nastavili sa primenom rekursivnog postupka jednostavnog eksponencijalnog izravnjanja.

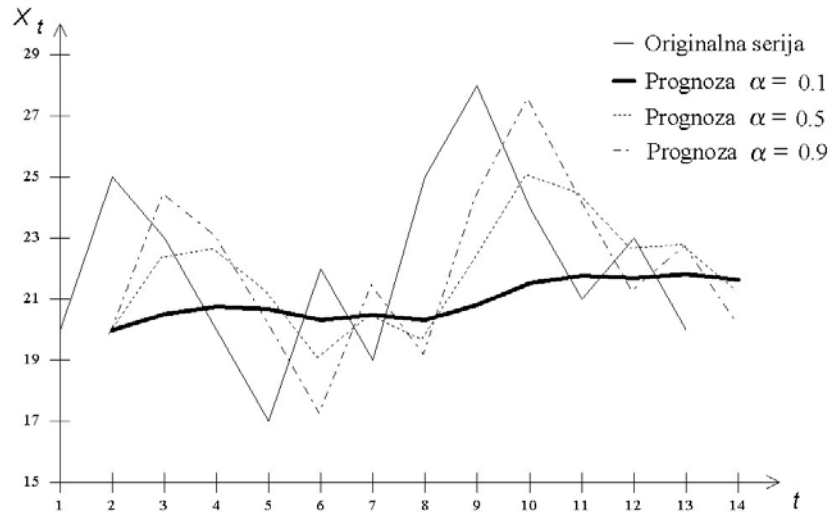
**Primer 3.1** Podaci o nedeljnoj prodaji osvežavajućeg pića (u litrama) u jednoj prodavnici tokom maja, juna i jula meseca 1994. godine, dati su u Tabeli 3.2.

**Tabela 3.2** Prodaja osvežavajućeg pića

Vremenski period	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Prodaja pića	20	25	23	20	17	22	19	25	28	24	21	23	20

Prodavac je uočio relativnu stabilnost obima prodaje u periodu maj-jul uz nedeljene varijacije. Potvrdu ovog prodavčevog zapažanja nalazimo u grafičkom prikazu vremenske serije.

Originalna serija sugerše nam izbor jednostavnog eksponencijalnog izravnjanja kao odgovarajućeg metoda za formiranje prognoze prodaje osvežavajućeg pića u avgustu mesecu. Primena jednostavnog eksponencijalnog izravnjanja zahteva izbor konstante izravnjanja kao i početne vrednosti ocene nivoa. Da bismo ilustrovali uticaj izbora različitih vrednosti konstante izravnjanja opredelili smo se za vrednosti  $\alpha = 0.1$ ,  $0.5$  i  $0.9$ . Sa svakom od tih konstanti izvršili smo izravnjanje serije prodaje.



Slika 3.3 Poređenje prognoza (jednostavno eksponencijalno izravnanje)

Što se početne vrednosti nivoa tiče prema predloženim postupcima ocenili smo tu vrednost i dobili sledeće rezultate:

1. korišćenjem prve opservacije ocena početne vrednosti nivoa je 20,
2. korišćenjem sredine svih 13 opservacija ocena početne vrednosti nivoa je 22.0769,
3. podelom serije na dva dela i korišćenjem sredine prvog dela (prvih šest opservacija) ocena početne vrednosti nivoa je 21.1667,
4. korišćenjem metoda prognoziranja unazad ocena početne vrednosti nivoa je 21.4286. Operacionalizacija metoda u ovom konkretnom slučaju znači da smo poslednju, 13. opservaciju vremenske serije proglasili prvom, 12. opservacija postaje druga, itd. Zatim smo tako formiranu vremensku seriju izravnali jednostavnim metodom izravnanja uz korišćenje prve opservacije kao ocene početne vrednosti nivoa i vrednosti konstante izravnanja,  $\alpha = 0.1$ . Poslednja izravната vrednost 21.4286 predstavlja ocenu početne vrednosti nivoa prvobitne vremenske serije.

U Tabeli 3.3 dati su rezultati izravnanja vremenske serije korišćenjem jednostavnog eksponencijalnog izravnanja. Pri tome je u sva tri slučaja (tri vrednosti konstante izravnanja) korišćena ista početna vrednost ocene nivoa, tj. 20. Na primer za  $\alpha = 0.1$ , u prvom vremenskom periodu imamo na osnovu modela JEI iz Tabele 3.1:

$$\mu_1 = \alpha X_1 + (1 - \alpha)\mu_0 = 0.1 \cdot 20 + (1 - 0.1)20 = 20.$$

U drugom vremenskom periodu imamo ocenu nivoa:



$$\mu_2 = \alpha X_2 + (1 - \alpha)\mu_1 = 0.1 \cdot 25 + (1 - 0.1)20 = 20.5,$$

a ostale vrednosti ocene nivoa dali smo u Tabeli 3.3 (3. kolona: **Izravnata vrednost**). Kako je ocena nivoa u tekućem, istovremeno i prognozirana vrednost u narednom periodu, to smo u Tabeli 3.3 dali samo prognoze u slučaju kada je konstanta izravnjanja  $\alpha = 0.5$  i  $0.9$ . Te prognoze su prikazane i na Slici 3.3. Elementi 5. kolone (**Greška prognoze**) dobijeni su kao razlika opservacija originalne vremenske serije i serije **Prognoza**. Naredne dve kolone sadrže apsolutne vrednosti greške prognoze i vrednosti kvadrata grešaka prognoze. Na osnovu njih izračunavamo srednju apsolutnu grešku prognoze i srednju kvadratnu grešku prognoze.

**Tabela 3.3** Izravnjanje i prognoze prodaje jednostavnim eksponencijalnim izravnjanjem

Vremenski period	Prodaja	Konstanta izravnjanja $\alpha = 0.1$					Prognoza	
		Izravnata vrednost	Prognoza	Greška prognoze	Apsolutna greška	Kvadrat greške	Konstanta izravnjanja	
							$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$
1	20	20.00	-	-	-	-	-	-
2	25	20.50	20.00	5.00	5.00	25.00	20.00	20.00
3	23	20.75	20.50	2.50	2.50	6.25	22.50	24.50
4	20	20.68	20.75	-0.75	0.75	0.56	22.75	23.15
5	17	20.31	20.68	-3.68	3.68	13.51	21.38	20.32
6	22	20.48	20.31	1.69	1.69	2.87	19.19	17.33
7	19	20.33	20.48	-1.48	1.48	2.18	20.59	21.53
8	25	20.80	20.33	4.67	4.67	21.82	19.80	19.25
9	28	21.52	20.80	7.20	7.20	51.90	22.40	24.43
10	24	21.76	21.52	2.48	2.48	6.17	25.20	27.64
11	21	21.69	21.76	-0.77	0.77	0.59	24.60	24.36
12	23	21.82	21.69	1.31	1.31	1.72	22.80	21.34
13	20	21.64	21.82	-1.82	1.82	3.31	22.90	22.83
14	-	-	21.64	-	-	-	21.45	20.28
<b>Zbir:</b>				16.38	33.35	135.86		
<b>Sredina:</b>				11.38	2.78	11.32		

Sa Slike 3.3 vidi se da smanjivanjem vrednosti konstante izravnjanja dobijamo sve izravnatiju seriju bez lokalnih fluktuacija. Da bi se odredila vrednost konstante izravnjanja koja daje najbolju prognozu izračunali smo greške prognoze i na osnovu njih srednju apsolutnu grešku i srednju kvadratnu grešku prognoze. Za  $\alpha = 0.1$  srednja apsolutna greška iznosi 2.78, a srednja kvadratna greška 11.32. Za vrednosti konstante izravnjanja  $\alpha = 0.5$  ova dva pokazatelja kvaliteta prognoze iznose 2.98 i 11.98 respektivno, a za  $\alpha = 0.9$ , 3.42 i 13.13 respektivno. Prema tome, vrednost konstante izravnjanja od 0.1 generiše prognozu sa najmanjom greškom u skupu ove tri vrednosti konstante izravnjanja.

Ovde je nužno napomenuti da smo računali pokazatelje *ex post* kvaliteta prognoze (unutar uzorka koji je korišćen pri dobijanju prognoze), a da je valjaniji način vrednovanja prognoze zasnovan na tzv. *ex ante* pristupu prema kome koristimo opservacije van uzorka za računanje pokazatelja kao što su srednja apsolutna greška i srednja kvadratna greška.

Sada se može postaviti pitanje da li možemo za konkretnu vremensku seriju izabrati optimalnu vrednost konstante izravnanja. Sugerisani pristup zahteva da pretražimo parametarski prostor, tj. sve vrednosti konstante izravnanja iz intervala (0,1) i da za svaku od njih izračunamo na primer srednju kvadratnu grešku prognoze unutar uzorka. Ona vrednost koja minimizira pokazatelj kvaliteta prognoze predstavljaće optimalnu vrednost konstante izravnanja. Za vremensku seriju prodaje pića minimalna vrednost srednje kvadratne greške prognoze iznosi 11.11 i postiže se sa konstantom izravnanja  $\alpha = 0.16816$ . Navedeni način određivanja optimalne vrednosti konstante izravnanja ne bi trebalo apsolutizovati, jer pretraživanje parametarskog prostora može dati pogrešan rezultat u slučaju da je došlo do promene u obrascu ponašanja vremenske serije.

Čitaocu se ostavlja da proveriti kakav je uticaj izbora različitih početnih vrednosti ocene nivoa na kvalitet prognoze modela jednostavnog eksponencijalnog izravnanja. ■

Modeli jednostavnog eksponencijalnog izravnanja sa sezonskom komponentom  $I_t$ , čija je dužina perioda  $s$ , prikazani su u Tabeli 3.1. U ovim modelima dodata je jednačina kojom se vrši revizija sezonske komponente korišćenjem konstante izravnanja  $\delta$ . Razlikujemo model jednostavnog eksponencijalnog izravnanja sa aditivnom sezonom (model JEI-A u Tabeli 3.1) i model jednostavnog eksponencijalnog izravnanja sa multiplikativnom sezonom (model JEI-M u Tabeli 3.1).

Kod modela jednostavnog eksponencijalnog izravnanja sa sezonskom komponentom ostaju relevantna ranije izložena razmatranja izbora konstanti izravnanja. Isto važi i za izbor početne vrednosti nivoa. Što se sezonske komponente tiče, u slučaju aditivnog modela za početne vrednosti se mogu koristiti ocene regresionog modela u kome će se serija regresirati na sezonske veštačke promenljive. Drugim metodama ocene početnih vrednosti sezonske komponente pozabavićemo se u okviru izlaganja Holt-Wintersovog metoda izravnanja.

### 3.3 BROWNOV METOD IZRAVNANJA

Jednostavno eksponencijalno izravnanje relevantno je samo ako se vremenska serija koju izravnavamo ili želimo za nju formirati prognozu, može predstaviti modelom vremenske serije (3.1), odnosno ako je u pitanju konstantni proces sa slučajnim

fluktuacijama. Ukoliko je vremenska serija sa trendom, tada je za seriju primereniji model linearnog trenda:

$$X_t = \mu + T_t + \varepsilon_t, \quad (3.15)$$

Primenom jednostavnog eksponencijalnog izravnjanja za prognoziranje ovakve serije dobićemo negativno pristrasne prognoze. Može se pokazati da je u asimptotskom slučaju pristrasnost jednaka  $-T(1-\alpha)/\alpha$  tako što ćemo odrediti očekivanu vrednost izraza (3.4), označavajući pri tome  $\beta = 1 - \alpha$ . Zaista dobijamo

$$E(\mu_n) = \alpha \sum_{j=0}^{n-1} \beta^j E(X_{n-j}) + \beta^n \mu_0 = \alpha \sum_{j=0}^{n-1} \beta^j [\mu + T(n-j)] + \beta^n \mu_0. \quad (3.16)$$

Ako  $n \rightarrow \infty$ , tada  $\beta^n = 0$ , pa dobijamo:

$$E(\mu_n) = (\mu + Tn) \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j - T \alpha \sum_{j=0}^{\infty} j \beta^j = \mu + Tn - \frac{\beta}{\alpha} T \quad (3.17)$$

Kako je  $E(X_n) = \mu + Tn$ , imamo:

$$E(\mu_n) = E(X_n) - \frac{\beta}{\alpha} T \quad (3.18)$$

Znači da primena jednostavnog eksponencijalnog izravnjanja na seriju sa linearnim trendom dovodi do toga da izravnata statistika  $\mu_t$  kasni iza pravog signala za navedeni iznos pristrasnosti. Jedan od pristupa koji eliminiše spomenutu pristrasnost svodi se na ponovnu primenu postupka eksponencijalnog izravnjanja na izlazni rezultat jednostavnog eksponencijalnog izravnjanja. Taj postupak nazivamo *dvostruko eksponencijalno izravnjanje* (engl. *double exponential smoothing*), odnosno eksponencijalno izravnjanje drugog reda. Prema autoru ovaj postupak naziva se i Brownov postupak izravnjanja.

Za nesezonski model u Tabeli 3.4 navedene su dva alternativna načina iskazivanja Brownovog metoda izravnjanja u rekurzivnom obliku (modeli B1 i B2). Na osnovu druge varijante (model B2) postaje jasno zašto se ovaj postupak označava kao dvostruko eksponencijalno izravnjanje. Naime, u prvom stepenu primenjujemo formulu jednostavnog izravnjanja na opservacije vremenske serije. Zatim sa serijom  $\mu_t$  ponavljamo postupak jednostavnog eksponencijalnog izravnjanja (izravnavamo izravnatu statistiku), što rezultira u izrazu za dvostruko izravnatu statistiku  $\mu_t'' = \alpha \mu_t + (1 - \alpha) \mu_{t-1}''$ . Za ovakav način prezentiranja formula Brownove metode ima pedagoških razloga, mada su modeli u obliku korekcije greškom lakši za korišćenje, a ekvivalentni su modelima u rekurzivnom obliku.

Kod prve varijante rekurzivnog izražavanja Brownovog modela, sugeriše se direktno ažuriranje trenda serije jednačinom  $T_t = \alpha(\mu_t - \mu_{t-1}) + (1 - \alpha)T_{t-1}$ . Prema njoj se tekuća

vrednost trenda određuje na osnovu ponderisane sredine prethodne vrednosti trenda i nove informacije o trendu sadržane u razlici tekuće i prošle vrednosti nivoa serije.

Korišćenje iste konstante izravnjanja za reviziju nivoa i trenda serije ističemo kao jednu od bitnih odlika i istovremeno manu Brownovog metoda. Za razliku od Brownove metode, Holt-Wintersov metod napušta ovu restriktivnu pretpostavku. Kod ove druge metode ostavlja se mogućnost da konstante izravnjanja kod nivoa i trenda serije budu jednake, ali se to ograničenje ne nameće *a priori* kao što je to slučaj kod Brownove metode.

Tabela 3.4 Brownovi modeli

Vrsta sezone i model	Rekurzivni oblik modela	Model u obliku korekcije greškom
Nesezonska serija B1	$\mu_t = \alpha X_t + (1-\alpha)\mu_{t-1}$ $T_t = \alpha(\mu_t - \mu_{t-1}) + (1-\alpha)T_{t-1}$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)T_t + hT_t$	$\mu_t = \mu_{t-1} + \alpha e_t$ $T_t = T_{t-1} + \alpha^2 e_t$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)T_t + hT_t$
Nesezonska serija (ekvivalentno modelu B1) B2	$\mu_t = \alpha X_t + (1-\alpha)\mu_{t-1}$ $\mu_t'' = \alpha\mu_t + (1-\alpha)\mu_{t-1}''$ $\hat{X}_t(h) = 2\mu_t - \mu_t'' + h\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)(\mu_t - \mu_t'')$	$\mu_t = \mu_{t-1} + T_{t-1} + \alpha(2-\alpha)e_t$ $T_t = T_{t-1} + \alpha^2 e_t$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t + hT_t$
Aditivna sezona B-A	Nije primenljivo	$\mu_t = \mu_{t-1} + T_{t-1} + \alpha(2-\alpha)e_t$ $T_t = T_{t-1} + \alpha^2 e_t$ $I_t = I_{t-s} + \delta[1-\alpha(2-\alpha)]e_t$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t + hT_t + I_{t-s+h}$
Multiplikativna sezona B-M	Nije primenljivo	$\mu_t = \mu_{t-1} + T_{t-1} + \alpha(2-\alpha)e_t / I_{t-s}$ $T_t = T_{t-1} + \alpha^2 e_t / I_{t-s}$ $I_t = I_{t-s} + \delta[1-\alpha(2-\alpha)]e_t / \mu_t$ $\hat{X}_t(h) = (\mu_t + hT_t)I_{t-s+h}$

Brownov metod je proistekao iz korišćenja metoda ponderisanih najmanjih kvadrata (ponder je  $\omega = 1 - \alpha$ ) i predstavlja optimalan metod izravnjanja za procese sa linearnim trendom. Kasnije, u Poglavlju 8.5 ukazaćemo na vezu pojedinih modela u okviru klase ARIMA modela i Brownovog modela i sugerisati za koje modele iz prve klase je ovaj metod izravnjanja optimalan.

Što se tiče izbora konstante izravnjanja kod Brownove metode, postoji saglasnost da se za konstantu izravnjanja uzme vrednost 0.2 ili manje. I pored kritika upućenih ovakom arbitrarnom izboru konstante pokazalo se, posebno prilikom primene modela u

kontroli zaliha, da vrednosti konstante iz ovog intervala daju dobre rezultate. Sa teorijskog aspekta Brownov model je za nesezonske serije, kao i u slučaju jednostavnog eksponencijalnog izravnjanja, stabilan za vrednosti konstante iz intervala  $0 < \alpha < 2$ . Model je karakterističan i po tome što u kritičnoj meri prigušuje oscilacije. Naime, na osnovu njega dobija se najbrže mogući odziv na strukturne promene u vremenskoj seriji i to bez oscilacija. Pitanje je relevantnosti ove osobine sa stanovišta preciznosti prognoze.

Pristupi određivanju početnih vrednosti za primenu Brownove metode iste su kao kod jednostavnog eksponencijalnog izravnjanja, osim što ovde moramo odrediti i početnu vrednost za ocenu trenda. Sugerise se korišćenje metode najmanjih kvadrata radi ocene početnog nivoa i trenda serije. Zato je potrebno oceniti koeficijente linearnog trenda, pri tom je slobodni član ocena nivoa, a koeficijent uz vreme ocena početne vrednosti trenda. Prema jednom pristupu vrednost ovih ocena određujemo za kraj perioda, a prema drugom, za početak perioda u kome smo računali linearni trend. Razlika između ova dva pristupa ogleda se samo u izmeni ocene slobodnog člana, a koeficijent nagiba trenda ostaje isti. U prvom slučaju nastavljamo postupak izravnjanja prema izrazima kojima se rekurzivno određuje nova ocena nivoa i trenda serije, odnosno vršimo izravnjanje vremenske serije u njenom drugom delu. U drugom slučaju formiramo ocene nivoa i trenda za period u kome smo ocenili linearni trend, pa dobijene vrednosti na kraju tog perioda koristimo kao početne vrednosti u drugom delu serije za njeno izravnjanje.

Navedeni postupak eksponencijalnog izravnjanja može se generalizovati u tom smislu da se umesto linearnog trenda pretpostavi polinomijalni trend  $k$ -tog stepena. Tu generalizaciju je uradio Brown i poznata je pod nazivom *višestruko eksponencijalno izravnjanje* (engl. *multiple exponential smoothing*). U tom postupku generalizacije prelazi se sličan put koji smo prešli od jednostavnog ka dvostrukom eksponencijalnom izravnjanju. Na primer, ukoliko vremenskoj seriji odgovara model kvadratnog trenda, koristimo trostruko eksponencijalno izravnjanje prema kome se u trećem stepenu izravnava dvostruko izravnata statistika  $\mu_t''$  dobijena kao rezultat primene dvostrukog eksponencijalnog izravnjanja (rekurzivni oblik modela B2 u Tabeli 3.4). Potpuno izvođenje dato je kod Montgomeryja i Johnsona (1976, ss. 62-66).

Za sezonske vremenske serije sa linearnim trendom nije definisan postupak Brownovog izravnjanja u rekurzivnom obliku (videti Tabelu 3.4). Zato bismo u slučaju sezonskih vremenskih serija prethodno izvršili desezoniranje vremenske serije, a potom primenili gore izloženi postupak Brownove metode (modele B1 ili B2). Međutim, Brownov model u obliku korekcije greškom je definisan i za sezonske vremenske serije (model sa aditivnom sezonom: model B-A i model sa multiplikativnom sezonom: model B-M). U ovim modelima pored konstante izravnjanja  $\alpha$  uvedena je i konstanta izravnjanja  $\delta$  u jednačinu koja definiše postupak izravnjanja tekuće vrednosti sezonske komponente.

### 3.4 HOLT-WINTERSOV METOD IZRAVNANJA

Za razliku od Brownovog, kod Holt-Wintersovog metoda izravnjanja inoviranje nivoa i trenda serije zasniva se na dve konstante izravnjanja. U Tabeli 3.5 dati su različiti Holt-Wintersovi modeli. Poređenjem Brownovog i Holt-Wintersovog metoda za nesezonske serije može se pokazati da je Holt-Wintersov metod ekvivalentan Brownovom metodu za određene vrednosti konstanti izravnjanja ( $\alpha_{HW} = \alpha_B(1 - \alpha_B)$  i  $\gamma_{HW} = \alpha_B / (2 - \alpha_B)$ ).

Tabela 3.5 Holt-Wintersovi modeli

Vrsta sezone i model	Rekurzivni oblik modela	Model u obliku korekcije greškom
Nesezonska serija HW	$\mu_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)(\mu_{t-1} + T_{t-1})$ $T_t = \gamma(\mu_t - \mu_{t-1}) + (1 - \gamma)T_{t-1}$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t + hT_t$	$\mu_t = \mu_{t-1} + T_{t-1} + \alpha e_t$ $T_t = T_{t-1} + \alpha \gamma e_t$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t + hT_t$
Aditivna sezona HW-A	$\mu_t = \alpha(X_t - I_{t-s}) + (1 - \alpha)(\mu_{t-1} + T_{t-1})$ $T_t = \gamma(\mu_t - \mu_{t-1}) + (1 - \gamma)T_{t-1}$ $I_t = \delta(X_t - \mu_t) + (1 - \delta)I_{t-s}$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t + hT_t + I_{t-s+h}$	$\mu_t = \mu_{t-1} + T_{t-1} + \alpha e_t$ $T_t = T_{t-1} + \alpha \gamma e_t$ $I_t = I_{t-s} + \delta(1 - \alpha)e_t$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t + hT_t + I_{t-s+h}$
Multiplikativna sezona HW-M	$\mu_t = \alpha(X_t / I_{t-s}) + (1 - \alpha)(\mu_{t-1} + T_{t-1})$ $T_t = \gamma(\mu_t - \mu_{t-1}) + (1 - \gamma)T_{t-1}$ $I_t = \delta(X_t / \mu_t) + (1 - \delta)I_{t-s}$ $\hat{X}_t(h) = (\mu_t + hT_t)I_{t-s+h}$	$\mu_t = \mu_{t-1} + T_{t-1} + \alpha e_t / I_{t-s}$ $T_t = T_{t-1} + \alpha \gamma e_t / I_{t-s}$ $I_t = I_{t-s} + \delta(1 - \alpha)e_t / \mu_t$ $\hat{X}_t(h) = (\mu_t + hT_t)I_{t-s+h}$

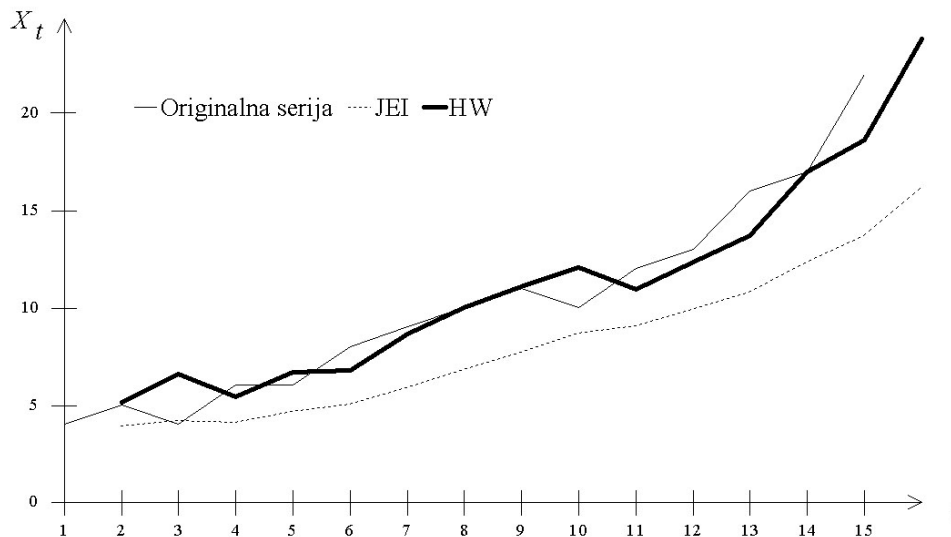
**Primer 3.2** U Tabeli 3.6 data je vremenska serija mesečne prodaje (u hiljadama dinara) jednog preduzeća u petnaest uzastopnih meseci. Analitičari prodaje u preduzeću pretpostavljaju da će se uočena tendencija porasta prodaje nastaviti i u narednom periodu.

Tabela 3.6 Mesečna prodaja preduzeća (u hiljadama dinara)

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$X_t$	4	5	4	6	6	8	9	10	11	10	12	13	16	17	22

- a) Grafički prikazati datu vremensku seriju i sugerisati odgovarajuće metode izravnjanja.

- b) Primeniti jednostavno eksponencijalno izravnanje sa konstantom izravnanja jednakom 0.3, uz korišćenje prve vrednosti opservacije kao inicijalne ocene nivoa. Formirati prognozu jedan period unapred. Objasniti dobijeni rezultat.
- c) Za primenu odgovarajućeg Brownovog i Holt-Wintersovog metoda izravnanja izabrati optimalnu vrednost koeficijenata izravnanja, pri čemu koristiti kriterijum srednje kvadratne greške prognoze kao kriterijum optimalnosti. U primeni oba metoda koristiti koeficijente ocenjenog linearnog trenda kao početne ocene nivoa i trenda.
- a) Grafik originalne vremenske serije prodaje na Slici 3.4 ukazuje nam na prisustvo trenda u vremenskoj seriji. Stoga se sugerise izbor metode izravnanja koji pretpostavlja prisustvo linearnog trenda u seriji. Modeli primereni toj pretpostavci su B1 i HW.



**Slika 3.4** Poređenje prognoza (JEI i HW model)

- b) Prognozu vremenske serije dobijenu metodom jednostavnog eksponencijalnog izravnanja prikazali smo kako u Tabeli 3.7 (3. kolona), tako i na Slici 3.4. Ova prognoza predstavlja samo ilustraciju opšteg rezultata, prema kome prognoza metoda jednostavnog eksponencijalnog izravnanja stalno kasni za ostvarenim vrednostima vremenske serije. Dakle, rezultat je bio očekivan jer smo zanemarili prisustvo trenda u vremenskoj seriji i primenili neodgovarajući metod izravnanja.

Tabela 3.7 Prognoza prodaje preduzeća metodama izravnjanja

Vremenski period	Originalna serija	JEI prognoza	Brown prognoza	Holt Wintersov metod			
				Nivo	Trend	Izravnjanje	Prognoza
1	4	-	-	3.54	1.64	5.18	-
2	5	4.00	5.12	5.05	1.58	6.63	5.18
3	4	4.30	6.23	4.77	0.68	5.45	6.63
4	6	4.21	5.15	5.84	0.86	6.70	5.45
5	6	4.75	6.64	6.21	0.62	6.83	6.70
6	8	5.12	6.83	7.66	1.02	8.68	6.83
7	9	5.99	8.70	8.91	1.13	10.04	8.68
8	10	6.89	9.99	10.01	1.12	11.13	10.04
9	11	7.82	11.06	11.04	1.07	12.11	11.13
10	10	8.78	12.06	10.62	0.35	10.97	12.11
11	12	9.14	11.00	11.70	0.70	12.40	10.97
12	13	10.00	12.53	12.82	0.91	13.73	12.40
13	16	10.90	13.78	15.33	1.68	17.02	13.73
14	17	12.43	16.94	17.01	1.68	18.68	17.02
15	22	13.80	18.47	21.03	2.81	23.84	18.68
16	-	16.26	23.57	-	-	-	23.84

c) Na osnovu 15 opservacija vremenske serije ocena linearnog trenda je

$$\hat{X}_t = 1.3429 + 1.107t.$$

Prema tome početna ocena nivoa iznosi 1.3429, a početna ocena trenda je 1.1071. Na osnovu njih, ocene nivoa i trenda u prvom vremenskom periodu korišćenjem Brownovog modela izravnjanja (model B1) su:

$$\mu_1 = \alpha X_1 + (1 - \alpha)\mu_0 = 0.5114 \cdot 4 + (1 - 0.5114)1.3429 = 2.70$$

$$T_1 = \alpha(\mu_1 - \mu_0) + (1 - \alpha)T_0 = 0.5114(2.70 - 1.3429) + (1 - 0.5114)1.1071 = 1.23$$

Napominjemo da smo za konstantu izravnjanja koristili vrednost 0.5114. Njome se postiže minimalna vrednost srednje kvadratne greške prognoze koja iznosi 2.1733. Na osnovu ocene nivoa i trenda u prvom vremenskom periodu možemo formirati prognozu za jedan period unapred:

$$\hat{X}_1(1) = \mu_1 + \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha}\right)T_1 + T_1 = 2.70 + \left(\frac{1 - 0.5114}{0.5114}\right)1.23 + 1.23 = 5.12.$$

Ostale vrednosti prognoze Brownovim metodom date su u četvrtoj koloni Tabele 3.7. Kako se te vrednosti neznatno razlikuju od odgovarajućih



prognoza dobijenih Holt-Wintersovom metodom to smo samo ovu poslednju prognozu prikazali na Slici 3.4.

Što se Holt-Wintersove metode tiče (model HW), ocene nivoa i trenda u prvom vremenskom periodu su:

$$\mu_1 = \alpha X_1 + (1 - \alpha)(\mu_0 + T_0) = 0.7062 \cdot 4 + (1 - 0.7062)(1.3429 + 1.1071) = 3.54$$

$$T_1 = \gamma(\mu_1 - \mu_0) + (1 - \gamma)T_0 = 0.4844(3.54 - 1.3429) + (1 - 0.4844)1.1071 = 1.64$$

Napominjemo da smo za konstantu izravnanja  $\alpha$  koristili vrednost 0.7062, a za konstantu izravnanja  $\gamma$  vrednost 0.4844. Za te vrednosti se postiže minimalna vrednost srednje kvadratne greške prognoze koja iznosi 2.2325. Na osnovu ocene nivoa i trenda u prvom vremenskom periodu možemo formirati prognozu za jedan period unapred:

$$\hat{X}_1(1) = \mu_1 + T_1 = 3.54 + 1.64 = 5.18.$$

Ostale vrednosti prognoze Holt-Wintersovom metodom date su u poslednjoj koloni Tabele 3.7 i na Slici 3.4.

Poređenjem srednje kvadratne greške prognoze Brownovog i Holt-Wintersovog metoda izravnanja konstatujemo da se prvim metodom postiže manja greška prognoze. Istovremeno niža greška prognoze postignuta je korišćenjem modela sa jednom konstantom izravnanja (model B1) u odnosu na model sa dve konstante izravnanja (model HW). ■

Postavlja se pitanje, da li je Holt-Wintersov u odnosu na Brownov model, zbog opštosti pouzdaniji pri formiranju prognoza. Mada odgovor zavisi od procesa koji je generisao vremensku seriju, pokazano je da u većini slučajeva Holt-Wintersov model ima širu marginu pouzdanosti u odnosu na Brownov. Ovo je razumljivo ako se uzme u obzir njegova veća fleksibilnost s obzirom na to da je u pitanju dvoparametarski model. Na primer, pri ocenjivanju konstante izravnanja, u modelu bez trenda, primenom Holt-Wintersovog modela dobićemo konstantu za trend koja je bliska nuli, dok će Brownov model uvek utvrđivati postojanje nekog trenda u ma kojoj seriji, zato što koristi jednu istu konstantu izravnanja i za nivo i za trend.

Proširenje Holt-Wintersovog modela u pravcu direktnog modeliranja sezone navedeno je u poslednja dva reda u Tabeli 3.5. Reč je o modelu sa aditivnom sezonom: model HW-A i modelu sa multiplikativnom sezonom: model HW-M. U ovim modelima uvodi se dodatna konstanta izravnanja  $\delta$  u treću jednačinu kojom modifikujemo sezonsku komponentu.

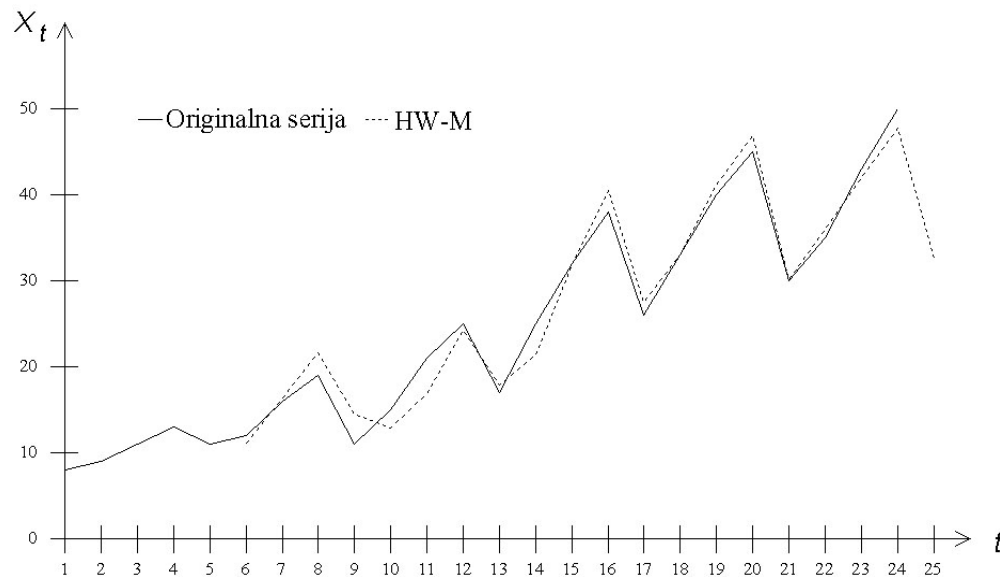
**Primer 3.3** Kvartalna vremenska serija prodaje sezonske robe u jednoj prodavnici tokom perioda 1988-1993. godine prikazana je u Tabeli 3.8.

Tabela 3.8 Prodaja sezonske robe

Godina	K v a r t a l			
	prvi	drugi	treći	četvrti
1988	8	9	11	13
1989	11	12	16	19
1990	11	15	21	25
1991	17	25	32	38
1992	26	33	40	45
1993	30	35	43	50

- a) Grafički prikazati vremensku seriju. Ukazati na njene osnovne odlike i izabrati odgovarajući model izravnanja.
- b) Primeniti izabrane modele izravnanja na vremensku seriju prodaje i formirati prognozu jedan period unapred.

- a) Na osnovu grafika vremenske serije uočavamo da vremensku seriju karakteriše uzlazni linearni trend i relativno stabilna sezona, a da se varijabilitet vremenske serije tokom vremena povećava. Prema tome, za vremensku seriju predlažemo dva modela: Holt-Wintersov (model HW-M) i Brownov (model B-M).



Slika 3.5 Prognoza prodaje sezonske robe

- b) Na vremensku seriju primenićemo model HW-M, a čitaocu se ostavlja da izravnanje vremenske serije izvrši i modelom B-M.

Kako je u pitanju kvartalna vremenska serija, to ćemo prvu godinu, odnosno prve četiri opservacije iskoristiti za formiranje početne ocene sezonske komponente. Postupamo tako što odredimo prosečnu vrednost prodaje u prvoj godini 10.25 i dobijenom sredinom podelimo vrednost prodaje u svakom kvartalu prve godine. Tako dobijamo da je u 1988/I vrednost sezonskog indeksa  $I_1 = 8/10.25 = 0.78$ , u 1988/II  $I_2 = 9/10.25 = 0.88$ , u 1988/III  $I_3 = 11/10.25 = 1.07$  i u 1988/IV  $I_4 = 13/10.25 = 1.27$ . Za ocenu početne vrednosti nivoa u 5. periodu 1989/I uzećemo vrednost prodaje u tom kvartalu, tj.  $\mu_5 = 11$ . Do ocene početne vrednosti trenda doći ćemo na osnovu ocene linearnog trenda u periodu od 1988/I do 1993/IV. Kako je ocenjeni linearni trenda na osnovu 24 opservacije

$$\hat{X}_t = 3.5761 + 1.6639t,$$

to za ocenu početne vrednosti trenda u 5. periodu uzimamo koeficijent uz vreme, tj.  $T_5 = 1.6639$ . Sada nam samo preostaje da odredimo ocenu sezonske komponente u 5. periodu, pa da počevši od 6. perioda započnemo postupak rekurzivnog izračunavanja nivoa, trenda i sezone. Početna ocena sezonske komponente u 5. periodu je

$$I_5 = \delta \frac{X_5}{\mu_5} + (1 - \delta)I_1 = 0.3 \frac{11}{11} + (1 - 0.3)0.78 = 0.82.$$

U 6. periodu imamo nove ocene nivoa, trenda i sezone:

$$\mu_6 = \alpha \frac{X_6}{I_2} + (1 - \alpha)(\mu_5 + T_5) = 0.453 \frac{12}{0.88} + (1 - 0.453)(11 + 1.6639) = 13.12,$$

$$T_6 = \gamma(\mu_6 - \mu_5) + (1 - \gamma)T_5 = 1(13.12 - 11) + (1 - 1)1.6639 = 2.12,$$

$$I_6 = \delta \frac{X_6}{\mu_6} + (1 - \delta)I_2 = 0.3 \frac{12}{13.12} + (1 - 0.3)0.88 = 0.89.$$

Na osnovu ovih ocena u 6. periodu formiramo prognozu za jedan period unapred:

$$\hat{X}_6(1) = (\mu_6 + T_6)I_3 = (13.12 + 2.12)1.07 = 11.12.$$

Ostale vrednosti ocene nivoa, trenda i sezone kao i prognoze date su u Tabeli 3.9. Na Slici 3.5 prikazana je originalna vremenska serija i njena prognoza.

Tabela 3.9 Prognoza prodaje sezonske robe

Godina i kvartal	Vremenski period	Originalna serija	Holt-Wintersov metod (model HW-M)			
			Nivo	Sezona	Trend	Prognoza
1988.I	1	8	-	0.78	-	-
II	2	9	-	0.88	-	-
III	3	11	-	1.07	-	-
IV	4	13	-	1.27	-	-
1989.I	5	11	11.00	0.85	1.66	-
II	6	12	13.12	0.89	2.12	11.12
III	7	16	15.09	1.07	1.97	16.35
IV	8	19	16.12	1.24	1.03	21.63
1990.I	9	11	15.27	0.81	-0.85	14.51
II	10	15	15.53	0.91	0.26	12.82
III	11	21	17.53	1.11	2.00	16.89
IV	12	25	19.81	1.25	2.28	24.26
1991.I	13	17	21.60	0.80	1.80	17.86
II	14	25	25.22	0.94	3.61	21.34
III	15	32	28.85	1.11	0.00	31.94
IV	16	38	31.57	1.23	2.72	40.54
1992.I	17	26	33.44	0.79	1.87	27.50
II	18	33	35.29	0.94	1.85	33.05
III	19	40	36.66	1.10	1.38	41.15
IV	20	45	37.32	1.23	0.66	46.96
1993.I	21	30	37.87	0.79	0.55	30.18
II	22	35	37.97	0.93	0.09	35.96
III	23	43	38.48	1.11	0.51	41.98
IV	24	50	39.80	1.23	1.33	47.79
1994.I	25	-	-	-	-	32.65

U formiranju ocena na osnovu tri jednačine izravnjanja koristili smo sledeće vrednosti konstanti izravnjanja:  $\alpha = 0.453$ ,  $\gamma = 1$  i  $\delta = 0.3$ . Uz te vrednosti konstanti izravnjanja vrednost srednje kvadratne greške prognoze je 4.065. Optimalnu vrednost konstanti izravnjanja odredili smo kao i u slučaju jednostavnog eksponencijalnog izravnjanja. Naime, pretraživanjem prostora svih mogućih vrednosti konstanti  $\alpha$ ,  $\gamma$  i  $\delta$  izabrali smo onu trojku ovih konstanti koja minimizira srednje kvadratnu grešku prognoze. ■

Oba modela, Brownov i Holt-Wintersov, pokazala su se na kratak rok dosta robustna, dok su u slučaju dužeg horizonta prognoziranja (za više od tri-četiri koraka unapred) pokazivala tendenciju da prognozom precene realizovane vrednosti vremenske serije. Zato se preporučuje da se pri prognoziranju za duži vremenski horizont linearni trend priguši. Obrnuto, na primer u početnoj fazi životnog ciklusa nekog proizvoda (za čiju proizvodnju ili prodaju formiramo prognozu), preporučuje se korišćenje trenda koji vremenom ubrzava rast, odnosno sugerise se modeliranje eksponencijalnim trendom. Ova dva slučaja u kojima se korišćenje Brownovog i Holt-Wintersovog modela sa linearnim trendom pokazalo neadekvatnim, vodili su ka modifikaciji početnog modela u dva pravca.

Prvi, gde se pretpostavka o linearnom zamenjuje pretpostavkom o eksponencijalnom trendu (modeli iz Tabele 3.10) i drugi, gde se uvodi pretpostavka o prigušenom trendu (modeli dati u Tabeli 3.11). Suština modifikacije u prvom slučaju je da se u jednačini nivoa i trenda obe komponente javljaju ne u aditivnom (kao što je to u originalnom Holt- Wintersovom modelu) nego u multiplikativnom vidu. U drugom slučaju izmena se sastoji u tome da se uvodi posebna konstanta prigušenja ( $\phi$ ,  $0 < \phi < 1$ ) uz trend komponentu. Za vrednost konstante  $\phi=1$ , prvi model se svodi na Holt-Wintersov model za nesezonske serije. Za vrednosti konstante  $\phi > 1$  prognoze modela rastu eksponencijalno, kao i kod modela sa eksponencijalnim rastom iz Tabele 3.10, ali u ovom slučaju imamo jedan parametar više u odnosu na te modele.

Drugi model iz Tabele 3.11 za nesezonske serije predstavlja modifikaciju Brownovog modela (identičan je Brownovom modelu za vrednost konstante  $\phi=1$ ). Vrednosti konstante  $\phi < 1$ , proizvode usporeni rast i u apsolutnom i u relativnom smislu. Razlika između linearnog i prigušenog eksponencijalnog trenda može da bude značajna u dužem vremenskom periodu čak i uz visoku vrednost  $\phi$ , recimo 0.9 ili 0.95.

**Tabela 3.10** Modeli sa eksponencijalnim trendom (ET modeli)

Vrsta sezone i model	Rekurzivni oblik modela	Model u obliku korekcije greškom
Nesezonska serija ET	$\mu_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)(\mu_{t-1} + T_{t-1})$ $T_t = \gamma(\mu_t / \mu_{t-1}) + (1 - \gamma)T_{t-1}$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t T_t^h$	$\mu_t = \mu_{t-1} + T_{t-1} + \alpha e_t$ $T_t = T_{t-1} + \alpha \gamma e_t / \mu_{t-1}$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t T_t^h$
Aditivna sezona ET-A	$\mu_t = \alpha(X_t - I_{t-s}) + (1 - \alpha)\mu_{t-1} + T_{t-1}$ $T_t = \gamma(\mu_t / \mu_{t-1}) + (1 - \gamma)T_{t-1}$ $I_t = \delta(X_t - \mu_t) + (1 - \delta)I_{t-s}$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t T_t^h + I_{t-s+h}$	$\mu_t = \mu_{t-1} + T_{t-1} + \alpha(2 - \alpha)e_t$ $T_t = T_{t-1} + \alpha^2 e_t$ $I_t = I_{t-s} + \delta[1 - \alpha(2 - \alpha)]e_t$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t + hT_t + I_{t-s+h}$
Multiplikativna sezona ET-M	$\mu_t = \alpha(X_t / I_{t-s}) + (1 - \alpha)\mu_{t-1} + T_{t-1}$ $T_t = \gamma(\mu_t / \mu_{t-1}) + (1 - \gamma)T_{t-1}$ $I_t = \delta(X_t / \mu_t) + (1 - \delta)I_{t-s}$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t T_t^h I_{t-s+h}$	$\mu_t = \mu_{t-1} + T_{t-1} + \alpha e_t / I_{t-s}$ $T_t = T_{t-1} + (\alpha \gamma e_t / \mu_{t-1}) / I_{t-s}$ $I_t = I_{t-s} + \delta(1 - \alpha)e_t / \mu_t$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t T_t^h I_{t-s+h}$

Sugestije u pogledu izbora konstanti izravnjanja kod Holt-Wintersovog modela iste su kao i u prethodnim modelima. U slučaju apriornog izbora sugerišu se vrednosti od 0.01 do 0.3 za sve tri komponente (nivo, trend i sezonu). Druge primene su pokazale da je korišćenje vrednosti iz intervala od 0.3 do 1.0 davalo veći stepen pouzdanosti prognoza. Međutim, kao što je na to ranije upozoreno, ovakav način određivanja konstanti izravnjanja ne vodi računa o specifičnostima vremenske serije koja se

izravnava. Stoga se preporučuje ocenjivanje sve tri konstante na osnovu vremenske serije, korišćenjem jednog od statističkih kriterijuma, kao što je na primer srednje kvadratna greška prognoze. Inače, teorija sugerise da se i vrednosti preko 1.0 mogu javiti kao optimalne. Ovo stoga što je nesezonski Holt-Wintersov model stabilan za vrednosti konstanti:  $0 < \alpha < 2$  i  $0 < \gamma < (4 - 2\alpha)/\alpha$ . Izbor vrednosti konstanti izravnanja može se suziti na oblast u kome konstante izravnanja ne proizvode oscilacije vremenske serije. Najveća vrednost  $\alpha$  koja ne vodi ka oscilatornom kretanju data je nejednakošću:  $\alpha < 4\gamma/(1 + \gamma)^2$ . Nije utvrđeno da li ovakvo ograničenje konstante povećava preciznost prognoze. Za sezonske modele uslovi za stabilna rešenja su kompleksni (za kvartalne serije model je uvek stabilan za vrednosti konstanti iz intervala od 0 do 1, što ne važi za mesečne vremenske serije).

Tabela 3.11 Modeli izravnanja sa prigušenim trendom (PT modeli)

Vrsta sezone i model	Rekurzivni oblik modela	Model u obliku korekcije greškom
Nesezonska serija HW-PT	$\mu_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)(\mu_{t-1} + \phi\mu_{t-1})$ $T_t = \gamma(\mu_t - \mu_{t-1}) + (1 - \gamma)\phi T_{t-1}$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t + \sum_{i=1}^h \phi^i T_i$	$\mu_t = \mu_{t-1} + \phi T_{t-1} + \alpha e_t$ $T_t = \phi T_{t-1} + \alpha \gamma e_t$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t + \sum_{i=1}^h \phi^i T_i$
Nesezonska serija B2-PT	Nije primenljivo	$\mu_t = \mu_{t-1} + \phi T_{t-1} + \alpha(2 - \alpha)e_t$ $T_t = \phi T_{t-1} + \alpha(\alpha - \phi + 1)e_t$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t + \sum_{i=1}^h \phi^i T_i$
Aktivna sezona B2-PT-A	Nije primenljivo	$\mu_t = \mu_{t-1} + \phi T_{t-1} + \alpha(2 - \alpha)e_t$ $T_t = \phi T_{t-1} + \alpha(\alpha - \phi + 1)e_t$ $I_t = I_{t-s} + \delta[1 - \alpha(2 - \alpha)]e_t$ $\hat{X}_t(h) = \mu_t + \sum_{i=1}^h \phi^i T_i + I_{t-s+h}$
Multiplikativna sezona B2-PT-M	Nije primenljivo	$\mu_t = \mu_{t-1} + \phi T_{t-1} + \alpha(2 - \alpha)e_t / I_{t-s}$ $T_t = \phi T_{t-1} + \alpha(\alpha - \phi + 1)e_t / I_{t-s}$ $I_t = I_{t-s} + \delta[1 - \alpha(2 - \alpha)]e_t / \mu_t$ $\hat{X}_t(h) = \left( \mu_t + \sum_{i=1}^h \phi^i T_i \right) I_{t-s+h}$

Početne vrednosti nivoa i trenda možemo odrediti na osnovu ranije izloženih metoda (videti rešenje ovog problema kod jednostavnog eksponencijalnog izravnanja i Brownovog metoda). Upozoravamo na to da se metoda prognoziranja unazad koristi oprezno, jer u slučaju pogrešnog trenda može proizvesti negativne vrednosti za početnu

vrednost nivoa. Za metode određivanja početnih vrednosti sezonske komponente videti kod Montgomeryja i Johnsona (1976, ss. 102-3).

### 3.5 OPŠTE EKSPONENCIJALNO IZRAVNANJE

Pored navedene generalizacije eksponencijalnog izravnjanja vremenske serije kod koje se trend može predstaviti polinomom proizvoljnog stepena, Brown (1963) je pokazao da se koncept eksponencijalnog izravnjanja može proširiti na model *adaptivnog, direktnog* ili *opšteg eksponencijalnog izravnjanja* (engl. *general exponential smoothing* - GES). Pod ovim pojmom podrazumeva se korišćenje ponderisanih najmanjih kvadrata u cilju prilagodavanja neke funkcije vremena raspoloživim podacima. Na raspolaganju su nam polinomi, eksponencijalne i sinusne funkcije kao i njihov zbir i proizvod. Kada su nezavisne promenljive polinomijalne funkcije vremena direktno izravnjanje je ekvivalentno višestrukom eksponencijalnom izravnjanju. Ako se u modelu koriste trigonometrijske funkcije vremena, kao nezavisne promenljive, tada takav model može efikasno reprezentovati sezonske vremenske serije.

GES model se definiše kao višestruki regresioni model, odn. pretpostavljamo da je posmatrana vremenska serija linearna kombinacija od  $k$  poznatih determinističkih funkcija vremena plus rezidual. Jednačina prognoze je

$$\hat{X}_t(h) = \sum_{j=1}^k a_j(t) f_j(h) = \mathbf{a}'_t \mathbf{f}(h). \quad (3.19)$$

gde su  $\mathbf{a}$ , vektor čije su koordinate koeficijenti u trenutku  $t$  i  $\mathbf{f}(h)$  vektor čije su koordinate funkcije vremena (koje mogu biti polinomijalne, eksponencijalne i sinusne). Ocenjivanje je zasnovano na metodu uopštenih, odnosno ponderisanih najmanjih kvadrata i može se detaljnije pogledati kod Browna (1963) ili Montgomeryja i Johnsona (1976, ss. 76-82), a ovde navodimo samo funkciju kriterijuma koja se minimizira:

$$\sum_{j=0}^t \omega^j \left[ X_{t-j} - \mathbf{a}'_t \mathbf{f}(-j) \right]^2. \quad (3.20)$$

Rešenje zahteva da izravnavamo (uz ponder  $\omega$ ) koeficijente modela, za razliku od Holt-Wintersovog pristupa gde smo izravnavali komponente vremenske serije. Zato se ovaj pristup i naziva direktno eksponencijalno izravnjanje. Rešenje modela dato u formi korekcije greškom je

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{L}' \mathbf{a}_{t-1} + \mathbf{h} e_t \quad (3.21)$$

gde je  $\mathbf{L}$  fiksna kvadratna matrica čiji elementi zavise samo od funkcija koje su korišćene za prilagodavanje, a koja ima osobinu da je  $\mathbf{f}_t = \mathbf{L} \mathbf{f}_{t-1}$ . Vektor izravnjanja  $\mathbf{h}$  definisan je kao  $\mathbf{h} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{f}(0)$  i zavisi kako od funkcija koje su korišćene za prilagodavanje tako i od pondera  $\omega$ . Elementi vektora  $\mathbf{f}(0)$  sadrže funkcije koje su

korišćene za prilagodavanje u početnom vremenskom trenutku. Naposljetku je  $e_t = X_t - \hat{X}_{t-1}(1)$  greška prognoze za jedan period unapred. Za veliko  $t$ ,  $\mathbf{F}$  je dato izrazom:

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{F} = \sum_{j=0}^{\infty} \omega^j \mathbf{f}(-j) \mathbf{f}'(-j). \quad (3.22)$$

Korišćenje formule za ocenu koeficijenata zahteva poznavanje vektora izravnjanja  $\mathbf{h}$ . Mada je u izvesnim slučajevima izveden eksplicitan izraz za  $\mathbf{h}$ , obično se on dobija numerički (videti kod Montgomeryja i Johnsona (1976)).

**Primer 3.4** Primeniti postupak direktnog izravnjanja na model linearnog trenda:

$$X_t = \mu + T_t + \varepsilon_t$$

i izvesti formule za reviziju ocene nivoa i trenda.

Jednačina prognoze je  $\hat{X}_t(h) = \mu_t + T_t h$ , pa u skladu sa oznakama kod opšteg eksponencijalnog izravnjanja imamo:

$$\mathbf{a}_t = \begin{bmatrix} \mu_t \\ T_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(h) = \begin{bmatrix} 1 \\ h \end{bmatrix}$$

Da bismo izveli formule za reviziju ocena potrebno je definisati matricu prelaza  $\mathbf{L}$ . Elemente matrice prelaza  $\mathbf{L}$  određujemo na osnovu relacije  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{L}\mathbf{f}(t-1)$ , tj.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} + L_{12}(t-1) \\ L_{21} - L_{22} + L_{22}t \end{bmatrix},$$

odakle je  $L_{11} = 1$ ,  $L_{12} = 0$ , a  $L_{21} = L_{22} = 1$ . Dakle, matrica prelaza je

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

pa rešenje modela u formi korekcije greškom glasi:

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{L}'\mathbf{a}_{t-1} + \mathbf{h}e_t$$

$$\begin{bmatrix} \mu_t \\ T_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{t-1} \\ T_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} e_t$$

odnosno



$$\mu_t = \mu_{t-1} + T_{t-1} + h_1 e_t$$

$$T_t = T_{t-1} + h_2 e_t$$

Da bismo odredili vektor izravnanja  $\mathbf{h}$  potrebno je definisati matricu  $\mathbf{F}_t$ , a zatim za veliko  $t$  odrediti matricu  $\mathbf{F}$ . Za veliko  $t$  imamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_t = \mathbf{F} &= \sum_{j=0}^{\infty} \omega^j \mathbf{f}(-j) \mathbf{f}'(-j) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega^j \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \omega^j \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & j^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

S obzirom da je ponder  $0 \leq \omega \leq 1$ , to je:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \omega^j = \frac{1}{1-\omega}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} j\omega^j = \frac{-\omega}{(1-\omega)^2} \quad \text{i} \quad \sum_{j=0}^{\infty} j^2 \omega^j = \frac{\omega(1+\omega)}{(1-\omega)^3}$$

pa su matrica  $\mathbf{F}$  i njena inverzna matrica  $\mathbf{F}^{-1}$ :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\omega} & \frac{-\omega}{(1-\omega)^2} \\ \frac{-\omega}{(1-\omega)^2} & \frac{\omega(1+\omega)}{(1-\omega)^3} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1-\omega^2 & (1-\omega)^2 \\ (1-\omega)^2 & \frac{(1-\omega)^3}{\omega} \end{bmatrix}.$$

Vektor izravnanja je

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{f}(0) = \begin{bmatrix} 1-\omega^2 & (1-\omega)^2 \\ (1-\omega)^2 & \frac{(1-\omega)^3}{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\omega^2 \\ (1-\omega)^2 \end{bmatrix},$$

pa je  $h_1 = 1 - \omega^2$ , a  $h_2 = (1 - \omega)^2$ . Ako označimo  $1 - \omega$  sa  $\alpha$ , tada formule za reviziju ocene nivoa i trenda glase:

$$\mu_t = \mu_{t-1} + T_{t-1} + \alpha(2 - \alpha)e_t$$

$$T_t = T_{t-1} + \alpha^2 e_t$$

Poređenjem ovih formula i Brownovog modela (model B2 u Tabeli 3.4 u obliku korekcije greškom) konstatujemo njihovu identičnost. Dakle, direktno izravnanje primenjeno na model vremenske serije sa linearnim trendom je ekvivalentno dvostrukom eksponencijalnom izravanju sa

konstantom izravnanja  $\alpha = 1 - \omega$ . U opštem slučaju direktno izravnanje modela vremenske serije sa polinomijalnim trendom  $k$ -tog stepena je ekvivalentno višestrukomeksponencijalnom izravnanju  $(k + 1)$ -og reda sa konstantom izravnanja jednakom  $\alpha = 1 - \omega$ . ■

Ako je vremenska serija nesezonska onda nema razloga za korišćenje GES modela, nego se preporučuje Holt-Wintersov metod izravnanja. Za sezonske vremenske serije sezonski članovi kod GES modela su koeficijenti uz kosinusne i sinusne funkcije, dok je kod Holt-Wintersa sezona obuhvaćena indeksima tipičnog nivoa u pojedinim periodima, na primer odnos proseka tražnje u prvim kvartalima u odnosu na prosek tražnje u celom posmatranom periodu. U multiplikativnoj varijanti GES model postaje izuzetno kompleksan, jer je potrebno svaki od sinusnih/kosinusnih članova množiti sa trendom. Stoga se obično u praksi koristi aditivna varijanta GES modela, za razliku od Holt-Wintersa gde je češće u upotrebi multiplikativna varijanta modela.

U poređenju sa Holt-Wintersom, GES model ima dve prednosti. Prva, korišćenjem jednog koeficijenta  $\omega$  u intervalu od 0 do 1 znači da će greška prognoze uvek imati konačnu varijansu. Druga, konstrukcija GES modela je takva da se svi sezonski članovi podvrgavaju reviziji čim nam bude dostupna nova opservacija. Time prognoza brže reaguje na promene u sezonskoj komponenti. Kod Holt-Wintersa, što se podataka tiče, moramo sačekati da se kompletira cela godina, pa da se izvrši ažuriranje sezonskih indeksa.

Iznesimo neke od prigovora koji su upućeni GES metodi izravnanja. Neki autori (Granger i Newbold (1977, s. 169)) navode da metod direktnog izravnanja daje greške koje su često autokorelisane, što rezultira u suboptimalnim prognozama. U slučaju sezonskih vremenskih serija teško je utvrditi koliko harmonika (trigonometrijskih članova na različitim frekvencijama) treba uključiti u model da bi se adekvatno obuhvatio uticaj sezone. Ozbiljan prigovor je vezan za korišćenje samo jedne konstante izravnanja  $\omega$ . Naime, ocena sezonskog modela vremenske serije zahteva sa jedne strane uključivanje većeg broja podataka, što se postiže uzimanjem visoke vrednosti za  $\omega$ , a sa druge strane postoji opšti zahtev eksponencijalnog izravnanja za brzim prilagodavanjem, što se postiže dodeljivanjem većih pondera svežijim podacima. Ova dva međusobno isključiva zahteva dovode *a priori* u sumnju sposobnost adaptivnog izravnanja da samo jednom konstantom  $\omega$  postigne dobro modeliranje sezonske vremenske serije.

Preporuke u pogledu izbora konstanti su sledeće. Za  $\omega$  se preporučuje da bude u intervalu 0.75 ("brzo" izravnanje za kratke vremenske serije) do 0.90 ("normalno" izravnanje). Pored ove konstante zahtevaju se komponente vektora  $\mathbf{h}$  koje ne moraju biti raspoložive eksplicitno. Početne vrednosti za inicijalizaciju GES modela mogu se dobiti prilagodavanjem višestrukog regresionog modela raspoloživim podacima metodom najmanjih kvadrata. Tu su moguća dva pristupa. Prema prvom, potrebno je početak računanja vremena locirati u period 1 i koristiti regresione koeficijente kao  $\mathbf{a}_0$ . Zatim

izravnavamo podatke sve dok se ne dostigne tekuća vrednost  $\mathbf{a}_t$ . Alternativa je da se početak računanja vremena locira u trenutak za koji je raspoloživ poslednji podatak u regresionom modelu. Koeficijenti zatim odgovaraju direktno  $\mathbf{a}_t$ . U okviru Poglavlja 8.3 posvećenog poređenju strukturnih modela vremenskih serija i ARIMA modela ukazaćemo i na ekvivalentne modele modelima iz klase GES modela.

### 3.6 JEDNOSTAVAN STRUKTURNI MODEL

U izlaganju strukturnih modela podimo od nesezonske vremenske serije čiji je model sa globalnim linearnim trendom:

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (3.23)$$

$$\mu_t = \alpha + \beta t. \quad (3.24)$$

*Ad hoc* modeli izravnjanja mogu se predstaviti sledećim statističkim modelom:

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t, \quad (3.25)$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (3.26)$$

gde je  $\eta_t \sim NNR(0, \sigma_\eta^2)$ <sup>3</sup> i  $\zeta_t \sim NNR(0, \sigma_\zeta^2)$ . Model je kompletiran kada se svaka opservacija predstavi kao zbir trenda  $\mu_t$  i slučajne greške  $\varepsilon_t$ , tj.

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (3.27)$$

(što predstavlja ponovljen model (3.23)) i gde je  $\varepsilon_t \sim NNR(0, \sigma^2)$ . Pretpostavlja se da su greške  $\eta_t$ ,  $\zeta_t$  i  $\varepsilon_t$  nezavisne jedna od druge. Kada je  $\sigma_\eta^2 = \sigma_\zeta^2 = 0$  dobija se model globalnog linearnog trenda (3.23) i (3.24). Dakle u ovom slučaju model globalnog trenda može se smatrati specijalnim slučajem modela lokalnog trenda.

Pri modeliranju sezonske vremenske serije u okviru regresionog modela, sezonska komponenta se modelira sezonskim veštačkim promenljivama uz uslov da zbir koeficijenata uz te promenljive bude jednak nuli. Ovo sugerše model stohastičke sezone:

$$\sum_{j=0}^{s-1} \gamma_{t-j} = \omega_t, \quad (3.28)$$

---

<sup>3</sup> Skraćenicu  $NNR(0, \sigma^2)$  koristimo da označimo normalnu i nezavisno raspoređenu slučajnu promenljivu sa sredinom 0 i varijansom  $\sigma^2$ .

gde je  $\gamma_t$  sezonska komponenta,  $s$  broj perioda, a  $\omega_t \sim NNR(0, \sigma_\omega^2)$ . Model ove vrste dozvoljava sezonskoj komponenti da se menja tokom vremena, uz uslov da očekivana vrednost zbira sezonskih efekata u toku uzastopnih  $s$  vremenskih perioda bude jednaka nuli.

Na osnovu izloženog, modeli vremenske serije mogu biti izraženi preko stohastičkog trenda, sezone i iregularne komponente. Model je strukturan u tom smislu što svaka od komponenti ima direktnu interpretaciju. *Osnovni strukturni model* (engl. *basic structural model*) specificiran je na sledeći način:

$$X_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (3.29)$$

gde je  $\mu_t$  lokalni linearni trend (3.25) i (3.26),  $\gamma_t$  lokalna sezonska komponenta (3.28) i  $\varepsilon_t$  slučajna komponenta. Specifikacija modela je kompletna uz pretpostavku da su četiri slučajne greške  $\varepsilon_t$ ,  $\eta_t$ ,  $\zeta_t$  i  $\omega_t$  međusobom nezavisne.

Pokazano je da se može uspostaviti veza između konstanti izravnjanja Holt-Wintersovog modela i relativnih varijansi:  $\bar{\sigma}_\eta^2 = \sigma_\eta^2 / \sigma^2$ ,  $\bar{\sigma}_\zeta^2 = \sigma_\zeta^2 / \sigma^2$  i  $\bar{\sigma}_\omega^2 = \sigma_\omega^2 / \sigma^2$ . Tako u slučaju nesezonske vremenske serije (uporediti model (3.25)-(3.26) i HW model u Tabeli 3.2), imamo:

$$\bar{\sigma}_\eta^2 = (\alpha^2 + \alpha^2 \gamma - 2\alpha\gamma) / (1 - \alpha\gamma) \quad (3.30)$$

$$\bar{\sigma}_\zeta^2 = \gamma^2 / (1 - \alpha\gamma). \quad (3.31)$$

Brownov model kod istog modela vremenske serije nameće ograničenje  $\bar{\sigma}_\zeta^2 = (\bar{\sigma}_\eta^2 / 2)^2$ . Znači da je osnovni strukturni model sličan aditivnoj varijanti Holt-Wintersovog modela, u tom smislu što konstante izravnjanja kod Holt-Wintersa imaju sličnu ulogu kao relativne varijanse kod strukturnog modela. Međutim, ova dva modela nisu identična, a osnovni strukturni model ima tu prednost što je utemeljen na pažljivo definisanom statističkom modelu.

Time što smo bazirali strukturni model na poznatim teorijskim osnovama omogućeno nam je da: 1) izvedemo ocenu koeficijenata na osnovu teorijski utemeljenog statističkog postupka, pri čemu će ocene imati poznate statističke osobine, 2) za prognoze generisane strukturnim modelom možemo konstruisati interval predviđanja, 3) generalizujemo model na sistematičan način, i 4) primenimo niz statističkih testova u cilju sagledavanja mogućnosti pojednostavljenja ili uopštenja modela.

I pored toga *ad hoc* modeli izravnjanja prezentirani u okviru ove glave pokazali su se veoma dobro u kratkoročnom prognoziranju vremenskih serija. Neki autori (na primer Chatfield (1989)) zbog njihovih karakteristika kao što su jednostavnost, razumljivost, lakoća korišćenja i relativna pouzdanost, u prvi plan ističu ovu klasu modela vremenskih serija, u odnosu na složenije modele kao što su ARIMA modeli.

**Zadaci**

- 3.1 Dato je 13 opservacija vremenske serije: 140, 137, 139, 149, 146, 152, 149, 143, 140, 136, 138, 144, 135. Na osnovu grafika vremenske serije izabrati odgovarajući model eksponencijalnog izravnjanja. Za početnu ocenu nivoa koristiti prosek svih opservacija. Izravnjanje izvršiti korišćenjem tri vrednosti konstante izravnjanja: 0.6, 0.7 i 0.8. Koja od navedenih vrednosti konstante izravnjanja daje minimalnu srednje kvadratnu grešku prognoze?

(Rešenje: Model JEI,  $\mu_0 = 142.1538$ ,  $MSE(\alpha = 0.6) = 29.427$ ,  $MSE(\alpha = 0.7) = 29.197$  i  $MSE(\alpha = 0.8) = 29.300$ ).

- 3.2 Za podatke iz Zadatka 3.1 izabrati odgovarajući model eksponencijalnog izravnjanja. Za početnu ocenu nivoa koristiti prvu opservaciju. Da li se minimalna vrednost srednje kvadratne greške postiže sa istom konstantom izravnjanja? Ukoliko se javljaju odstupanja od rezultata dobijenih u prethodnom zadatku, objasniti otkuda ona potiču.

(Rešenje:  $\mu_0 = 140$ ,  $MSE(\alpha = 0.6) = 28.664$ ,  $MSE(\alpha = 0.7) = 28.163$ ,  $MSE(\alpha = 0.8) = 28.069$ . Odstupanja se javljaju, jer je sada  $\alpha = 0.8$  optimalna vrednost konstante izravnjanja. Serija je relativno kratka, pa uz visoke vrednosti konstante izravnjanja treba da protekne više vremena da bi se izgubio uticaj izbora početne vrednosti nivoa.)

- 3.3 Dato je 15 opservacija vremenske serije: 10, 15, 11, 16, 17, 19, 18, 16, 17, 19, 22, 25, 24, 29, 30. Na osnovu grafikona vremenske serije izabrati odgovarajući Brownov model izravnjanja i primeniti ga u svrhu formiranja prognoze.

(Rešenje: Model B1,  $\mu_0 = 9.5143$ ,  $T_0 = 1.2107$  (na osnovu ocene linearnog trenda), uz  $\alpha = 0.3$  srednja kvadratna greška prognoze je 5.9532)

- 3.4 Za vremensku seriju iz Zadatka 3.3 predložiti odgovarajući Holt-Wintersov model izravnjanja i primeniti ga u svrhu formiranja prognoze.

(Rešenje: Model HW, uz istu početnu ocenu nivoa i trenda i konstante izravnjanja  $\alpha = 0.1$  i  $\gamma = 0.2$  srednja kvadratna greška prognoze je 5.7697)

- 3.5 Dato je 24 opservacija kvartalne vremenske serije: 102, 52, 100, 78, 160, 100, 161, 135, 250, 188, 216, 182, 344, 246, 303, 278, 455, 365, 404, 366, 579, 479, 515, 465. Na osnovu grafikona vremenske serije izabrati odgovarajući Holt-Wintersov model izravnjanja i primeniti ga u svrhu formiranja prognoze. Koristiti konstante izravnjanja:  $\alpha = 0.1$ ,  $\gamma = 0.1$  i  $\delta = 0.9$ .

(Rešenje: Model HW-M. Za ocenu početne vrednosti nivoa koristimo prvu opservaciju vremenske serije. Za početnu ocenu trenda koristimo ocenu

linearnog trenda na osnovu 24 opservacije:  $\hat{X}_t = 16.4710 + 20.4257t$ , tj. koeficijent uz vreme u ocenjenoj jednačini. Ocena početnih vrednosti sezonskih indeksa su: 1.23, 0.63, 1.20 i 0.94. Srednja kvadratna greška prognoze je 1226.18. Prognozirana vrednost u 25. vremenskom periodu iznosi 695.39)

- 3.6 Za godišnju vremensku seriju indeksa industrijske proizvodnje u Srbiji (serija S1) u periodu 1967. do 1987. godine formirati odgovarajući model eksponencijalnog izravnjanja.

(*Uputstvo*: Izbor modela eksponencijalnog izravnjanja vršiti na osnovu poredenja grafika vremenske serije i tipova vremenskih serija sa Slike 3.2).

- 3.7 Za kvartalnu vremensku seriju indeksa industrijske proizvodnje u bivšoj Jugoslaviji (serija S11) u periodu 1967.I do 1987.IV godine formirati odgovarajući model eksponencijalnog izravnjanja.

(*Uputstvo*: Izbor modela eksponencijalnog izravnjanja vršiti na osnovu poredenja grafika vremenske serije i tipova vremenskih serija sa Slike 3.2).

- 3.8 Za mesečnu vremensku seriju indeksa industrijske proizvodnje u bivšoj Jugoslaviji (serija S15) u periodu 1967.1 do 1987.12 godine formirati odgovarajući model eksponencijalnog izravnjanja.

(*Uputstvo*: Izbor modela eksponencijalnog izravnjanja vršiti na osnovu poredenja grafika vremenske serije i tipova vremenskih serija sa Slike 3.2).



# 4 MODELI STACIONARNIH VREMENSKIH SERIJA

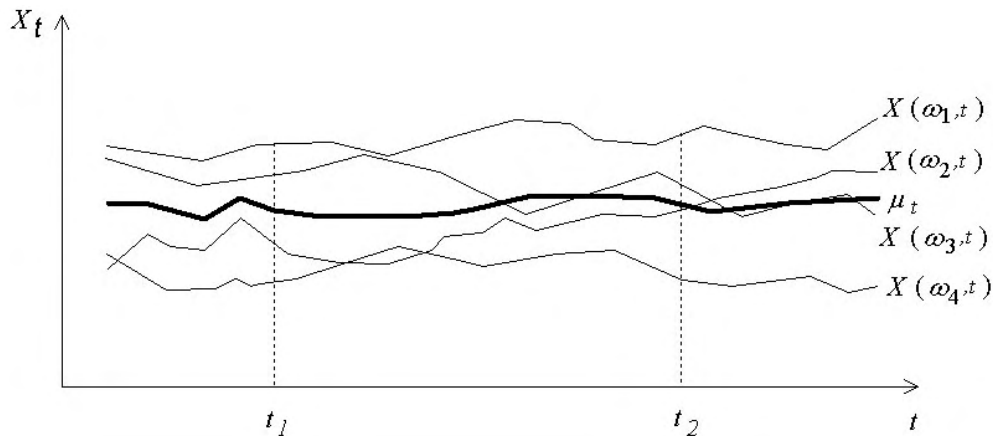
U ovoj glavi započinjemo izlaganje teorijskih osnova savremenih statističkih modela vremenskih serija. Zbog njihove stohastičke prirode dajemo kratak pregled pojmova u vezi stohastičkih procesa. Time definišemo teorijski okvir analize vremenskih serija, a istovremeno definišemo i samu vremensku seriju. U analizi vremenskih serija interesuje nas posebna klasa stohastičkih procesa. Do nje dolazimo nametanjem izvesnih ograničenja na proces. Tako definišemo stacionarne stohastičke procese na osnovu kojih, u okviru ove glave, razvijamo klasu parametarskih stacionarnih modela vremenskih serija, tzv. ARIMA modele. Napuštanjem pretpostavljene osobine stacionarnosti dolazimo do naredne klase parametarskih modela vremenskih serija kojima modeliramo pojave nestacionarne prirode. Ovu klasu modela razmatramo u narednoj, 5. Glavi. Nakon 6. Glave u kojoj se bavimo prognoziranjem na osnovu parametarskih modela vremenskih serija, u narednoj glavi pažnju posvećujemo Box-Jenkinsovom iterativnom postupku praktičnog modeliranja vremenske serije na osnovu ARIMA modela koji su do te, 7. Glave teorijski obrađeni. Izlaganjem modela sezonskih vremenskih serija u 8. Glavi, zaokružujemo savremenu teoriju modeliranja jedne vremenske serije u vremenskom domenu.

## 4.1 UVOD

Do pojma stohastičkog procesa dolazimo proširujući pojam slučajne promenljive. Slučajna promenljiva je po definiciji funkcija mogućih ishoda statističkog eksperimenta. Ako posmatramo njenu evoluciju tokom vremena ona postaje i funkcija vremena. Skup takvih funkcija nazivamo *stohastički ili slučajan proces*. Znači da je stohastički proces funkcija ishoda statističkog eksperimenta i vremena. Njegovu formalnu definiciju dajemo u narednom poglavlju. Na Slici 4.1 prikazali smo nekoliko članova stohastičkog procesa. Svaki član familije funkcija nazivamo *realizacijom* procesa ili *funkcijom uzorka* (engl. *sample function*). Prema tome stohastički proces možemo opisati i kao familiju funkcija



kod kojih vreme, kao jedan argument funkcije slobodno varira, a ishod eksperimenta, kao drugi argument funkcije je fiksiran na specifičnu vrednost.



**Slika 4.1** Četiri realizacije stohastičkog procesa i sredina procesa

Da bismo ukazali na težinu zadatka u analizi vremenskih serija predočavamo da nam je u modeliranju konkretne vremenske serije na raspolaganju samo jedna realizacija na osnovu koje je potrebno zaključiti o karakteristikama celoga procesa. Da bismo to postigli moramo uvesti ograničenja na stohastički proces kao što smo to i uradili u Poglavlju 4.2. Uvode se ograničenja koja se tiču vremenske homogenosti kao i memorije procesa. Stohastički proces koji ispunjava oba ograničenja nazivamo *stacionarni* i *ergodični proces*. Pri tome uvodimo i operativnu definiciju stacionarnosti koja je bazirana na momentima procesa, radi se o tzv. *slaboj stacionarnosti* ili stacionarnosti *drugog reda*. Modeli vremenskih serija iz ove glave odnose se upravo na ovu definiciju stacionarnosti.

Za potrebe analize takvih procesa u Poglavlju 4.3 definišemo dve ključne funkcije u analizi vremenskih serija u vremenskom domenu. Reč je o tzv. *autokovarijacionoj* i *autokorelacionoj funkciji*. Njima opisujemo korelacionu strukturu vremenske serije, jer je poznato da vremensku seriju karakteriše upravo međusobna zavisnost opservacija. Ove dve funkcije, pored *parcijalne autokorelacione funkcije* (Poglavlje 4.6), predstavljaju osnovno sredstvo u analizi vremenskih serija u pristupu kojim se bavimo u ovoj knjizi.

Prvi i najjednostavniji stohastički proces koji razmatramo u Poglavlju 4.4 je istovremeno i najznačajniji. Reč je o *procesu beloga šuma* na osnovu koga definišemo najopštiju klasu stohastičkih procesa, tzv. *linearne procese*. Nametanjem ograničenja na koeficijente linearnog procesa definišemo ostale procese iz ove knjige. Te procese izlažemo na preostalim stranama u okviru ove glave klasifikujući ih u tri grupe: *autoregresione procese*, *proces pokretnih proseka* i *mešovite procese*. Za svaki od procesa izvodimo osnovne pokazatelje, kao što je očekivana vrednost, varijansa, autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija (obična i parcijalna). Istovremeno ukazujemo na karakteristične slučajeve svakog procesa i tipičan izgled autokorelacione funkcije što će nam pomoći u postupku identifikacije odgovarajućeg modela vremenske serije.

## 4.2 STOHAŠTIČKI PROCESI, STACIONARNOST I ERGODIČNOST

Glavni zadatak teorije verovatnoće jeste pružanje probabilističkog modela koji može poslužiti kao idealizovani opis posmatrane pojave. U tom kontekstu pojam slučajne promenljive ima posebnu važnost, jer većina pojava ima neke kvantitativne osobine koje omogućavaju njihovu numeričku reprezentaciju. Međutim, slučajna promenljiva je statički pojam, dok je u izučavanju većine pojava interes upravo u posmatranje njihovog kretanja tokom vremena. U cilju modeliranja evolucije posmatrane pojava tokom vremena, zadatak u teoriji verovatnoće jeste dinamiziranje pojma slučajne promenljive. Prirodan način da to učinimo jeste povezivanje prostora uzorka sa vremenom. Tako dolazimo do formalne definicije stohastičkog procesa<sup>1</sup>.

**Definicija.** *Stohastički proces.* Neka je  $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot))$  prostor verovatnoće,  $\mathbf{T}$  neki skup realnih brojeva i neka je definisana funkcija  $X(\cdot, \cdot)$  koja  $\Omega \times \mathbf{T}$  preslikava u skup  $\mathbf{R}$  realnih brojeva:  $\Omega \times \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}$ . Uredeni niz slučajnih promenljivih  $\{X(\cdot, \cdot), t \in \mathbf{T}\}$  nazivamo *stohastički (slučajni) proces*.

Ako u procesu  $\{X(\cdot, \cdot), t \in \mathbf{T}\}$  fiksiramo indeks  $t \in \mathbf{T}$  tada dobijamo slučajnu promenljivu  $X(\cdot, t)$  definisanu na prostoru uzorka  $\Omega$ . Na Slici 4.1 fiksirali smo dva vremenska trenutka  $t_1$  i  $t_2$ , pa preseki grafika funkcija u tim trenucima predstavljaju četiri realizacije slučajnih promenljivih. S druge strane, za svako  $\omega \in \Omega$ ,  $X(\omega, \cdot)$  predstavlja funkciju od  $t$  koju nazivamo *realizacija slučajnog procesa*. Na Slici 4.1 prikazane su četiri realizacije za različite vrednosti  $\omega$  ( $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ ). Naposljetku,  $X(\omega, t)$  za dato  $\omega$  i  $t$  predstavlja samo realan broj. Na Slici 4.1 imamo, na primer u vremenskom trenutku  $t_1$  da je vrednost funkcije za  $\omega_2$  jednaka  $X(\omega_2, t_1)$ , što predstavlja realni broj koji bismo očitali na ordinati.

Na osnovu izloženog možemo reći da je *vremenska serija jedna realizacija stohastičkog procesa*. Kolekcija svih mogućih realizacija stohastičkog procesa naziva se *ansambl* (engl. *ensemble*) *funkcija* ili *ansambl realizacija*. Zato u analizi vremenskih serija polazimo od toga da smo vremensku seriju "izvukli" kao uzorak iz nekog ansambla. Kratkoće radi stohastički proces označavamo samo sa  $X(t)$  i  $X_t$  u zavisnosti od toga da li je u pitanju neprekidni ili prekidni stohastički proces. Ako nije drugačije rečeno podrazumevaćemo da je kod posmatranog stohastičkog procesa skup  $\mathbf{T} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  i  $\mathbf{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$ . To znači da ćemo u ovoj knjizi razmatrati prekidne procese .

<sup>1</sup> Obim i nivo izlaganja u okviru ovog poglavlja prilagođen je čitaocu koji je stekao osnovne pojmove iz teorije verovatnoće. Ostale čitaoce upućujemo na Rohatgia (Rouhedji) (1976, 1. Glava).

Na osnovu vremenske serije želimo izvesti zaključke o osnovnim karakteristikama stohastičkog procesa. U analizi vremenskih serija međusobni odnos vremenske serije i stohastičkog procesa istovetan je odnosu uzorka i populacije u klasičnoj statističkoj analizi. Klasična statistička analiza zasnovana je na slučajnoj promenljivoj koja pridružuje realan broj svakom ishodu statističkog eksperimenta. Ti eksperimenti više puta ponovljeni su međusobom nezavisni. Samim tim i elementi slučajnog uzorka međusobom su nezavisni. Za razliku od klasične statističke analize gde nije važan poredak opservacija on je veoma bitan u analizi vremenskih serija. Mada je u analizi ekonomskih vremenskih serija moguće varirati dužinu serije, tj. veličinu uzorka, ono što nam otežava situaciju je nemogućnost uzimanja više od jedne opservacije u jednom vremenskom trenutku. No bez obzira na ovaj problem u analizi, smatraćemo vremensku seriju jednom realizacijom koja se može dobiti iz beskonačnog skupa vremenskih serija, odnosno ansambla realizacija.

Najpotpuniji način opisivanja strukture zavisnosti stohastičkog procesa jeste formiranje funkcije rasporeda stohastičkog procesa. Kao što je pokazao Kolmogorov, ako stohastički proces ispunjava određene uslove regularnosti (simetrije i kompatibilnosti), nije potrebno formirati funkciju rasporeda beskonačno dimenzionog stohastičkog procesa. Znači da je i na osnovu konačnog skupa slučajnih promenljivih  $\{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}\}$  dobijenog iz stohastičkog procesa  $\{X_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , moguće potpuno opisati strukturu zavisnosti na osnovu funkcije rasporeda  $F(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}; \theta_t)$   $n$ -dimenzione promenljive. Ovu funkciju označavamo kraće  $F(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ . Pri tome podskup indeksa  $(t_1 < t_2 < \dots < t_n)$  pripada skupu  $\mathbf{T}$  za sve vrednosti  $n$  (gde je  $n$  pozitivan ceo broj). Zavisnost ove funkcije rasporeda kao i njenih parametara  $\theta_t$  od vremena jeste osobina stohastičkog procesa koju nazivamo *vremenskom heterogenošću*. Ona stvara nepremostive teškoće u modeliranju realnih pojava pošto obično raspolazemo samo jednom opservacijom za svako  $t$ . Stoga se ograničavamo na jednu važnu klasu stacionarnih procesa koju karakteriše vremenska homogenost. Za takve procese kažemo da su u svojevrsnoj statističkoj ravnoteži.

**Definicija.** *Striktne stacionarnost*<sup>2</sup>. Stohastički proces  $\{X_t : t \in \mathbf{T}\}$  je striktno stacionaran ako je za ma koji podskup  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  iz  $\mathbf{T}$  i ma koje  $k \in \mathbf{T}$

$$F(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = F(X_{t_1+k}, \dots, X_{t_n+k}) \quad (4.1)$$

Znači da funkcija rasporeda stohastičkog procesa ostaje neizmenjena kada se pomeri (translira) u vremenu za proizvoljno  $k$ . Pojam striktnosti stacionarnosti je koristan u kontekstu teorije verovatnoće, ali je od male koristi u praktičnom modeliranju jer je

<sup>2</sup> Striktne stacionarnost naziva se i *stacionarnost u užem smislu*, *kompletne stacionarnost* ili *stroža stacionarnost*.

baziran na nepoznatoj funkciji rasporeda. Stoga ćemo uvesti pojam stacionarnosti u širem smislu. To je tip stacionarnosti za koji bismo rekli da služi u operativne svrhe. Prethodno definišimo prva dva momenta stohastičkog procesa.

*Funkcija sredine procesa*  $\mu_t$  je

$$\mu_t = E(X_t), \quad (4.2)$$

Primer funkcije sredine procesa prikazan je na Slici 4.1. *Funkcija varijanse procesa* je

$$\sigma_t^2 = E(X_t - \mu_t)^2 \quad (4.3)$$

*Kovarijaciona funkcija* između  $X_{t_1}$  i  $X_{t_2}$  u dva vremenska trenutka  $t_1$  i  $t_2$  je

$$\gamma(t_1, t_2) = E(X_{t_1} - \mu_{t_1})(X_{t_2} - \mu_{t_2}), \quad (4.4)$$

*Korelaciona funkcija* između  $X_{t_1}$  i  $X_{t_2}$  je

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma_{t_1}^2} \sqrt{\sigma_{t_2}^2}} \quad (4.5)$$

Funkcija rasporeda za striktno stacionaran proces je ista za svako  $t$ . Kod ove klase stohastičkih procesa funkcija sredine procesa je konstantna ( $\mu_t = \mu$ ) kao i funkcija varijanse procesa ( $\sigma_t^2 = \sigma^2$ ).

Striktne stacionarnost  $n$ -tog reda implicira stacionarnost drugog reda, pa za ma koje cele brojeve  $t_1$ ,  $t_2$  i  $k$  imamo  $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_1 + k, t_2 + k)$  i  $\rho(t_1, t_2) = \rho(t_1 + k, t_2 + k)$ . Stavljajući da je  $t_1 = t$  i  $t_2 = t - k$  dobijamo  $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t, t + k) = \gamma(t - k, t) = \gamma_k$  i  $\rho(t_1, t_2) = \rho(t, t + k) = \rho(t - k, t) = \rho_k$ . Prema tome kovarijaciona i korelaciona funkcija za  $X_t$  i  $X_{t-k}$  funkcije su samo vremenskog intervala, odnosno veličine  $k$ . Osim u veoma jednostavnim slučajevima praktično je nemoguće na osnovu jedne realizacije stohastičkog procesa odrediti njenu funkciju rasporeda. Stoga u analizi vremenskih serija koristimo pojam stacionarnosti  $m$ -tog reda koju definišemo preko prvih  $m$  momenata stohastičkog procesa.

**Definicija.** *Slaba stacionarnost.* Stohastički proces  $\{X_t : t \in \mathbf{T}\}$  je stacionaran  $m$ -tog reda ako za ma koji podskup  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  iz  $\mathbf{T}$  i ma koje  $k \in \mathbf{T}$ , funkcija  $F(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  je reda  $m$  i momenti združeni promenljivih  $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$  jednaki su odgovarajućim momentima združenih promenljivih  $X_{t_1+k}, \dots, X_{t_n+k}$ , tj.

$$E[(X_{t_1})^{m_1} (X_{t_2})^{m_2}, \dots, (X_{t_n})^{m_n}] = E[(X_{t_1+k})^{m_1} (X_{t_2+k})^{m_2}, \dots, (X_{t_n+k})^{m_n}] \quad (4.6)$$

gde je  $m_1 + m_2 + \dots + m_n \leq m$ .

Za proces kažemo da je stacionaran  $m$ -tog reda ako postoje svi njegovi momenti  $m$ -tog reda koji su vremenski invarijantni (ne zavise od početnog vremenskog trenutka). Tako na primer *slaba stacionarnost drugog reda*<sup>3</sup> znači da je proces sa konstantnom sredinom i varijansom, a da kovarijaciona i korelaciona funkcija zavise samo od vremenskog intervala.

Važan primer stohastičkih procesa jeste *normalan* ili *Gausov proces* koga karakteriše to da je njegov združeni zakon verovatnoće normalan. Kako je normalan raspored u potpunosti opisan sa prva dva momenta, striktna i slaba stacionarnost su ekvivalentne za Gausov proces. Ako u daljem tekstu nije drugačije rečeno podrazumevaće se da je razmatrani proces normalan proces.

Da bismo na osnovu jedne realizacije stohastičkog procesa došli do zaključka o karakteristikama procesa pored ograničenja vremenske homogenosti uvodimo još i ograničenje u pogledu memorije procesa. Slabija forma tog ograničenja<sup>4</sup> memorije procesa, kod procesa koji je slabo stacionaran drugog reda, zahteva da  $\gamma_k = \text{Cov}(X_t, X_{t-k}) \rightarrow 0$ , kada  $k \rightarrow \infty$  (detaljnije kod Spanosa (1986)). *Ergodičnost* se može posmatrati kao uslov koji osigurava da će memorija procesa merena sa  $\gamma_k$  slabiti uprosečavanjem tokom vremena. On je uveden da bismo omogućili modeliranje vremenske zavisnosti stohastičkog procesa korišćenjem konačnog skupa parametara. Dva spomenuta ograničenja (na vremensku heterogenost i memoriju procesa) obezbeđuju nam izvođenje asimptotskih rezultata bitnih za statističko zaključivanje u okviru analize vremenskih serija. Ona nam dozvoljavaju da smatramo vremensku seriju u određenom smislu tipičnom za posmatrani stohastički proces i time da vremenski prosek koristimo kao ocenu odgovarajuće sredine procesa. Formalno, definicija ergodičnosti je iskazana na sledeći način:

**Definicija.** *Ergodičnost.* Slabo stacionaran proces drugog reda  $\{X_t : t \in \mathbf{T}\}$  je ergodičan ako

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \gamma_k \right) = 0 \quad (4.7)$$

Ergodičnost je ispunjena za većinu stacionarnih procesa koji se sreću u praksi. Ako je proces ergodičan znači da sa povećanjem dužine vremenske serije momenti iz uzorka konvergiraju u srednje kvadratnom smislu ka odgovarajućim momentima populacije. Drugim rečima vremenski prosek za jednu realizaciju procesa konvergira ka proseku celog ansambla realizacija. Uz uslov ergodičnosti vremenski prosek će biti nepristrasna i

<sup>3</sup> Slaba stacionarnost naziva se i *stacionarnost u širem smislu*, a slaba stacionarnost drugog reda i *stacionarnost u kovarijansi*.

<sup>4</sup> Naziva se i asimptotska nekorelisanost.

konzistentna ocena populacione sredine kao što će i ocena kovarijacione funkcije biti konzistentna ocena populacione kovarijacione funkcije.

U okviru ovog poglavlja ukratko smo prikazali osnovne pojmove vezane za stohastičke procese i to u meri u kojoj je potrebno za naše dalje izlaganje. Čitalac može u knjizi Fullera (Fuler) (1976), Hannana (Hena) (1970), Nerlove i dr. (1979) i Spanosa (1986) pročitati opširnije o stohastičkim procesima u funkciji analize vremenskih serija.

### 4.3 AUTOKOVARIJACIONA I AUTOKORELACIONA FUNKCIJA

#### 4.3.1 Definicija i osobine

Pri definisanju slabe stacionarnosti istaknuto je da je u definiciji ključna veličina kovarijaciona ili korelaciona funkcija. S obzirom da smo ih definisali za jednodimenzioni stohastički proces (posmatrali smo jednu slučajnu promenljivu kako evoluirala tokom vremena) uobičajeno je da ih nazivamo *autokovarijaciona* i *autokorelaciona funkcija*.

Kod stacionarnog procesa  $\{X_t\}$ , sredina  $E(X_t) = \mu$  i varijansa  $Var(X_t) = \sigma^2$  su konstantne, a kovarijanse  $Cov(X_t, X_s)$  su funkcije samo vremenskog intervala  $|t-s|$ . Zato je kovarijanse između  $X_t$  i  $X_{t-k}$ :

$$\gamma_k = Cov(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu), \quad (4.8)$$

a koeficijent korelacije između  $X_t$  i  $X_{t-k}$  je

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{Var(X_t)}\sqrt{Var(X_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \quad (4.9)$$

gde smo označili  $Var(X_t) = Var(X_{t-k}) = \gamma_0$ .  $\gamma_k$  je funkcija od  $k$  i naziva se *autokovarijaciona funkcija*, a funkcija  $\rho_k$  naziva se *autokorelaciona funkcija*.

Za stacionarni stohastički proces mogu se pokazati sledeće osobine autokovarijacione i autokorelacione funkcije:

1.  $\gamma_0 = Var(X_t)$ ,  $\rho_0 = 1$ .

Ovo svojstvo sledi iz jednačine (4.8) i (4.9) za  $k = 0$ .

2.  $\gamma_k = \gamma_{-k}$ ,  $\rho_k = \rho_{-k}$ . (osobina simetričnosti)

Zaista na osnovu uslova stacionarnosti dobijamo:

$$\gamma_k = Cov(X_t, X_{t-k}) = Cov(X_{t-k}, X_t) = Cov(X_t, X_{t+k}) = \gamma_{-k}$$

Slično imamo i  $\rho_k = \rho_{-k}$  na osnovu jednačine (4.9). Prema tome, autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija su parne funkcije docnje  $k$ . Zbog ove simetrije autokorelacione funkcije ona se izračunava i grafički prikazuje samo za nenegativne docnje pri čemu se sam grafik naziva *korelogram*.

$$3. |\gamma_k| \leq \gamma_0, \quad |\rho_k| \leq 1$$

Ove nejednakosti slede na osnovu činjenice da je varijansa slučajne promenljive  $Y = \lambda_1 X_t + \lambda_2 X_{t-k}$  nenegativna, gde su  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  proizvoljne konstante. Kako je  $Var(Y) = Var(\lambda_1 X_t + \lambda_2 X_{t-k}) = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\sigma^2 + 2\lambda_1\lambda_2\gamma_k$ , za  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  dobijamo  $\gamma_k \geq -\sigma^2$ , pa je  $\rho_k \geq -1$ . Kada je  $\lambda_1 = 1$  i  $\lambda_2 = -1$ , dobijamo  $\sigma^2 \geq \gamma_k$ , pa je  $\rho_k \leq +1$ .

4. Autokovarijaciona matrica  $\Gamma_n$  je pozitivno semidefinitna, odnosno determinanta matrice

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-3} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \rho_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{P}_n$$

i svi njeni glavni minori su pozitivni ili jednaki nuli. Sa  $\mathbf{P}_n$  smo označili autokorelacionu matricu koja je takode pozitivno semidefinitna. Ovo je opštiji rezultat od prethodnog i sledi na osnovu činjenice da je varijansa slučajne promenljive  $Y = \lambda_1 X_t + \lambda_2 X_{t-1} + \dots + \lambda_n X_{t-n+1}$  nenegativna.

5. Mada stohastički proces ima jedinstvenu kovarijacionu strukturu, obrnuto nije u opštem slučaju tačno. Čak i za stacionaran normalan proces, koji je u potpunosti definisan sredinom, varijansom i autokorelacionom funkcijom, potreban je dodatni uslov (poznat pod nazivom uslov invertibilnosti) da bi se postigla jednoznačna korespondencija između stohastičkog procesa i autokorelacione funkcije. Ove objašnjava teškoće u interpretaciji korelograma.

Napominjemo da ne može ma koja proizvoljna funkcija koja zadovoljava uslove (1)-(3) biti autokovarijaciona, odnosno autokorelaciona funkcija. Potreban uslov da neka funkcija bude autokovarijaciona ili autokorelaciona funkcija nekog stacionarnog stohastičkog procesa jeste da je pozitivno semidefinitna.

### 4.3.2 Ocena sredine, autokovarijance i autokorelacije

Slabo stacionarnu vremensku seriju u potpunosti opisuju sredina  $\mu$ , varijansa  $\sigma^2$  i autokorelaciona funkcija  $\rho_k$ . Zadatak nam je da na osnovu jedne realizacije stohastičkog procesa  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  ocenimo navedene pokazatelje. Ovaj zadatak ćemo

uspešno rešiti ukoliko posmatrani proces zadovoljava pretpostavke stacionarnosti i ergodičnosti.

**Ocena sredine.** Kao što je uobičajeno u statistici, "prirodna" ocena sredine stacionarnog procesa jeste uzoračka sredina:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \quad (4.10)$$

Očigledno je  $E(\bar{X}) = \mu$ , pa je  $\bar{X}$  nepristrasna ocena od  $\mu$ . Varijansa ove ocene je

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{X}) &= \frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n \text{Cov}(X_t, X_s) = \frac{\gamma_0}{n^2} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n \rho_{t-s} \\ &= \frac{\gamma_0}{n^2} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} (n-|k|) \rho_k = \frac{\gamma_0}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \rho_k \end{aligned} \quad (4.11)$$

gde je  $k = t - s$ . Ako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \rho_k \right] < \infty, \quad (4.12)$$

tada  $\text{Var}(\bar{X}) \rightarrow 0$ , kada  $n \rightarrow \infty$ , pa je  $\bar{X}$  konzistentna ocena za  $\mu$ . Korišćenjem pretpostavljene osobine ergodičnosti stohastičkog procesa može se pokazati<sup>5</sup> da je vrednost limesa u izrazu (4.12) zaista konačna, što implicira osobinu konzistentnosti ocene  $\bar{X}$ . Pojednostavljeno rečeno, ukoliko su međusobno dovoljno udaljene vrednosti procesa nekorelirane, tada ćemo dodavanjem novih opservacija dobiti korisnu informaciju kojom će se sredina opservacija približiti sredini ansambla realizacija.

**Ocena autokovarijacione funkcije.** Na osnovu jedne realizacije stacionarnog stohastičkog procesa formiramo sledeće ocene autokovarijacione funkcije:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{n} \sum_{t=k+1}^n (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X}) \quad (4.13)$$

ili

$$\hat{\gamma}_k^* = \frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X}). \quad (4.14)$$

Pokažimo da su obe ocene pristrasne ocene populacione autokovarijacione funkcije. Suma u oba izraza je

<sup>5</sup> Videti na primer: Wei (Vei) (1990, ss. 18-19).



$$\begin{aligned}
\sum_{t=k+1}^n (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X}) &= \sum_{t=k+1}^n [(X_t - \mu) - (\bar{X} - \mu)][(X_{t-k} - \mu) - (\bar{X} - \mu)] = \\
&= \sum_{t=k+1}^n (X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) - (\bar{X} - \mu) \sum_{t=k+1}^n (X_t - \mu) - (\bar{X} - \mu) \sum_{t=k+1}^n (X_{t-k} - \mu) + (n-k)(\bar{X} - \mu)^2 \\
&= \sum_{t=k+1}^n (X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) - (n-k)(\bar{X} - \mu)^2, \tag{4.15}
\end{aligned}$$

gde smo izraze  $\sum_{t=k+1}^n (X_t - \mu)$  i  $\sum_{t=k+1}^n (X_{t-k} - \mu)$  aproksimirali sa  $(n-k)(\bar{X} - \mu)$ . Očekivana vrednost prve ocene je:

$$E(\hat{\gamma}_k) \approx \gamma_k - \frac{k}{n} \gamma_k - \left( \frac{n-k}{n} \right) \text{Var}(\bar{X}), \tag{4.16}$$

a druge

$$E(\hat{\gamma}_k^*) \approx \gamma_k - \text{Var}(\bar{X}). \tag{4.15}$$

Ako je razmatrani proces ergodičan, tada su obe ocene asimptotski nepristrasne. Međutim, u opštem slučaju ocena autokovarijanse (4.13) ima veću pristrasnost nego ocena (4.14), posebno ako je  $k$  veliko u odnosu na  $n$ . Preporuka je u empirijskim istraživanjima da se na osnovu vremenske serije dužine  $n$ , računa ne više od  $n/4$  autokovarijacionih koeficijenata. Zbog pristrasnosti obe ocene koristimo kriterijum srednje kvadratne greška u cilju njihovog poređenja. Za jednu klase stohastičkih procesa ocena  $\hat{\gamma}_k$  ima manju varijansu i srednje kvadratnu grešku od ocene  $\hat{\gamma}_k^*$ . Uzimajući u obzir sve pozitivne i negativne strane ove dve ocene preporuka je da se u empirijskim istraživanjima koristi ocena data izrazom (4.13).

**Ocena autokorelacione funkcije.** Uzoračka autokorelaciona funkcija  $\hat{\rho}_k$  data je izrazom

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=k+1}^n (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{4.16}$$

gde je  $\bar{X}$  sredina vremenske serije. Umesto oznake  $\hat{\rho}_k$  za ocenu autokorelacionih koeficijenata koristi se i oznaka  $r_k$ . Grafički prikaz uzoračkih autokorelacionih koeficijenata  $\hat{\rho}_k$  sa dužinom docnje  $k$  na apscisi nazivamo *uzorački korelogram*.

Za stacionarni Gausov proces Bartlett (Bartlet) (1946) je pokazao da se za veliko  $n$  i uz uslov da je  $\rho_k = 0$ , za  $k > m$  (gde je  $m$  broj uzoračkih autokorelacionih koeficijenata), raspored uzoračke autokorelacione funkcije može aproksimirati normalnim rasporedom čija je sredina jednaka  $\rho_k$ , a varijansa približno jednaka:

$$\text{Var}(\hat{\rho}_k) = \frac{1}{n} (1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + \dots + 2\rho_m^2). \quad (4.17)$$

Kako su nam koeficijenti u izrazu (4.17) nepoznati u empirijskom istraživanju zamenjujemo ih odgovarajućim uzoračkim autokorelacionim koeficijentima. Tako ćemo u praktičnoj primeni uzastopno povećavati vrednost  $m$ , pa ćemo na osnovu uzoračkih koeficijenata  $\hat{\rho}_k$ , a prema izrazu (4.17), oceniti varijanse ocena autokorelacionih koeficijenata  $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_k$  kao  $n^{-1}, n^{-1}(1+2\hat{\rho}_1^2), \dots, n^{-1}(1+2\hat{\rho}_1^2+\dots+2\hat{\rho}_{k-1}^2)$ . Standardne greške ocena autokorelacionih koeficijenata dobijaju se zatim kao vrednost kvadratnog korena iz navedenih izraza. Pored ove, Bartlettove aproksimacije, za testiranje hipoteze da su autokorelacioni koeficijenti jednaki nuli na svim doznjama, koristimo i sledeću "grublju" aproksimaciju standardne greške ocene autokorelacionih koeficijenata:

$$S_{\hat{\rho}_k} = \sqrt{\frac{1}{n}}. \quad (4.18)$$

**Primer 4.1** Na osnovu deset opservacija vremenske serije iz Tabele 4.1 (druga kolona) odrediti realizovanu vrednost sredine i prva tri autokovarijaciona i autokorelaciona koeficijenta. Pokazati na primeru prva tri autokorelaciona koeficijenta da i za uzoračku autokorelacionu funkciju važi osobina simetričnosti ( $\hat{\rho}_k = \hat{\rho}_{-k}$ ). Korišćenjem Bartlettove i "grublje" aproksimacije date izrazom (4.18) izračunati standardne greške ocene autokorelacionih koeficijenata. Nacrtati uzorački korelogram i u njega uneti donju i gornju granicu 95% intervala poverenja autokorelacionih koeficijenata.

**Tabela 4.1** Izračunavanje autokorelacione funkcije

$t$	$X_t$	$X_t - \bar{X}$	$(X_t - \bar{X})^2$	$X_{t-1}$	$(X_t - \bar{X})(X_{t-1} - \bar{X})$	$X_{t-2}$	$X_{t-2}$	$X_{t+1}$	$X_{t+2}$	$X_{t+3}$
1	8	-2	4	-	-	-	-	14	5	15
2	14	4	16	8	-8	-	-	5	15	9
3	5	-5	25	14	-20	8	-	15	9	7
4	15	5	25	5	-25	14	8	9	7	13
5	9	-1	1	15	-5	5	14	7	13	7
6	7	-3	9	9	3	15	5	13	7	10
7	13	3	9	7	-9	9	15	7	10	12
8	7	-3	9	13	-9	7	9	10	12	-
9	10	0	0	7	0	13	7	12	-	-
10	12	2	4	10	0	7	13	-	-	-
	100	-	102	-	-73	-	-	-	-	-

Sredina serije je  $\bar{X} = 10$  Ocena varijanse serije je

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{10} \sum_{t=1}^{10} (X_t - \bar{X})^2 = \frac{1}{10} 102 = 10.2$$

Ocena prvog autokovarijacionog koeficijenta je

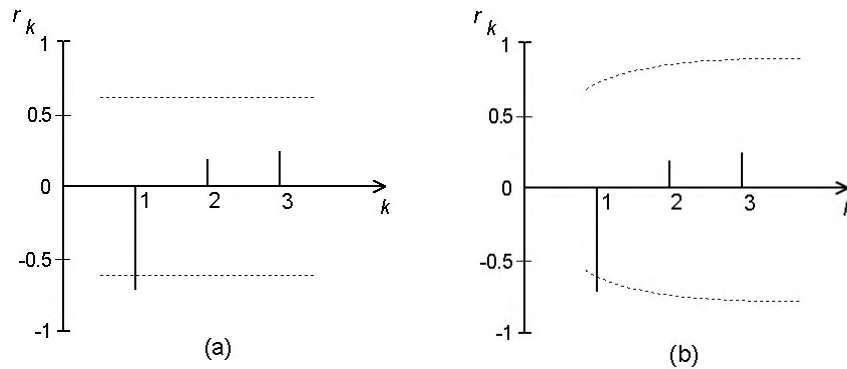
$$\hat{\gamma}_1 = \frac{1}{10} \sum_{t=2}^{10} (X_t - \bar{X})(X_{t-1} - \bar{X}) = \frac{1}{10}(-73) = -7.3,$$

a ocena prvog autokorelacionog koeficijenta je

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_0} = \frac{-7.3}{10.2} = -0.7157.$$

Proveriti da je  $\hat{\gamma}_2 = 2$ ,  $\hat{\gamma}_3 = 2.5$ ,  $\hat{\rho}_2 = 0.1961$  i  $\hat{\rho}_3 = 0.2451$ . Korišćenjem elemenata iz poslednjih pet kolona pokazati da je zaista  $\hat{\rho}_k = \hat{\rho}_{-k}$ , tj. da je uzoračka autokorelaciona funkcija simetrična oko početka.

Na osnovu ocenjenih autokorelacionih koeficijenata dobijamo za  $k=1$ ,  $Var(\hat{\rho}_1) \approx 1/n = 0.1$ , pa je standardna greška ocene  $S_{\hat{\rho}_1} = 0.3162$ . Za  $k=2$  je  $Var(\hat{\rho}_2) \approx 1/n(1+2\hat{\rho}_1^2) = 1/10(1+2(-0.7157)^2) = 0.2024$ , a greška ocene je  $S_{\hat{\rho}_2} = 0.4499$ . Naposljetku za  $k=3$  je  $Var(\hat{\rho}_2) \approx 1/n(1+2\hat{\rho}_1^2+2\hat{\rho}_2^2) = 1/10(1+2(-0.7157)^2+2(0.1961)^2) = 0.2101$  a standardna greška ocene je  $S_{\hat{\rho}_3} = 0.4584$ . Donja i gornja granica 95% intervala poverenja autokorelacionih koeficijenata su  $\pm 1.96/\sqrt{n}$  kod "grublje" aproksimacije, a na osnovu Bartlettove aproksimacije dobijamo  $\pm 1.96 S_{\hat{\rho}_k}$ . Ove granice su unete na korelogram na Slici 4.2.



**Slika 4.2** Korelogram i odgovarajući interval poverenja na osnovu:  
(a) "grube" aproksimacije, (b) Bartlettove aproksimacije

Sa korelograma uočavamo da na osnovu Bartlettove aproksimacije dobijamo širi interval poverenja u odnosu na interval baziran na standardnoj grešci ocene autokorelacionih koeficijenata prema izrazu (4.17). Mada je broj opservacija vremenske serije suviše mali da bi se na osnovu njih kvalifikovano sudilo o statističkoj značajnosti autokorelacionih koeficijenata, više kao ilustraciju navodimo da je na osnovu korelograma samo  $\rho_1$  statistički značajno različito od nule, a da

preostala dva koeficijenta nisu. Zaključak je isti bez obzira na korišćenu aproksimaciju greške ocene koeficijenata, što inače ne mora uvek biti slučaj. Dakle, na osnovu korelograma kao što je ovaj na Slici 4.2 možemo zaključiti da su statistički značajni oni koeficijenti koji izlaze van granica intervala poverenja. ■

#### 4.4 LINEARNI PROCESI

U okviru ovog poglavlja upoznajemo osnovne pojmove i teorijske rezultate na kojima zasnivamo izlaganje stohastičkih modela vremenskih serija u ovoj knjizi. Na prvom mestu je rezultat Wolda (1938), odnosno dobro poznata *Woldova teorema razlaganja* prema kojoj se svaki stacionarni proces može izraziti kao zbir dva međusobom nekorelisana procesa, jednog čisto determinističkog<sup>6</sup> i jednog čisto nedeterminističkog<sup>7</sup>. Pri tome se čisto nedeterministički proces može izraziti u sledećoj formi:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \psi_0 = 1 \quad (4.19)$$

gde je  $\{\varepsilon_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  niz nekoreliranih sličajnih promenljivih iz određenog, obično normalnog rasporeda. Prema Woldovoj teoremi sledi da je reprezentacija procesa data u formi (4.19) dovoljno opšta da obuhvati sve slabo stacionarne stohastičke procese. Proces definisan izrazom (4.19) naziva se *linearni proces*<sup>8</sup>. Svi modeli vremenskih serija koje razmatramo u ovoj glavi predstavljaju primere čisto nedeterminističkih procesa. Korišćenjem operatora docnje linearni proces možemo napisati u sažetijem obliku:

$$X_t - \mu = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) \varepsilon_t = \psi(B) \varepsilon_t \quad (4.20)$$

gde smo sa  $\psi(B)$  označili polinom po operatoru docnje, pri čemu je  $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$ .

Linearni proces se definiše na osnovu stacionarnog stohastičkog procesa  $\{\varepsilon_t\}$  koji nazivamo *procesom belog šuma*<sup>9</sup> (engl. *white noise process*) ili *potpuno slučajan proces*.

<sup>6</sup> Pod čisto determinističkim procesom podrazumevamo process kod koga se postiže perfektno predviđanje budućih vrednosti na osnovu sopstvenih prošlih vrednosti.

<sup>7</sup> Za dokaz Woldove teoreme videti Hannan (1970, s. 137).

<sup>8</sup> Izraz (4.19) za linearni process naziva se i *MA reprezentacija* (od engl. *Moving Average* – pokretni procesi), odnosno *Woldova reprezentacija*. Koristi se i naziv *linearni filter*, kojim se želi naglasiti da se jedan ulazni process, u posmatranom sistemu transformiše ili filtrira u drugi, izlazni process.

<sup>9</sup> Naziv beli šum proističe is frekventne analize ovoga procesa koja ukazuje na to da sve frekvencije daju isti doprinos varijansi procesa. Postupak frekventne analize analogan je spektralnoj analizi sunčeve (bele) svetlosti kojom prilikom se vrši njeno razlaganje na sedam boja. Svaka od tih sedam boja daje podjednak doprinos formiranju bele boje.

Njega formira niz slučajnih promenljivih, međusobom nekoreliranih, koje potiču iz određenog rasporeda kod koga je:  $E(\varepsilon_t) = 0$ , sa konstantnom varijansom  $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$  i kovarijansom  $\gamma_k = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0$ , za svako  $k \neq 0$ . Odavde sledi da je proces belog šuma stacionaran proces čija je autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \text{ i } \rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

respektivno. Važnost procesa belog šuma u analizi vremenskih serija ne proizilazi iz njegove pogodnosti za modeliranje vremenske serije, nego otuda što on služi za konstruisanje drugih procesa. S druge strane, njegovi pokazatelji kao što su autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija, odnosno statistike iz njih izvedene, koriste se kao reperne vrednosti za poređenje istih pokazatelja i statistika drugih procesa.

Odredimo očekivanu vrednost, autokovarijacionu i autokorelacionu funkciju linearnog procesa datog izrazom (4.19). Očekivana vrednost je  $E(X_t) = \mu$ , što sledi s obzirom na definiciju procesa belog šuma. Autokovarijansa na nultoj doznji linearnog procesa je:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= E(X_t - \mu)^2 = E(\varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots)^2 \\ &= E(\varepsilon_t^2) + \psi_1^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \psi_2^2 E(\varepsilon_{t-2}^2) + \dots \\ &= \sigma^2 + \psi_1^2 \sigma^2 + \psi_2^2 \sigma^2 + \dots = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Autokovarijansa na  $k$ -toj doznji je:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) \\ &= E(\varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \psi_k \varepsilon_{t-k} + \psi_{k+1} \varepsilon_{t-k-1} + \dots)(\varepsilon_{t-k} + \psi_1 \varepsilon_{t-k-1} + \dots) \\ &= \sigma^2 (1 \cdot \psi_k + \psi_1 \psi_{k+1} + \psi_2 \psi_{k+2} + \dots) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Količnik izračunatih autokovarijansi definiše autokorelacionu funkciju linearnog procesa:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}}{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2}. \quad (4.24)$$

Sada se može iskazati uslov stacionarnosti procesa  $X_t$ . Izražavamo ga preko uslova nametnutog na  $\psi$ -pondere. Ovih pondera u opštem slučaju imamo beskonačno mnogo, pa je za stacionarnost procesa potrebno pokazati da je  $\gamma_k$  konačno za svako  $k$ . Bez

umanjenja opštosti pretpostavićemo da je u daljem tekstu  $\mu=0$ , ako nije drugačije rečeno. Kako je  $|\gamma_k| = |E(X_t X_{t-k})| \leq [Var(X_t)Var(X_{t-k})]^{1/2} = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$ , znači da je  $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$  uslov stacionarnosti linearnog procesa.

Za potrebe daljeg izlaganja definišimo funkciju generatrisu nekog niza. U opštem slučaju funkcija generatrisa omogućava da se na kompaktan način zabeleži informacija sadržana u nekom nizu. Neka je dat niz  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots$ , koji može biti beskonačan. Funkcija generatrisa ovog niza je

$$\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j z^j. \quad (4.25)$$

Kao što je u teoriji verovatnoće od posebne važnosti tzv. *funkcija generatrisa verovatnoća*, tako je u analizi vremenskih serija korisno definisati tzv. funkciju generatrisu autokovarijansi. Ako je dat niz autokovarijansi  $\gamma_k$ ,  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , tada *funkciju generatrisu autokovarijansi* (engl. *autocovariance generating function*) definišemo sa

$$\gamma(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k B^k. \quad (4.26)$$

Na osnovu uslova stacionarnosti i izraza (4.23) funkcija generatrisa autokovarijansi je

$$\begin{aligned} \gamma(B) &= \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} B^k = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_j \psi_i B^{i-j} \\ &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^i \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^{-j} = \sigma^2 \psi(B) \psi(B^{-1}), \end{aligned} \quad (4.27)$$

gde je  $i = j+k$  i pri čemu je uzeto u obzir da je  $\psi_j = 0$ , za  $j < 0$ . Na osnovu funkcije generatrise autokovarijansi definišemo *funkciju generatrisu autokorelacija*:

$$\rho(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k B^k = \frac{\gamma(B)}{\gamma_0}. \quad (4.28)$$

Dve funkcije generatrise date izrazima (4.26) i (4.28) kod pojedinih stacionarnih procesa predstavljaju analitičko sredstvo za određivanje autokovarijansi i autokorelacija, a takođe olakšavaju izračunavanje spektra u okviru frekventne analize stohastičkih procesa.

Na kraju ovog poglavlja ukažimo na to kako se na osnovu linearnog procesa datog izrazom (4.19) definišu tri posebne klase procesa. Naime, pogodnim izborom  $\psi$ -pondera mogu se izvesti svi modeli vremenskih serija kojima se bavimo u ovoj glavi. Kao prvo, izraz (4.19) je ponderisani prosek slučajnih poremećaja ili šokova (engl. *random shock*) i predstavlja *MA reprezentaciju* linearnog procesa. Pored ove,

koristimo i *autoregresionu (AR) reprezentaciju*, prema kojoj se tekuća vrednost procesa regresira na svoje prošle vrednosti, a uključen je i slučajni poremećaj  $\varepsilon_t$ :

$$X_t = \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + \dots + \varepsilon_t \quad (4.29)$$

što se korišćenjem operatora docnije može sažetije napisati u obliku

$$\pi(B)X_t = \varepsilon_t, \quad (4.30)$$

gde je  $\pi(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j$ , i  $1 + \sum_{j=1}^{\infty} |\pi_j| < \infty$  pri tom koeficijente u AR reprezentaciji nazivamo  $\pi$ -ponderi. Ako se linearni proces dat izrazom (4.19) može napisati u formi AR reprezentacije (4.30), tada za proces kažemo da je *invertibilan*. Problemom invertibilnosti bavimo se detaljnije u Poglavlju 4.6.

Obe reprezentacije linearnog procesa sadrže beskonačan broj koeficijenata, pa su stoga nepodesne za direktnu primenu u praktičnom modeliranju vremenskih serija u situaciji kada raspolažemo konačnim brojem opservacija. Zato na osnovu MA i AR reprezentacije definišemo modele sa konačnim brojem koeficijenata u nadi da ćemo njima dobro aproksimirati konkretan stohastički proces. Ako u MA reprezentaciji stavimo da je prvih  $q$   $\psi$ -pondera različito od nule, a ostali jednaki nuli, tada ćemo dobiti tzv. *proces pokretnih proseka  $q$ -tog reda*, kraće nazvan *MA proces tog reda*. Tako na primer, ako u izraz (4.19) stavimo da je  $\psi_1 = \theta_1$  i  $\psi_j = 0$ , za  $j \geq 2$ , dobijamo model  $X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ , koji odgovara procesu pokretnih proseka prvog reda. S druge strane, ako u AR reprezentaciji stavimo da je prvih  $p$   $\pi$ -pondera različito od nule, a ostali jednaki nuli, tada ćemo dobiti tzv. *autoregresioni proces  $p$ -reda*, kraće nazvan *AR proces tog reda*. Tako na primer, ako u izraz (4.29) stavimo da je  $\pi_j = \phi_1$  i  $\pi_j = 0$ , za  $j \geq 2$ , dobijamo model  $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$ , koji odgovara autoregresionom procesu prvog reda. Do ovog procesa mogli smo doći na osnovu MA reprezentacije, korišćenjem  $\psi$ -pondera. Ako u izraz (4.19) stavimo da je  $\psi_j = \phi_1^j$ , tada je  $X_t = \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \dots$ , odnosno  $X_t = \varepsilon_t + \phi_1 (\varepsilon_{t-1} + \phi_1 \varepsilon_{t-2} + \dots)$ , pa je  $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$ . Tokom izlaganja vrtićemo se na ovu dualnu vezu između dve klase modela. Naposljetku treća klasa modela opisuje tzv. *autoregresione procese pokretnih proseka*, odnosno reč je o *mešovitom modelu* koji glasi:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}. \quad (4.31)$$

U slučaju da AR i MA modeli za konkretnu vremensku seriju sadrže veliki broj koeficijenata tada je mešoviti model njihova realna alternativa. Po pravilu na osnovu njega ćemo sa manjim brojem koeficijenata u odnosu na AR i MA modele postići približno istu aproksimaciju posmatranog procesa.

## 4.5 AUTOREGRESIONI PROCESI (A R PROCESI)

Ako u AR reprezentaciji linearnog procesa stavimo da je  $\pi_1 = \phi_1$ ,  $\pi_2 = \phi_2$ , ...,  $\pi_p = \phi_p$  i  $\pi_j = 0$ , za  $j > p$  dobićemo autoregresioni proces reda  $p$ . Autoregresioni procesi, kao što im ime kazuje, impliciraju regresiju na sopstvene vrednosti, otuda i prefiks auto u imenu ovog procesa. Dakle, za proces  $\{X_t\}$  kažemo da je *autoregresioni proces reda  $p$*  ako je opisan jednačinom

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t. \quad (4.32)$$

Znači da je tekuća vrednost procesa linearna kombinacija  $p$  sopstvenih prošlih vrednosti plus slučajni poremećaj<sup>10</sup>  $\varepsilon_t$ . Kako je  $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = \sum_{j=1}^p |\phi_j| < \infty$ , proces je uvek invertibilan. Autoregresioni proces (4.32) možemo napisati u sažetijem obliku korišćenjem operatora docnje  $B$ :

$$\phi(B)X_t = \varepsilon_t, \quad (4.33)$$

gde je  $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ . Skraćeno označavamo autoregresioni proces reda  $p$  kao  $AR(p)$  proces.

### 4.5.1 Autoregresioni procesi prvog reda

Ako u izraz (4.32) zamenimo dobijamo autoregresioni proces prvog reda koji označavamo kao  $AR(1)$  proces. Autoregresioni proces prvog reda nazivamo i Markovljev proces. Dobijamo

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (4.34)$$

odnosno korišćenjem operatora docnje u sažetijem obliku  $AR(1)$  proces pišemo u obliku:

$$(1 - \phi_1 B)X_t = \varepsilon_t, \quad (4.35)$$

odakle dobijamo

$$\begin{aligned} X_t &= (1 - \phi_1 B)^{-1} \varepsilon_t = (1 + \phi_1 B + \phi_1^2 B^2 + \dots) \varepsilon_t \\ &= \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \dots \end{aligned} \quad (4.36)$$

Na osnovu izraza (4.36) sledi  $E(X_t) = 0$  i  $Var(X_t) = \sigma^2(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \dots)$ . Znači da će linearni proces dat izrazom (4.19) sa vrednošću pondera  $\psi_j = \phi_1^j$  konvergirati ako je

<sup>10</sup> Za slučajni poremećaj u ovom kontekstu koristi se i izraz *inovacija procesa*. Njime se obuhvata novena procesa u trenutku  $t$  koja nije objašnjena prošlim vrednostima serije.



$|\phi_1| < 1$ , jer je tada varijansa konačna. Ovaj uslov predstavlja istovremeno i *uslov stacionarnosti* AR procesa prvog reda. Što se invertibilnosti tiče i za ove procese važi ono što je rečeno uopšte za AR procese konačnog reda, tj. oni su svi invertibilni.

Autokovarijacionu funkciju AR(1) procesa odredićemo tako što ćemo pomnožiti levu i desnu stranu izraza (4.34) sa  $X_{t-k}$ , za  $k \geq 0$ , a zatim odrediti očekivanu vrednost dobijenog izraza:

$$E(X_t X_{t-k}) - \phi_1 E(X_{t-1} X_{t-k}) = E(\varepsilon_t X_{t-k}), \quad (4.37)$$

odakle sledi

$$\gamma_k - \phi_1 \gamma_{k-1} = E(\varepsilon_t X_{t-k}). \quad (4.38)$$

Očekivana vrednost u izrazu (4.38) za  $k=0$  jednaka je varijansi, a za  $k > 0$  jednaka nuli. Tako smo dobili za  $k=0$  i  $k > 0$  jednakosti:

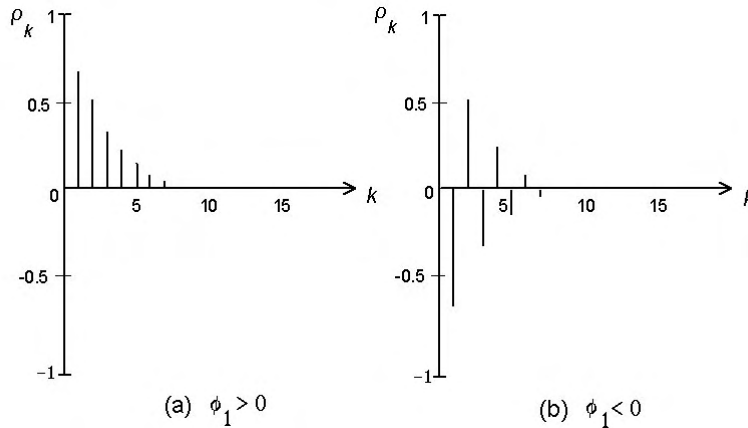
$$\gamma_0 - \phi_1 \gamma_{-1} = \sigma^2 = \gamma_0 - \phi_1 \gamma_1, \quad (4.39)$$

$$\gamma_1 - \phi_1 \gamma_{k-1} = 0, \quad k=1, 2, \dots \quad (4.40)$$

Zamenom  $\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0$  u (4.39) dobijamo  $\gamma_0 = \sigma^2 / (1 - \phi_1^2)$  a podelom (4.40) sa  $\gamma_0$  dobijamo diferencnu jednačinu:

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} \quad (4.41)$$

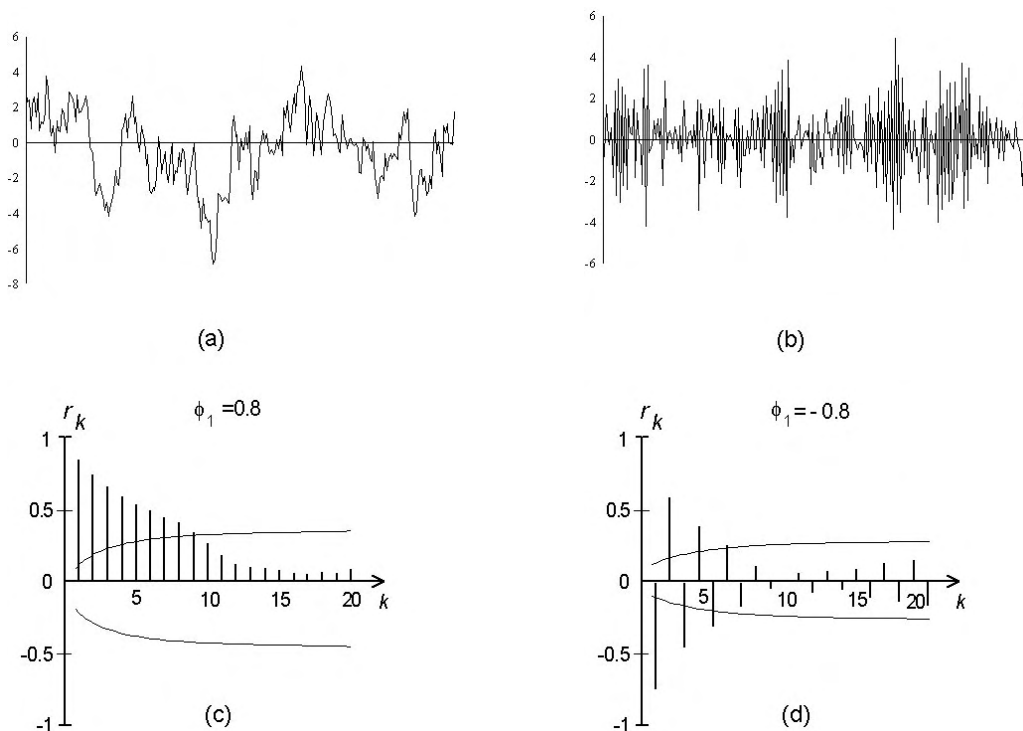
na osnovu koje određujemo autokorelacionu funkciju AR(1) procesa. Rešavanjem difrencne jednačine (4.41) dobijamo  $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} = \phi_1^2 \rho_{k-2} = \dots = \phi_1^{k-1} \rho_1 = \phi_1^k \rho_0 = \phi_1^k$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ . Ako je  $\phi_1 > 0$  vrednosti autokorelacione funkcije opadaju po eksponencijalnoj krivoj ka nuli, dok za  $\phi_1 < 0$  vrednosti autokorelacione funkcije alterniraju, opadajući ka nuli, odnosno predstavljaju kombinaciju dve opadajuće eksponencijalne krive. U oba slučaja opadanje je sporije ukoliko je  $\phi_1$  blisko granicama nestacionarnosti: +1 ili -1.



**Slika 4.3** Autokorelacione funkcije AR(1) procesa

Na Slici 4.3 prikazane su autokorelacione funkcije dva autoregresiona procesa prvog reda kod kojih je autokorelacioni koeficijent  $\phi_1$  (a) pozitivan, odnosno (b) negativan.

**Primer 4.2** Generisane su vremenske serije od po 500 opservacija iz dva AR(1) procesa čiji su koeficijenti  $\phi_1 = 0.8$  i  $\phi_1 = -0.8$  respektivno. Početna opservacija procesa jednaka je nuli, a za potrebe dalje analize zadržali smo poslednjih 250 opservacija. Opservacije procesa belog šuma generisane su iz normalnog standardizovanog rasporeda korišćenjem programa *Micro TSP 6.0*. Grafički prikazati dobijene vremenske serije i nacrtati njihove korelograme.



**Slika 4.4** Simulirane vremenske serije dva AR(1) procesa ((a) i (b)) i njihovi korelogrami ((c) i (d))

U međusobnom poređenju izgleda dve vremenske serije na Slici 4.4(a) i Slici 4.4(b) uočavamo da je za pozitivnu vrednost koeficijenta AR(1) procesa to kretanje relativno glatko, a da za negativnu vrednost koeficijenta serija mnogo češće menja smer, odnosno kažemo da alternira.

Na osnovu generisanih vremenskih serija izračunali smo i njihove autokorelacione koeficijente koje smo prikazali na Slici 4.4 (c) i Slici 4.4(d) zajedno sa njihovim 95% intervalima poverenja. Numeričke vrednosti autokorelacionih koeficijenata prezentirali smo u Tabeli 4.2 zajedno sa njihovim standardnim greškama ocene, pri čemu smo koristili Bartlettovu aproksimaciju.

**Tabela 4.2** Uzorački autokorelacioni koeficijenti i njihove standardne greške ocene za simulirane AR(1) procese

Model AR(1) procesa: $X_t = 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t : N(0,1), n = 250$										
$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_k$	0.85	0.74	0.66	0.60	0.55	0.50	0.46	0.41	0.35	0.26
$S_{r_k}$	0.06	0.10	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.16	0.17	0.17
Model AR(1) procesa: $X_t = -0.8X_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t : N(0,1), n = 250$										
$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_k$	-0.78	0.59	-0.46	0.38	-0.31	0.27	-0.19	0.11	-0.05	-0.01
$S_{r_k}$	0.06	0.09	0.11	0.12	0.12	0.12	0.13	0.13	0.13	0.13

Na osnovu 95% intervala poverenja autokorelacionih koeficijenata kod obe vremenske serije možemo utvrditi statistički značajnost populacionih autokorelacionih koeficijenata. Tako na osnovu prve vremenske serije konstatujemo da su statistički značajni prvih devet autokorelacionih koeficijenata, a na osnovu druge prvih šest. Ovde napominjemo da se zbog korišćenja vremenske serije konačne dužine mogu pokazati statistički značajnim samo autokorelacioni koeficijenti na prvih nekoliko docnji. U tom slučaju uzeti u obzir i način ponašanja, odnosno "isčezavanja" preostalih koeficijenata. U tom pogledu oba korelograma svojim izgledom u potpunosti reprodukuju ranije prikazane teorijske korelograme sa Slike 4.3. ■

#### 4.5.2 Autoregresioni procesi drugog reda

Ako u izrazu (4.32) zamenimo  $p = 2$  dobijamo autoregresioni proces drugog reda:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t, \quad (4.42)$$

koji se preko operatora docnje piše u obliku

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) X_t = \varepsilon_t. \quad (4.43)$$

Yule je prvi koristio AR(2) proces da bi opisao kretanje jednostavnog klatna. Zato se ovaj proces naziva i Yuleov proces. Kod AR(1) procesa uslov stacionarnosti je zahtevao da bude  $|\phi_1| < 1$ . Ekvivalentan uslov je da koren  $\phi_1^{-1}$  jednačine  $1 - \phi_1 B = 0$ , bude veći po apsolutnoj vrednosti od jedinice. Pri određivanju uslova stacionarnosti AR(2) procesa polazimo od kvadratne jednačine:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = (1 - g_1 B)(1 - g_2 B) = 0. \quad (4.44)$$

koju nazivamo i karakteristična jednačina, a čije smo recipročne vrednosti korena označili sa  $g_1$  i  $g_2$ . Na osnovu ekvivalentnog izraza karakteristične jednačine  $\phi_2 B^2 + \phi_1 B - 1 = 0$ , imamo:

$$g_1^{-1} = \frac{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2} \quad \text{i} \quad g_2^{-1} = \frac{-\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}. \quad (4.45)$$

Množeći i deleći koren  $g_1^{-1}$  sa  $(-\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2})$ , a koren  $g_2^{-1}$  sa  $(-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2})$ , dobićemo nakon sređivanja:

$$g_1 = \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \quad \text{i} \quad g_2 = \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}. \quad (4.46)$$

Uslov stacionarnosti AR(2) procesa zahteva da koreni karakteristične jednačine  $g_1^{-1}$  i  $g_2^{-1}$  leže van jediničnog kruga, odnosno da budu po modulu veća od jedinice:  $|g_1^{-1}| > 1$  i  $|g_2^{-1}| > 1$ . Ovi uslovi impliciraju uslove:  $|g_1| < 1$  i  $|g_2| < 1$ . Primenom Vietovih formula<sup>11</sup> na karakterističnu jednačinu:  $B^2 + (\phi_1/\phi_2)B - (1/\phi_2) = 0$ , dobijamo:

$$\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} = -\frac{\phi_1}{\phi_2} \quad \text{i} \quad \frac{1}{g_1} \cdot \frac{1}{g_2} = -\frac{1}{\phi_2}, \quad (4.47)$$

odakle se posle sređivanja dobija

$$g_1 + g_2 = \phi_1 \quad \text{i} \quad g_1 \cdot g_2 = -\phi_2. \quad (4.48)$$

Na osnovu uslova da je  $|g_1| < 1$  i  $|g_2| < 1$  potrebni uslovi stacionarnosti AR(2) procesa, bez obzira na to da li su koreni realni ili kompleksni, glase:

$$-2 < \phi_1 < 2, \quad -1 < \phi_2 < 1. \quad (4.49)$$

Koreni mogu biti realni ili kompleksni. Da bi koreni bili kompleksni mora biti ispunjen uslov:  $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ , što predstavlja dovoljan, a potreban uslov je  $\phi_2 < 0$ . U suprotnom slučaju, da bi koreni bili realni mora biti ispunjen uslov:  $\phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$  što znači da važi:

$$-1 < g_2 = \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \leq \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} = g_1 < 1. \quad (4.50)$$

Odavde imamo:  $-2 < \phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2$  i  $-2 < \phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2$ , što zajedno sa drugim ograničenjem (4.49) implicira sledeći sistem ograničenja na koeficijente AR(2) procesa:

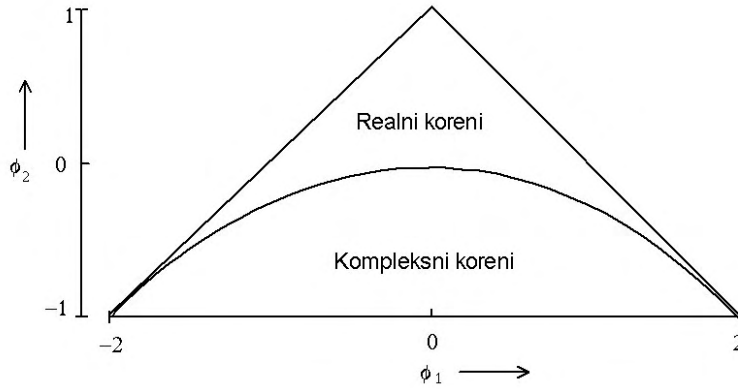
<sup>11</sup> Vietove formule uspostavljaju vezu između koeficijenata polinoma i njegovih korena.

$$\phi_1 + \phi_2 < 1, \quad -\phi_1 + \phi_2 < 1, \quad -1 < \phi_2 < 1. \quad (4.51)$$

Ove uslove nazivamo *uslovi stacionarnosti* AR(2) procesa. Prikazali smo ih na Slici 4.5 posebno označavajući oblast realnih, a posebno oblast kompleksnih korena.

Autokovarijacionu i autokorelacionu funkciju AR(2) procesa odredićemo tako što ćemo pomnožićemo (4.42) sa  $X_{t-k}$  i zatim odrediti očekivanu vrednost dobijenog izraza:

$$E(X_t X_{t-k}) - \phi_1 E(X_{t-1} X_{t-k}) - \phi_2 E(X_{t-2} X_{t-k}) = E(\varepsilon_t X_{t-k}), \quad (4.52)$$



**Slika 4.5** Oblast stacionarnih rešenja AR(2) procesa

odakle se dobija

$$\gamma_k - \phi_1 \gamma_{k-1} - \phi_2 \gamma_{k-2} = E(\varepsilon_t X_{t-k}). \quad (4.53)$$

Očekivana vrednost u poslednjem izrazu za  $k=0$  jednaka je varijansi procesa belog šuma  $\sigma^2$  a za  $k > 0$  jednaka je nuli. Tako dobijamo

$$\gamma_0 - \phi_1 \gamma_{-1} - \phi_2 \gamma_{-2} = \sigma^2 = \gamma_0 - \phi_1 \gamma_1 - \phi_2 \gamma_2, \quad (4.54)$$

$$\gamma_k - \phi_1 \gamma_{k-1} - \phi_2 \gamma_{k-2} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.55)$$

Podelom izraza (4.55) sa  $\gamma_0$  dobijamo autokorelacionu funkciju

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}, \quad k \geq 1. \quad (4.56)$$

Ako u izrazu (4.56) zamenimo  $k=1$  i  $k=2$  dobijamo:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}, \quad \rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2, \quad (4.57)$$

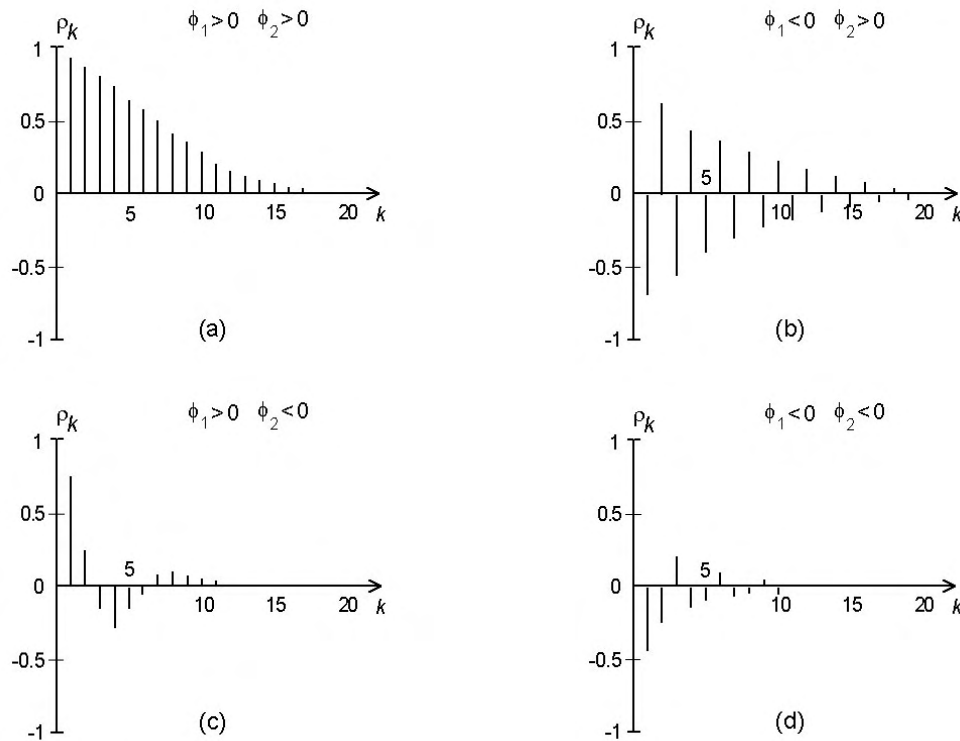
a preostale autokorelacione koeficijente dobijamo korišćenjem rekurzivne relacije (4.56).

Varijansu AR(2) procesa možemo odrediti u funkciji koeficijenata procesa i varijanse procesa belog šuma na osnovu izraza (4.54) koji pišemo u obliku

$$\gamma_0(1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2) = \sigma^2, \quad (4.58)$$

odakle zamenom vrednosti  $\rho_1$  i  $\rho_2$  na osnovu izraza (4.57) dobijamo varijansu od  $X_t$ :

$$\gamma_0 = \frac{1 - \phi_2}{1 + \phi_2} \frac{\sigma^2}{(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2} = \frac{1 - \phi_2}{1 + \phi_2} \frac{\sigma^2}{(\phi_1 + \phi_2 - 1)(\phi_2 - \phi_1 - 1)}. \quad (4.59)$$



**Slika 4.6** Autokorelacione funkcije AR(2) procesa

Ponašanje autokorelacione funkcije zavisi od koeficijenata  $\phi_1$  i  $\phi_2$ , a može se ispitati analizom rešenja diferencne jednačine (4.56) koja se može napisati u obliku:

$$\rho_k = A_1 (g_1^{-1})^k + A_2 (g_2^{-1})^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.60)$$

gde su  $A_1$  i  $A_2$  konstante čije vrednosti zavise od početnih vrednosti  $\rho_0 = 1$  i  $\rho_{-1} = \rho_1$ . Na Slici 4.6 prikazane su autokorelacione funkcije AR(2) procesa za četiri karakteristične kombinacije koeficijenata  $\phi_1$  i  $\phi_2$ . Kada su rešenja karakteristične jednačine realna (slučaj (a) i (b)) autokorelacione funkcije su kombinacija dve prigušene eksponencijalne funkcije, a za kompleksna rešenja (slučaj (c) i (d)) autokorelacione funkcije slede putanju prigušene sinusne funkcije.

### 4.5.3 Autoregresioni procesi $p$ -tog reda

Autoregresioni proces  $p$ -tog reda definisali smo izrazom (4.32), odnosno (4.33). Uslovi stacionarnosti  $AR(p)$  procesa iskazuju se preko karakteristične jednačine  $\phi(B)=0$ , ili što je ekvivalentno preko jednačine  $(1-g_1B)(1-g_2B)\dots(1-g_pB)=0$ , odnosno uslova  $|g_i^{-1}|>1$ , za  $i=1,2,\dots,p$  koje  $i$ -ti koren  $g_i^{-1}$  karakteristične jednačine mora da zadovoljava. Ova ograničenja impliciraju uslove prema kojima mora biti  $|g_i|<1$  za  $i=1,2,\dots,p$ .

Pri određivanju autokovarijacione funkcije ovog procesa koristimo isti postupak kao i u slučaju  $AR(2)$  procesa. Može se pokazati da je autokovarijaciona funkcija  $AR(p)$  procesa data izrazom

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \dots + \phi_p\gamma_{k-p}, \quad k > 0, \quad (4.61)$$

a autokorelaciona funkcija izrazom

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \dots + \phi_p\rho_{k-p}, \quad k > 0, \quad (4.62)$$

Varijansa procesa  $\gamma_0$  data je izrazom

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \dots - \phi_p\rho_p}. \quad (4.63)$$

Prvih  $p$  jednačina rekurzivne relacije (4.62) glase

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \rho_1\phi_2 + \dots + \rho_{p-1}\phi_p \\ \rho_2 &= \rho_1\phi_1 + \phi_2 + \dots + \rho_{p-2}\phi_p \\ &\dots \\ \rho_p &= \rho_{p-1}\phi_1 + \rho_{p-2}\phi_2 + \dots + \phi_p \end{aligned} \quad (4.64)$$

i nazivamo ih *Yule-Walkerove jednačine*. Na osnovu Yule-Walkerovih jednačina možemo uspostaviti relaciju između koeficijenata  $AR(p)$  procesa i  $p$  autokorelacionih koeficijenata. U matričnoj formi Yule-Walkerove jednačine su date izrazom

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{P}\boldsymbol{\phi} \quad (4.64)$$

gde su  $\boldsymbol{\rho}' = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p]$ ,  $\boldsymbol{\phi}' = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p]$  i  $\mathbf{P}$  autokorelaciona matrica. Rešavanjem matrične jednačine (4.65) po koeficijentima procesa dobijamo

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\rho}, \quad (4.66)$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}. \quad (4.67)$$

Ponašanje autokorelacione funkcije možemo ispitati na osnovu rešenja diferencne jednačine (4.62). Njeno rešenje se može napisati u obliku  $\rho_k = A_1(g_1^{-1})^k + \dots + A_p(g_p^{-1})^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , gde su  $A_j$  konstante čije vrednosti zavise od početnih uslova, a  $g_i^{-1}$  je  $i$ -ti koren karakteristične jednačine,  $i = 1, 2, \dots, p$ . Uz uslov stacionarnosti  $|g_i^{-1}| < 1$  konstatujemo da se ponašanje autokorelacione funkcije može opisati kao kombinacija prigušenih eksponencijalnih funkcija za slučaj realnih korena, a prigušenih sinusnih funkcija za slučaj kompleksnih korena.

## 4.6 PARCIJALNA AUTOKORELACIONA FUNKCIJA

Ispitivanjem autokorelacionih funkcija, odnosno korelograma, imaćemo poteškoća u određivanju reda AR procesa. To se može proveriti posmatranjem korelograma AR(1) procesa na Slici 4.3(a) i korelograma AR(2) procesa na Slici 4.5(a). Da bi razlikovali AR procese različitog reda uvodimo novi pojam, tzv. *parcijalnu autokorelacionu funkciju* (engl. *partial autocorrelation function*). U statistici je čest slučaj da je korelacija između dve promenljive ustvari rezultat njihove korelisanosti sa trećom promenljivom. Zato koristimo koeficijent parcijalne korelacije kao meru "neto" zavisnosti između dve promenljive nakon eliminisanja uticaja treće promenljive. U analizi vremenskih serija deo korelacije između  $X_t$  i  $X_{t-k}$  može se pripisati njihovoj korelaciji sa vrednostima serije na docnjama između vremenskog trenutka  $t$  i  $t-k$ . Korelaciju između  $X_t$  i  $X_{t-k}$ , nakon što je njihova uzajamna zavisnost od tih međufaznih promenljivih odstranjena, iskazujemo na osnovu parcijalne autokorelacije. Parcijalna autokorelacija na docnji  $k$  je parcijalni regresioni koeficijent u autoregresiji  $k$ -tog reda:

$$X_t = \phi_{k1}X_{t-1} + \phi_{k2}X_{t-2} + \dots + \phi_{kk}X_{t-k} + \varepsilon_t. \quad (4.68)$$

Ako u Yule-Walkerove jednačine (4.64) koje odgovaraju modelu (4.68) uvrstimo  $p = k$  i  $\phi_i = \phi_{ii}$  onda do vrednosti parcijalnih autokorelacionih koeficijenata možemo doći korišćenjem Cramerovog postupka primenjenog na taj sistem jednačina. Tako je

$$\text{za } k=1, \phi_{11} = \rho_1, \text{ za } k=2, \phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}, \text{ za } k=3, \phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}, \quad (4.69)$$

a u opštem slučaju je



$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}. \quad (4.70)$$

Matrica u brojiocu je ista kao i matrica u imeniocu osim što je poslednja kolona zamenjena sa  $[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p]$ . Parcijalna autokorelaciona funkcija ima iste osobine kao i autokorelaciona funkcija, pa je stoga na sličan način interpretiramo. Grafički prikaz parcijalnih autokorelacionih koeficijenata u odnosu na dužinu docnje naziva se *parcijalni korelogram*. Njega u narednoj glavi koristimo u postupku identifikacije odgovarajućeg AR modela vremenske serije.

Odredimo vrednosti parcijalnih autokorelacionih koeficijenata za do sada razmatrane procese. Na osnovu definicije parcijalnih autokorelacionih koeficijenata direktno sledi da su oni kod procesa belog šuma jednaki nuli na svim docnjama osim nulte, gde je po definiciji  $\phi_{00} = 1$ . Korišćenjem izraza (4.70) možemo odrediti parcijalne autokorelacione koeficijente definisanih AR procesa. Tako imamo za:

$$\text{AR}(1) \text{ proces: } \phi_{11} = \rho_1 = \phi_1, \quad \text{a } \phi_{kk} = 0, \text{ za } k > 1.$$

$$\text{AR}(2) \text{ proces: } \phi_{11} = \rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}, \quad \phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \phi_2, \quad \text{a } \phi_{kk} = 0, \text{ za } k > 2.$$

$$\text{AR}(p) \text{ proces: } \phi_{11} = \rho_1, \quad \phi_{22} \neq 0, \dots, \phi_{pp} \neq 0 \quad \text{a } \phi_{kk} = 0, \text{ za } k > p.$$

Zaključujemo da su parcijalni autokorelacioni koeficijenti jednaki nuli za docnje veće od reda AR procesa. Za  $\text{AR}(p)$  proces poslednji parcijalni autokorelacioni koeficijent  $\phi_{pp}$  jednak je poslednjem autoregresionom koeficijentu  $\phi_p$ . Ovo je korisno svojstvo parcijalne autokorelacione funkcije u postupku identifikacije AR modela vremenske serije.

Do uzoračke parcijalne autokorelacione funkcije možemo doći zamenom uzoračkih autokorelacionih koeficijenata u izrazu (4.70) ili ocenom modela (4.64) kod koga uzastopno povećavamo dužinu docnje. Međutim, da bismo izbegli ovaj računski glomazan i vremenski skup postupak, koristimo Durbinov rekurzivni postupak. Durbin (1960) je dao efikasan metod za dobijanje rešenja Yule-Walkerovih jednačina, a time i za dobijanje populacione i uzoračke parcijalne autokorelacione funkcije. Durbinove rekurzivne formule glase:

$$\phi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j} \rho_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j} \rho_j}, \quad \phi_{kj} = \phi_{k-1,j} - \phi_{kk} \phi_{k-1,k-j}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1 \quad (4.71)$$

Pokazalo se da Durbinova rekurzivna formula kod uzoračke parcijalne autokorelacione funkcije nije uvek stabilna u numeričkom smislu. Numerički stabilnije rešenje daje rekurzivni postupak koji je predložio Pagano (Pagano) (1972).

**Primer 4.3** Na osnovu podataka i dobijenih ocena autokorelacionih koeficijenata u Primeru 4.1 izračunati prve tri realizovane vrednosti uzoračkih parcijalnih autokorelacionih koeficijenata.

U Primeru 4.1 dobijene su ocene:  $\hat{\rho}_1 = -0.7157$ ,  $\hat{\rho}_2 = 0.1961$ ,  $\hat{\rho}_3 = 0.2451$ . Njihovim korišćenjem u Durbinovoj rekurzivnoj formuli izračunavamo:

$$\hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}_1 = -0.7157,$$

$$\hat{\phi}_{22} = \frac{\hat{\rho}_2 - \hat{\rho}_1^2}{1 - \hat{\rho}_1^2} = \frac{0.1961 - (-0.7157)^2}{1 - (-0.7157)^2} = -0.6481,$$

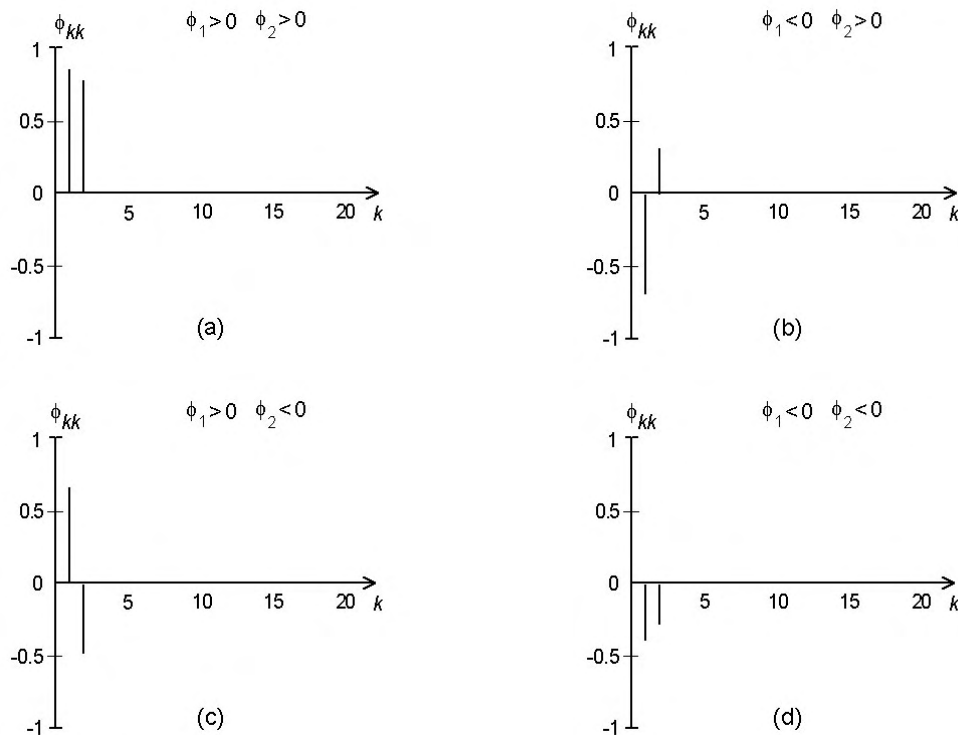
$$\hat{\phi}_{21} = \hat{\phi}_{11} - \hat{\phi}_{22} \hat{\phi}_{11} = (-0.7157) - (-0.6481)(-0.7157) = -1.1795,$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{33} &= \frac{\hat{\rho}_3 - \hat{\phi}_{21} \hat{\rho}_2 - \hat{\phi}_{22} \hat{\rho}_1}{1 - \hat{\phi}_{21} \hat{\rho}_1 - \hat{\phi}_{22} \hat{\rho}_2} \\ &= \frac{0.2451 - (-1.1795)(0.1961) - (-0.6481)(-0.7157)}{1 - (-1.1795)(-0.7157) - (-0.6481)(0.1961)} = 0.0444. \end{aligned}$$

Do istog rezultata smo mogli doći korišćenjem izraza (4.70), odnosno na osnovu Cramerovog postupka rešavanja Yule-Walkerovih jednačina. ■

Pretpostavimo da je stohastički proces opisan AR procesom  $p$ -tog reda. Neka smo ocenili  $p+m$  parcijalnih autokorelacionih koeficijenata korišćenjem Yule-Walkerovih jednačina. Quenouille (Kveni) (1947) je pokazao da za  $m > 0$ ,  $\sqrt{n} \hat{\phi}_{kk}$  asimptotski normalno raspoređeno kao  $N(0,1)$ . Znači da se  $\pm 1.96/\sqrt{n}$  može koristiti kao 95% interval poverenja populacionih parcijalnih autokorelacionih koeficijenata. Ukoliko je vrednost  $\hat{\phi}_{kk}$  unutar ovih granica prihvatili bismo hipotezu o nultoj vrednosti odgovarajućeg populacionog parcijalnog autokorelacionog koeficijenta. Kako su statistike

$\sqrt{n}\hat{\phi}_{kk}$  asimptotski nekorelisane, u velikim uzorcima će  $n\sum_{j=1}^m \hat{\phi}_{p+j,p+j}^2$  imati asimptotski  $\chi^2$  – raspored sa  $m$  stepeni slobode.



**Slika 4.7** Parcijalne autokorelacione funkcije AR(2) procesa

Za četiri AR(2) procesa čije su autokorelacione funkcije prezentirane na Slici 4.6 odredili smo parcijalne autokorelacione koeficijente i prikazali ih na Slici 4.7. Izgled parcijalnog korelograma uslovljen je vrednošću i predznakom autoregresionih koeficijenata, a svi parcijalni autokorelacioni koeficijenti na docnjama većim od 2 jednaki su nuli.

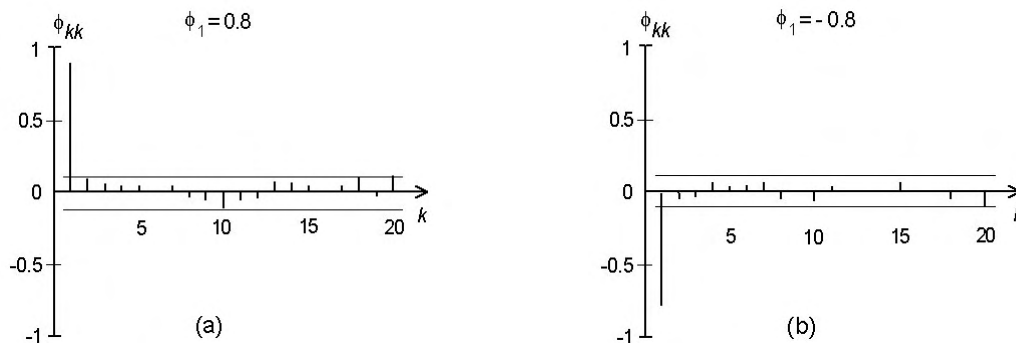
**Primer 4.4** Generisane su vremenske serije od po 500 opservacija iz dva AR(1) procesa čiji su koeficijenti  $\phi_1 = 0.8$  i  $\phi_1 = -0.8$  respektivno (videti Primer 4.2). Početna opservacija procesa jednaka je nuli, a za potrebe dalje analize zadržali smo poslednjih 250 opservacija. Opservacije procesa belog šuma generisane su iz normalnog standardizovanog rasporeda. Za dobijene vremenske serije izračunati i nacrtati njihove parcijalne korelograme.

Na osnovu generisanih vremenskih serija izračunali smo njihove parcijalne autokorelacione koeficijente koje smo prikazali na Slici 4.8(a) i Slici 4.8(b) zajedno sa njihovim 95% intervalima poverenja. Numeričke

vrednosti autokorelacionih koeficijenata prezentirali smo u Tabeli 4.3 kao i njihove standardne greške ocene.

**Tabela 4.3** Uzorački parcijalni autokorelacioni koeficijenti i njihove standardne greške ocene za simulirane AR(1) procese

Model AR(1) procesa: $X_t = 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t$ , $\varepsilon_t : N(0,1)$ , $n = 250$										
$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{\phi}_{kk}$	0.85	0.09	0.06	0.05	0.26	0.00	0.02	-0.02	-0.09	-0.14
$S_{\hat{\phi}_{kk}}$	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12
Model AR(1) procesa: $X_t = -0.8X_{t-1} + \varepsilon_t$ , $\varepsilon_t : N(0,1)$ , $n = 250$										
$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.78	-0.03	-0.03	0.08	0.03	0.05	0.10	-0.07	-0.01	-0.09
$S_{\hat{\phi}_{kk}}$	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12



**Slika 4.8** Parcijalni korelogrami simuliranih vremenskih serija dva AR(1) procesa

Na osnovu 95% intervala poverenja parcijalnih autokorelacionih koeficijenata kod obe vremenske serije možemo utvrditi statistički značajnost populacionih parcijalnih autokorelacionih koeficijenata. Tako na osnovu obe vremenske serije konstatujemo da je statistički značajan samo prvi parcijalni autokorelacioni koeficijent. Istini za volju kod prve vremenske serije statistički su značajni i koeficijenti na 10. i 20. doznji. Međutim, pri ocenjivanju velikog broja koeficijenata (20 parcijalnih autokorelacionih koeficijenata) može se pokazati statistički značajnim barem jedan od njih čak i u slučaju kada je on u populaciji zaista jednak nuli. U tom slučaju taj populacioni koeficijent možemo tretirati kao da je jednak nuli, pogotovo ako se javlja na visokim doznjama. Oba parcijalna korelograma svojim izgledom u potpunosti reprodukuju ranije prikazane teorijske korelograme. ■

## 4.7 PROCESI POKRETNIH PROSEKA (M A PROCESI)

Za proces  $\{X_t\}$  kažemo da predstavlja *proces pokretnih proseka reda  $q$*  ako je

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (4.72)$$

koji se korišćenjem operatora docnje piše u sažetom obliku

$$X_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (4.73)$$

gde je  $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ . Proces pokretnih proseka je koristan u modeliranju pojava kod kojih događaji uzrokuju trenutne efekte, a koji traju kratak period vremena. Istraživanja Slutzkog o uticaju pokretnih proseka na slučajne događaje rezultirala su u definisanju ovog procesa.

Ako u linearnom procesu opisanog izrazom (4.19)  $\psi$ -ponderi uzmu sledeće vrednosti:  $\psi_1 = -\theta_1$ ,  $\psi_2 = -\theta_2$ , ...,  $\psi_q = -\theta_q$ ,  $\psi_j = 0$ , za  $j > q$  dobićemo proces pokretnih proseka (4.72). Prema (4.22) varijansa ovog procesa je  $\sigma^2(1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) < \infty$ , pa zaključujemo da će konačni proces pokretnih proseka uvek biti stacionaran. Ovaj proces označavamo kratko kao MA( $q$ ) proces.

### 4.7.1 Procesi pokretnih proseka prvog reda

Kada u izrazu (4.72) zamenimo  $q = 1$  dobijamo pokretni prosek prvog reda:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} = (1 - \theta_1 B)\varepsilon_t. \quad (4.74)$$

Za MA(1) proces očigledno je  $E(X_t) = 0$ . Odredimo autokovarijacionu i autokorelacionu funkciju za ovaj proces. Linearna reprezentacija (4.19) za  $\psi_1 = -\theta_1$  i  $\psi_j = 0$ , za  $j > 1$  ima varijansu  $\gamma_0 = \sigma^2(1 + \theta_1^2)$  i autokovarijanse  $\gamma_1 = -\sigma^2\theta_1$  i  $\gamma_k = 0$ , za  $k > 1$ . Na osnovu toga autokorelaciona funkcija je

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}, \quad \rho_k = 0, \quad \text{za } k > 1, \quad (4.75)$$

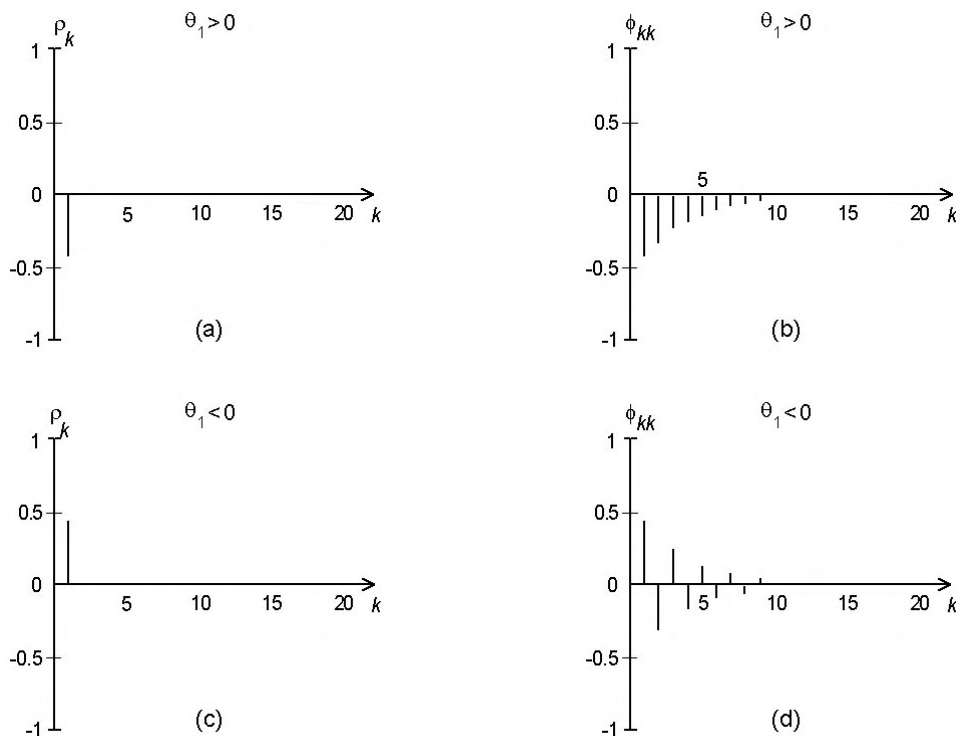
odakle sledi da je tekuća vrednost procesa je korelirana samo sa prethodnom i potonjom vrednošću što sugerise da "memorija" procesa iznosi samo jedan period.

Ukažimo na dve karakteristike MA procesa:

1. Za ma koju vrednost koeficijenta  $\theta_1$  MA(1) proces  $X_t = (1 - \theta_1 B)\varepsilon_t$  i  $X_t = (1 - 1/\theta_1 B)\varepsilon_t$  imaće istu autokorelacionu funkciju.
2. Za MA(1) proces vrednosti autokorelacione funkcije su ograničene, tj.  $-0.5 < \rho_k < 0.5$ , za svako  $k$ .

To se može pokazati na osnovu autokorelacione funkcije  $\rho_k$  tako što ćemo je na osnovu izraza (4.75) pisati kao kvadratnu jednačinu  $\rho_k \theta_1^2 + \theta_1 + \rho_k = 0$ . Kako  $\theta_1$  mora biti realno, sledi da je  $|\rho_k| < 0.5$ . Međutim, obe vrednosti koeficijenata  $\theta_1$  i  $1/\theta_1$  zadovoljavaju kvadratnu jednačinu, pa će dva različita MA(1) procesa imati identičnu autokorelacionu funkciju. Time nismo u mogućnosti jednoznačno identifikovati MA proces na osnovu date autokorelacione funkcije.

Konstatovali smo da je svaki proces pokretnih proseka stacionaran jer sadrži konačan broj pondera. Kao što smo istakli, autoregresioni proces se može predstaviti preko linearnog procesa (4.19) pogodnim izborom  $\psi$ -pondera. Nekad je poželjno predstaviti MA proces u formi AR reprezentacije. U tom cilju MA(1) proces pišemo u obliku  $\varepsilon_t = X_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ , a zatim uzastopno zamenjujemo  $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$  izrazima  $X_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2}, X_{t-2} - \theta_1 \varepsilon_{t-3}, \dots$ . Nakon sređivanja dobijamo:  $\varepsilon_t = X_t + \theta_1 X_{t-1} + \theta_1^2 X_{t-2} + \dots$ , odnosno  $X_t = (-\theta_1 X_{t-1} - \theta_1^2 X_{t-2} - \dots) + \varepsilon_t$ . Uz uslov  $|\theta_1| < 1$  dobili smo konvergentnu autoregresionu reprezentaciju MA(1) procesa. Dakle, ako je  $|\theta_1| < 1$ , MA(1) proces se može "invertovati", tj. izraziti kao AR( $\infty$ ) proces. U takvom slučaju kažemo da je MA(1) proces *invertibilan*, a navedeni uslov nazivamo *uslovom invertibilnosti*. Pondere u gornjem beskonačnom AR procesu nazivamo  $\pi$ -ponderi. Oni će konvergirati ako je  $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$ . Kako je  $\pi_j = -\theta_1^j$ ,  $\pi$ -ponderi će konvergirati ako  $|\theta_1| < 1$ , tj. ako je proces invertibilan.



**Slika 4.9** Obična i parcijalna autokorelaciona funkcija MA(1) procesa

Korišćenjem izraza (4.70) ili na osnovu Durbinove rekurzivne formule (4.71) možemo odrediti parcijalne autokorelacione koeficijente MA(1) procesa koji glase:

$$\phi_{kk} = \frac{-\theta_1^k (1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^{2(k+1)}}, \text{ za } k \geq 1. \quad (4.76)$$

Nasuprot autokorelacionoj funkciji koja se prekida posle prve docnje, parcijalna autokorelaciona funkcija za MA(1) model lagano odumire na dva načina u zavisnosti od predznaka  $\theta_1$ , odnosno predznaka  $\rho_1$ . Ako je  $\theta_1$  negativnog predznaka, vrednost parcijalne autokorelacione funkcije na prvom docnji je pozitivna da bi zatim alternirala; u suprotnom opada uzimajući samo negativne vrednosti kao što je to prikazano na Slici 4.9. Na osnovu parcijalnih korelograma može se uočiti da je  $|\phi_{kk}| < 1/2$ .

#### 4.7.2 Procesi pokretnih proseka drugog reda

Ako je u izrazu (4.72) zamenimo  $q = 2$  dobijamo proces pokretnog proseka drugog reda

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}, \quad (4.77)$$

koji se korišćenjem operatora docnje piše u obliku

$$X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) \varepsilon_t. \quad (4.78)$$

Kao svaki proces pokretnog proseka konačnog reda i MA(2) proces je stacionaran. Da bi bio invertibilan koreni jednačine  $(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) = 0$  moraju biti po modulu manji od jedinice. Taj uslov je ispunjen kada je:  $\theta_1 + \theta_2 < 1$ ,  $\theta_2 - \theta_1 < 1$ ,  $-1 < \theta_2 < 1$ , što je analogno uslovima stacionarnosti AR(2) procesa.

Do autokovarijacione funkcije MA(2) procesa možemo doći na osnovu autokovarijacione funkcije linearne reprezentacije (4.19) zamenom pondera  $\psi_1 = -\theta_1$ ,  $\psi_2 = -\theta_2$  i  $\psi_j = 0$ , za  $j > 2$ . Tako dobijamo autokovarijacione koeficijente:

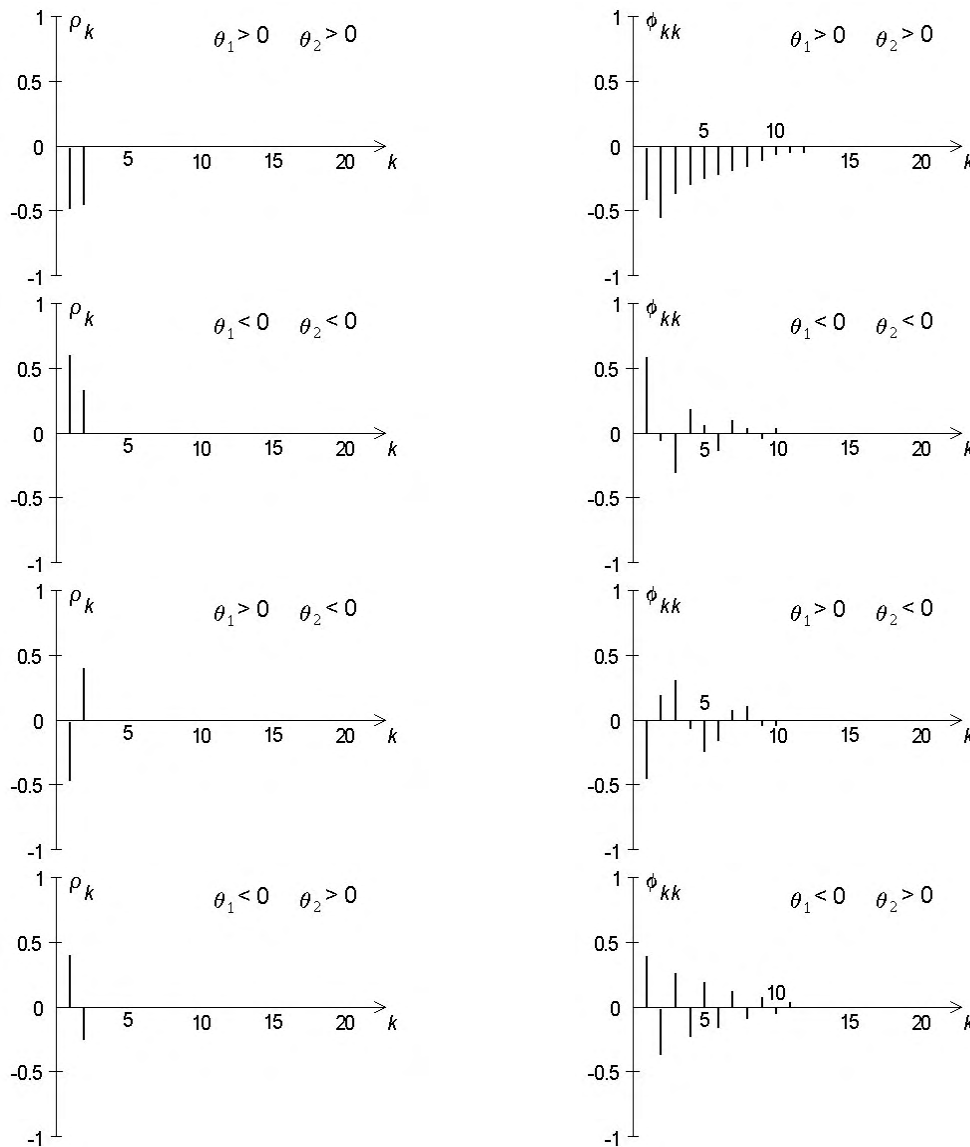
$$\gamma_0 = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2), \gamma_1 = \sigma^2(-\theta_1 + \theta_1\theta_2), \gamma_2 = -\sigma^2\theta_2, \gamma_k = 0, \text{ za } k > 2, \quad (4.79)$$

a zatim direktno autokorelacione koeficijente:

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1(1 - \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, \rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, \rho_k = 0, \text{ za } k > 2. \quad (4.80)$$

Model implicira da su opservacije međusobom nekorelisane ako su udaljene više od dva perioda jedna od druge. Korišćenjem izraza (4.70) i osobine  $\rho_k = 0$ , za  $k > 2$  MA(2) procesa, dobijamo parcijalne autokorelacione koeficijente

$$\phi_{11} = \rho_1, \phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}, \phi_{33} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2 - \rho_2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1 - \rho_2)}, \dots \quad (4.81)$$



**Slika 4.10** Obitna i parcijalna autokorelaciona funkcija za MA(2) proces

Vrednosti ove funkcije eksponencijalno opadaju ili osciliraju sledeći prigušenu sinusoidu u zavisnosti od predznaka i veličine koeficijenata  $\theta_1$  i  $\theta_2$ . Na Slici 4.10 prikazane su obična i parcijalna autokorelaciona funkcija svih karakterističnih slučajeva MA(2) procesa.

### 4.7.3 Procesi pokretnih proseka $q$ -tog reda

Izrazom (4.72) definisan je pokretni prosek  $q$ -tog reda. Za ovaj proces autokovarijacionu funkciju možemo dobiti na osnovu autokovarijacione funkcije linearnog procesa (4.19) ako su  $\psi$ -ponderi:  $\psi_1 = -\theta_1, \dots, \psi_q = -\theta_q, \psi_j = 0$ , za  $j > q$ . Tada je



$$\gamma_0 = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2), \quad \gamma_k = \sigma^2(-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q), \quad k = 1, 2, \dots, q$$

$$\gamma_k = 0, \quad \text{za } k > q, \quad (4.82)$$

a autokorelaciona funkcija je

$$\rho_k = \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad \rho_k = 0, \quad \text{za } k > q. \quad (4.83)$$

Kao što se može videti, autokorelaciona funkcija MA( $q$ ) procesa jednaka je nuli nakon  $q$  doznji. Ova osobina omogućava nam identifikaciju reda procesa pokretnih proseka. Na osnovu ponašanja parcijalne autokorelacione funkcije MA(1) i MA(2) procesa može se sagledati ponašanje parcijalne autokorelacione funkcije kod MA( $q$ ) procesa. Ona "odumire" kao mešavina eksponencijalnog opadanja i/ili prigušenih sinusnih oscilacija u zavisnosti od prirode korena karakteristične jednačine. Ako su neki koreni kompleksni tada će parcijalna autokorelaciona funkcija sadržati prigušene sinusne oscilacije.

Uslovi invertibilnosti MA( $q$ ) iskazuju se preko karakteristične jednačine  $\theta(B) = 0$ , ili što je ekvivalentno preko jednačine  $(1 - h_1 B) \dots (1 - h_q B) = 0$ , odnosno uslova  $|h_i^{-1}| > 1$  koje  $i$ -ti koren karakteristične jednačine  $h_i^{-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ , mora zadovoljiti. Ova ograničenja impliciraju uslove prema kojima mora biti  $|h_i| < 1$  da bi MA( $q$ ) proces bio invertibilan.

#### 4.8 DUALNA VEZA IZMEĐU A R ( $p$ ) I M A ( $q$ ) PROCESA

Pri razmatranju AR(1) procesa ukazano je na relaciju između koeficijenata modela i  $\psi$ -pondera. Ona predstavlja konkretizaciju opšte relacije koja se može uspostaviti između koeficijenata AR( $p$ ) procesa i MA reprezentacije (4.19) linearnog procesa. Da bismo uspostavili navedenu vezu posmatrajmo stacionarni AR( $p$ ) proces

$$\phi(B)X_t = \varepsilon_t, \quad (4.84)$$

koji možemo izraziti u MA formi kao

$$X_t = \frac{1}{\phi(B)} \varepsilon_t = \psi(B)\varepsilon_t, \quad (4.85)$$

pri čemu je

$$\phi(B)\psi(B)\varepsilon_t = 1. \quad (4.86)$$

Izrazom (4.86) zahtevamo da odgovarajući koeficijenti uz operator doznje na levoj i desnoj strani budu međusobom jednaki. Za ilustraciju postupka određivanja relacije

između koeficijenata AR procesa i  $\psi$ -pondera poslužit ćemo se AR(2) procesom. Sada izraz (4.86) glasi:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = 1. \quad (4.87)$$

Množenjem polinoma u zagradama i izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata uz  $B^j$ ,  $j \geq 0$  na levoj i na desnoj strani izraza (4.87) dobijamo sledeće relacije:

$$\begin{aligned} B^0: \quad \psi_1 - \phi_1 &= 0 & \Rightarrow & \psi_1 = \phi_1 \\ B^1: \quad \psi_2 - \phi_1 \psi_1 - \phi_2 &= 0 & \Rightarrow & \psi_2 = \psi_1 \phi_1 + \phi_2 = \phi_1^2 + \phi_2 \\ B^2: \quad \psi_3 - \phi_1 \psi_2 - \phi_2 \psi_1 &= 0 & \Rightarrow & \psi_3 = \psi_2 \phi_1 + \psi_1 \phi_2 = \phi_1^3 + 2\phi_1 \phi_2 \\ & \dots & & \dots \end{aligned} \quad (4.88)$$

Na osnovu ovih rezultata induktivno možemo zaključiti da važi sledeća rekurzivna relacija za određivanje  $\psi$ -pondera:

$$\psi_1 = \phi_1, \quad \psi_j = \psi_{j-1} \phi_1 + \psi_{j-2} \phi_2, \quad \text{za } j \geq 2. \quad (4.89)$$

Korišćenjem ove rekurzivne relacije za AR(1) proces kada je  $\phi_2 = 0$  dobijamo da je  $\psi_j = \phi_1^j$ , za  $j \geq 0$ . Na osnovu izloženog kažemo da je stacionarni AR proces konačnog reda ekvivalentan MA procesu beskonačnog reda.

S druge strane polazimo od invertibilnog MA( $q$ ) procesa

$$X_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (4.90)$$

koji pišemo u sledećoj AR formi

$$\pi(B)X_t = \frac{1}{\theta(B)} X_t = \varepsilon_t. \quad (4.91)$$

Uzmimo kao primer MA(2) proces kod koga je

$$(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 - \dots)X_t = \frac{1}{(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)} X_t = \varepsilon_t, \quad (4.92)$$

odakle na osnovu jednakosti leve i desne strane imamo

$$(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 - \dots) = 1. \quad (4.93)$$

Jednakost ova dva polinoma podrazumeva jednakost koeficijenata uz odgovarajuće operatore docnje. Nakon množenja dva polinoma u zagradama i izjednačavanjem koeficijenata uz operatore docnje dobijamo:

$$\begin{aligned} B^0: \quad -\pi_1 - \theta_1 &= 0 & \Rightarrow & \pi_1 = -\theta_1 \\ B^1: \quad -\pi_2 + \pi_1 \theta_1 - \theta_2 &= 0 & \Rightarrow & \pi_2 = \pi_1 \theta_1 - \theta_2 = -\theta_1^2 - \theta_2 \\ B^2: \quad -\pi_3 + \pi_2 \theta_1 + \pi_1 \theta_2 &= 0 & \Rightarrow & \pi_3 = \pi_2 \theta_1 + \pi_1 \theta_2 \\ & \dots & & \dots \end{aligned} \quad (4.94)$$

Na osnovu ovih rezultata induktivno možemo zaključiti da važi sledeća rekurzivna relacija:  $\pi_j = \pi_{j-1}\theta_1 + \pi_{j-2}\theta_2$ , za  $j \geq 3$ . Korišćenjem ove rekurzivne relacije za MA(1) proces kada je  $\theta_2 = 0$  dobijamo  $\pi_j = -\theta_1^j$ , za  $j \geq 1$ . Na osnovu izloženog kažemo da je invertibilni MA proces konačnog reda ekvivalentan AR procesu beskonačnog reda.

Sumirajući dobijene rezultate može se reći da stacionarnom AR( $p$ ) procesu konačnog reda odgovara MA proces beskonačnog reda, a da invertibilnom MA( $q$ ) procesu konačnog reda odgovara AR proces beskonačnog reda. Uzajamna veza uspostavljena između AR i MA procesa našla je svoga odraza i u međusobnom odnosu njihovih običnih i parcijalnih autokorelacionih funkcija. Naime, AR( $p$ ) proces ima autokorelacione koeficijente koji lagano "odumiru" i parcijalne autokorelacione koeficijente koji su posle  $p$  docnji jednaki nuli. Za razliku od ovoga MA( $q$ ) proces ima autokorelacione koeficijente koji su posle  $q$  docnji jednaki nuli, a parcijalni autokorelacioni koeficijenti lagano "odumiru".

#### 4.9 A R M A PROCESI

Pokazali smo za stacionarni i invertibilni proces da se može izraziti ili u MA ili u AR formi. Međutim, obe reprezentacije mogu sadržavati relativno mnogo koeficijenata što smanjuje efikasnost ocenjivanja takvih modela.

Opštiji pristup izražavanju  $\psi$  – pondera u izrazu (4.19) polazi od toga da se polinom  $\psi(B)$  predstavi kao količnik dva konačna polinoma po operatoru docnje  $B$ :

$$\psi(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} = \frac{(1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)}{(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)}. \quad (4.95)$$

Na osnovu toga ARMA( $p, q$ ) proces definišemo kao

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (4.96)$$

koji se preko operatora docnje piše u obliku

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) X_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t \quad (4.97)$$

odnosno u sažetom obliku

$$\phi(B) X_t = \theta(B) \varepsilon_t. \quad (4.98)$$

Da bi proces bio invertibilan koreni karakteristične jednačine  $(1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) = 0$  moraju biti veći po modulu od jedinice. Da bi proces bio stacionaran, zahtev je da koreni karakteristične jednačine budu veći po modulu od jedinice. Takođe pretpostavljamo da ta dva polinoma nemaju zajedničkih korena.

Ako izrazimo ARMA( $p, q$ ) proces prema izrazu (4.96) u obliku

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (4.99)$$

možemo odrediti njegovu autokovarijacionu i autokorelacionu funkciju. Množenjem leve i desne strane (4.99) sa  $X_{t-k}$  i određivanjem očekivane vrednosti tog izraza dobijamo

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + E(X_{t-k} \varepsilon_t) - \theta_1 E(X_{t-k} \varepsilon_{t-1}) - \dots - \theta_q E(X_{t-k} \varepsilon_{t-q}). \quad (4.100)$$

Kako je  $E(X_{t-k} \varepsilon_{t-i}) = 0$ , za  $k > i$ , dobijamo autokovarijacionu funkciju

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}, \quad k \geq (q+1), \quad (4.101)$$

a autokorelaciona funkcija glasi

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}, \quad k \geq (q+1) \quad (4.102)$$

Kao kod AR( $p$ ) procesa (izraz (4.62)) i autokorelaciona funkcija ARMA( $p, q$ ) procesa "odumire" ka nuli nakon  $q$  docnji što zavisi samo od autoregresionih koeficijenata procesa. Međutim, bitna razlika je u tome što prvih  $q$  autokorelacionih koeficijenata ARMA procesa,  $\rho_q, \rho_{q-1}, \dots, \rho_1$ , zavise kako od autoregresionih tako i od koeficijenata pokretnih proseka. Slično je sa parcijalnom autokorelacionom funkcijom koja je pod uticajem MA dela procesa. Bitno je uočiti ovu razliku koja se tiče izgleda korelograma ARMA i druga dva procesa jer je koristimo u modeliranju konkretne vremenske serije.

### 4.9.1 ARMA(1,1) procesi

Najjednostavniji proces iz klase mešovutih procesa jeste ARMA(1,1) proces. Definišemo ga sa

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \quad (4.103)$$

odnosno korišćenjem operatora docnje pišemo ga u obliku

$$(1 - \phi B) X_t = (1 - \theta_1 B) \varepsilon_t. \quad (4.104)$$

Očito su AR(1) i MA(1) procesi specijalni slučajevi ARMA(1,1) procesa. Uslov stacionarnosti zahteva da je  $|\phi_1| < 1$ , a uslov invertibilnosti da je  $|\theta_1| < 1$ . Do uslova invertibilnosti, odnosno stacionarnosti možemo doći iskazujući ARMA(1,1) proces u čistom AR ili MA obliku. U prvom slučaju, korišćenjem AR forme  $\pi(B) X_t = \varepsilon_t$ , za  $\pi$ -pondere dobijamo

$$\pi(B) = (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) = \frac{(1 - \theta_1 B)}{(1 - \phi B)}, \quad (4.105)$$

odakle je

$$(1 - \theta_1 B)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) = (1 - \phi B) \quad (4.106)$$

odnosno

$$[1 - (\pi_1 + \theta_1)B - (\pi_2 - \pi_1\theta_1)B^2 - (\pi_3 - \pi_2\theta_1)B^3 - \dots] = (1 - \phi_1 B). \quad (4.107)$$

Odakle se izjednačavanjem koeficijenata uz  $B$  sa obe strane izraza (4.107) dobija rekurzivna relacija

$$\pi_j = \theta_1^{j-1}(\phi_1 - \theta_1), \text{ za } j \geq 1. \quad (4.108)$$

Beskonačni AR proces biće stacionaran ako  $\pi$ -ponderi konvergiraju, što će biti ako je  $|\theta_1| < 1$  (uslov invertibilnosti).

Slično u drugom slučaju, korišćenjem MA forme  $X_t = \psi(B)\varepsilon_t$ , za  $\psi$ -pondere dobijamo

$$\psi(B) = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = \frac{(1 - \theta_1 B)}{(1 - \phi_1 B)}, \quad (4.109)$$

odnosno

$$(1 - \phi_1 B)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = (1 - \theta_1 B) \quad (4.110)$$

što se može napisati u obliku

$$[1 + (\psi_1 - \phi_1)B + (\psi_2 - \psi_1\phi_1)B^2 + \dots] = (1 - \theta_1 B) \quad (4.111)$$

Odakle dobijamo rekurzivnu relaciju

$$\psi_j = \phi_1^{j-1}(\phi_1 - \theta_1), \text{ za } j \geq 1. \quad (4.112)$$

Beskonačni MA proces biće invertibilan ako  $\psi$ -ponderi konvergiraju, što će biti ako je  $|\phi_1| < 1$  (uslov stacionarnosti).

Odredimo autokovarijacionu, odnosno autokorelacionu funkciju ovog procesa. U tom cilju levu i desnu stranu izraza (4.104) pomnožićemo sa  $X_{t-k}$ , a zatim potražiti očekivanu vrednost dobijenog izraza. Tako dobijamo

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + E(X_{t-k} \varepsilon_t) - \theta_1 E(X_{t-k} \varepsilon_{t-1}). \quad (4.113)$$

Za  $k=0$  dobijamo

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + E(X_t \varepsilon_t) - \theta_1 E(X_t \varepsilon_{t-1}). \quad (4.114)$$

Prva očekivana vrednost jednaka je  $\sigma^2$ , a za drugu očekivanu vrednosti imamo

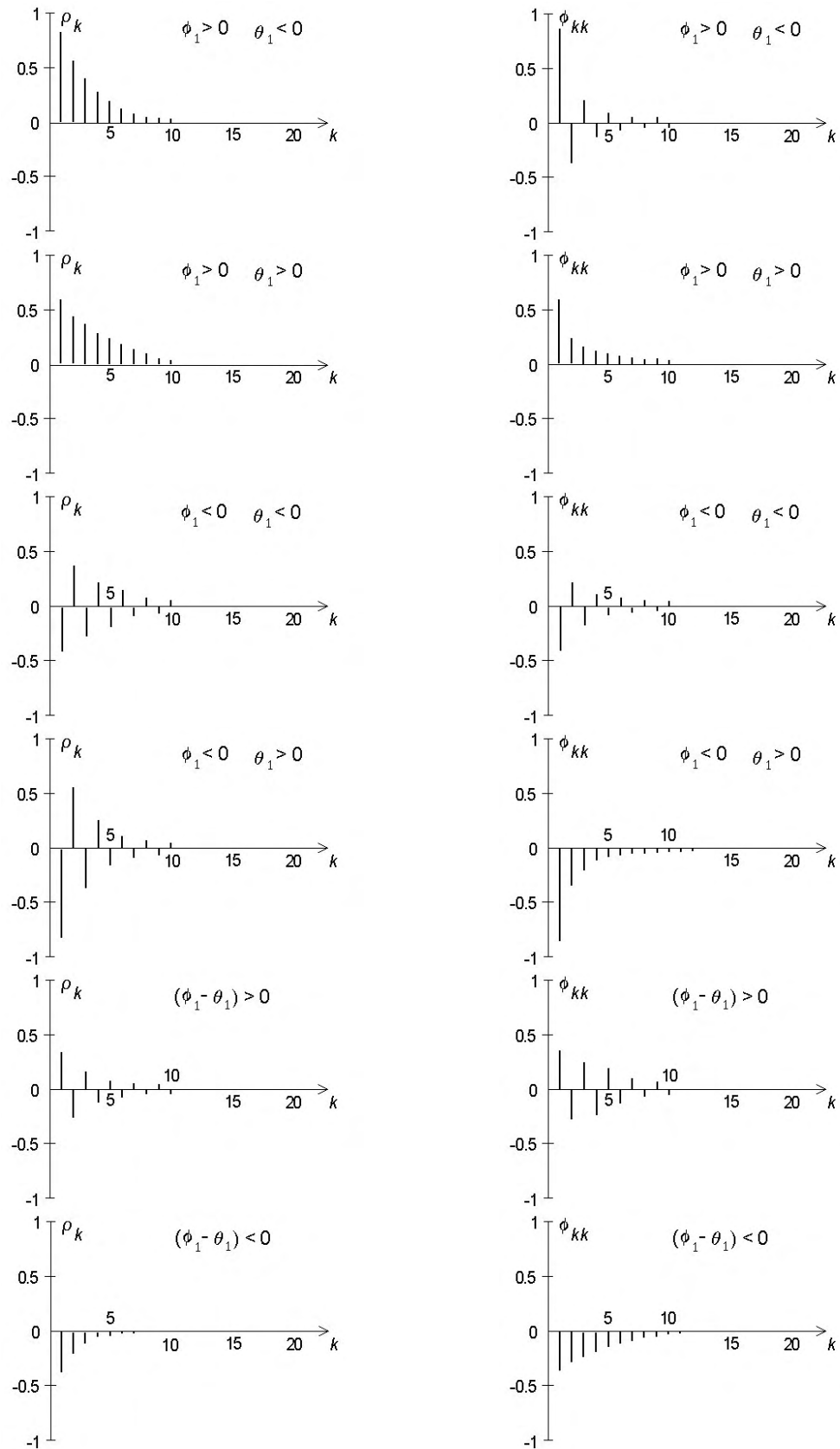
$$E(X_t \varepsilon_{t-1}) = \phi_1 E(X_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) = (\phi_1 - \theta_1) \sigma^2. \quad (4.115)$$

Tako je

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma^2 - \theta_1 (\phi_1 - \theta_1) \sigma^2. \quad (4.116)$$

Kada je  $k=1$  na osnovu (4.113) imamo

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma^2. \quad (4.117)$$



Slika 4.11 Obična i parcijalna autokorelaciona funkcija ARMA(1,1) procesa

Zamenom vrednosti  $\gamma_1$  u izrazu za  $\gamma_0$  dobijamo

$$\gamma_0 = \phi_1^2 \gamma_0 - \phi_1 \theta_1 \sigma^2 + \sigma^2 - \phi_1 \theta_1 \sigma^2 + \theta_1^2 \sigma^2 = \frac{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1}{1 - \phi_1^2} \sigma^2. \quad (4.118)$$

pa je

$$\gamma_1 = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1 \theta_1)}{1 - \phi_1^2} \sigma^2 \quad (4.119)$$

Na ostalim docnjama je

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1}, \text{ za } k \geq 2. \quad (4.120)$$

Autokorelaciona funkcija ARMA(1,1) procesa data je izrazom:

$$\rho_1 = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1 \theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1}, \quad \rho_k = \phi_1 \rho_{k-1}, \quad k \geq 2. \quad (4.121)$$

Ističemo da autokorelaciona funkcija ARMA(1,1) procesa objedinjava karakteristike AR(1) i MA(1) procesa. Na prvoj docnji vrednost autokorelacione funkcije uslovljena je kako koeficijentom  $\phi_1$  tako i koeficijentom  $\theta_1$ . Na višim docnjama autokorelaciona funkcija ima sličan izgled kao kod AR(1) procesa koji je karakterisalo eksponencijalno opadanje. Međutim ovo opadanje počinje od  $\rho_1$ , a ne od  $\rho_0 = 1$  kao kod AR(1). Što se parcijalne autokorelacione funkcije tiče napominjemo da pošto ARMA(1,1) proces sadrži MA(1) proces kao specijalan slučaj i njegova parcijalna autokorelaciona funkcija slično parcijalnoj autokorelacionoj funkciji MA(1) procesa, eksponencijalno opada. Dakle, parcijalna autokorelaciona funkcija ARMA(1,1) procesa ima slično ponašanje kao i njena autokorelaciona funkcija. Pri tome oblik funkcije zavisi od znaka i veličine oba koeficijenta procesa. Na Slici 4.11 prikazani su karakteristični korelogrami (obični i parcijalni) ARMA(1,1) procesa za različite karakteristične kombinacije koeficijenata  $\phi_1$  i  $\theta_1$ .

## Zadaci

- 4.1 Razmotriti AR(1) proces:  $X_t = 10 + 0.7X_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = 2$ . (a) Da li je proces stacionaran? (b) Izračunati  $\mu$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ . Nacrtati autokorelacionu funkciju. (c) Ako je  $X_{60}$  da li očekuješ da će  $X_{61}$  biti veće ili manje od sredine?
- 4.2 Za svaki od sledećih modela izračunati i nacrtati autokorelacionu i parcijalnu autokorelacionu funkciju: (a)  $X_t - 0.6X_{t-1} = \varepsilon_t$ , (b)  $X_t - 0.97X_{t-1} = \varepsilon_t$ , (c)  $X_t - 1.2X_{t-1} + 0.3X_{t-2} = \varepsilon_t$ , (d)  $X_t - 1.3X_{t-1} + 0.9X_{t-2} = \varepsilon_t$ .
- 4.3 Pokazati da je AR(2) proces:  $X_t = X_{t-1} + cX_{t-2} + \varepsilon_t$ , stacionaran za  $-1 < c < 0$ . Naći autokorelacionu funkciju za  $c = -1/4$ .
- 4.4 Pokazati da ako je AR(2) proces stacionaran, tada je  $\rho_1^2 < (\rho_2 + 1)/2$ .

- 4.5 Pokazati da je za AR(2) proces:  $X_t = \frac{1}{2}X_{t-1} + \frac{3}{16}X_{t-2} + \varepsilon_t$ , autokorelaciona funkcija data sa  $\rho_k = \frac{45}{52}\left(\frac{3}{4}\right)^{|k|} + \frac{7}{52}\left(-\frac{1}{4}\right)^{|k|}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .
- 4.6 Pokazati da je AR(3) proces:  $X_t = X_{t-1} + cX_{t-2} - cX_{t-3} + \varepsilon_t$ , nestacionaran za sve vrednosti  $c$ .
- 4.7 Razmotriti MA(1) proces:  $X_t = 7 + \varepsilon_t + 0.3\varepsilon_{t-1}$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = 3$ . (a) Da li je proces stacionaran? (b) Da li je proces invertibilan? Ako jeste, izraziti ga u AR obliku.
- 4.8 Ako je  $X_t = \theta_0 + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}$ , gde je  $\theta_0$  konstanta, pokazati da autokorelaciona funkcija ne zavisi od  $\theta_0$ .
- 4.9 Naći invertibilan proces koji ima sledeću autokorelacionu funkciju:  $\rho_0 = 1$ ,  $\rho_1 = 0.25$  i  $\rho_k = 0$ , za  $k \geq 2$ .
- 4.10 Razmotriti sledeći MA(2) proces:  $X_t = \varepsilon_t - 0.2\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2}$ . (a) Da li je proces stacionaran? Zašto? (b) Da li je proces invertibilan? Zašto? (c) Odrediti autokorelacionu funkciju ovog procesa.
- 4.11 (a) Bez korišćenja funkcije generatriše autokovarijansi naći autokorelacionu funkciju za svaki od sledećih procesa: (i)  $X_t = \varepsilon_t - 0.7\varepsilon_{t-1}$ , (ii)  $X_t = \varepsilon_t - 1.4\varepsilon_{t-1} + 0.7\varepsilon_{t-2}$ . (b) Naći autokorelacionu funkciju za procese iz (a) korišćenjem funkcije generatriše autokovarijansi. (c) Naći parcijalnu autokorelacionu funkciju za procese iz (a).
- 4.12 Pokazati da je autokorelaciona funkcija MA procesa  $q$ -tog reda:

$$X_t = \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}, \quad j = 0, 1, \dots, q \quad (\theta_j = \frac{1}{q+1})$$

data izrazom

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{q+1-k}{q+1}, & k = 0, 1, 2, \dots, q \\ 0, & k > q \end{cases}.$$

Da li je proces stacionaran? Zašto?

- 4.13 Razmotriti MA(6) model sa  $\theta_1 = 0.6$ ,  $\theta_2 = -0.36$ ,  $\theta_3 = 0.216$ ,  $\theta_4 = -0.1296$ ,  $\theta_5 = 0.07776$  i  $\theta_6 = -0.046656$ . Pokazati da će jednostavniji model dati približno iste vrednosti  $\psi$  pondera. (*Uputstvo*: Koristiti dualnu vezu MA i AR modela).
- 4.14 Za svaki od sledećih modela: (i)  $(1-B)X_t = (1-1.3B)\varepsilon_t$ , (ii)  $(1-0.7B)X_t = (1-0.4B)\varepsilon_t$ , (iii)  $(1-1.2B+0.7B^2)X_t = (1-1.5B+0.6B^2)\varepsilon_t$ , (iv)



$(1-0.5B)X_t = (1-1.3B+0.3B^2)\varepsilon_t$  . (a) Proveriti da li je model stacionaran i/ili invertibilan. (b) Izraziti model u MA obliku ako postoji. (c) Izraziti model u AR obliku ako postoji.

- 4.15 Za svaki od modela: (i)  $(1-0.5B)X_t = (1-0.8)\varepsilon_t$  , (ii)  $(1-1.3B+0.7B^2)X_t = (1-0.7B)\varepsilon_t$  , (a) Naći autokorelacionu funkciju. (b) Naći parcijalnu autokorelacionu funkciju. (c) Naći funkciju generatrisu autokovarijansi.

# 5 MODELI NESTACIONARNIH VREMENSKIH SERIJA

Do sada smo se bavili klasom stacionarnih stohastičkih procesa koje smo opisali ARMA modelima. Na osnovu izlaganja u prethodnoj glavi ističemo osnovnu karakteristiku stacionarnih stohastičkih procesa: konstantnost sredine (nivoa serije), konstantnost varijanse i zavisnost autokovarijansi samo od vremenskog intervala. Izgled tipične vremenske serije koja poseduje navedena svojstva prikazana je na Slici 1.1(a). Međutim, većina vremenskih serija uopšte, a posebno u ekonomiji imaju bar jednu osobinu kojom odstupaju od karakterističnog izgleda stacionarne serije. Tako na primer, serija realnog društvenog proizvoda SR Jugoslavije u periodu od 1952. do 1991. godine prikazana na Slici 2.1 pokazuje prisustvo trenda. Drugim rečima, sredina te serije nije konstantna nego je vremenski zavisna, preciznije rečeno nivo serije se povećava tokom vremena. Zatim, na Slici 2.4 jasno se uočava da serija mesečnih indeksa industrijske proizvodnje u Srbiji u periodu od 1972. do 1989. godine pored vremenski zavisne sredine ima i varijansu koja se povećava tokom vremena, odnosno sa porastom nivoa serije. Stohastičke procese i vremenske serije sa vremenski zavisnim nivoom i/ili varijansom nazivamo nestacionarni stohastički procesi i serije. Modeliranjem takvih stohastičkih procesa bavimo se u okviru ove glave, razlikujući pri tome procese koji su nestacionarni u sredini i procese koji su nestacionarni u varijansi.

## 5.1 UVOD

U klasičnoj analizi vremenskih serija uobičajeni način modeliranja vremenskih serija sa trendom (nestacionarne vremenske serije sa promenljivim nivoom) zasnovan je na prilagodavanju podacima izabrane determinističke funkcije vremena - *determinističkog trenda*. Tip funkcije je uslovljen izgledom grafika vremenske serije, a najčešće su korišćeni polinomijalni i eksponencijalni tipovi trenda. Serija odstupanja opservacija vremenske serije od ocenjene linije determinističkog trenda tretirana je potom kao stacionarna serija. Ključna pretpostavka od koje polaze ovi modeli vremenskih serija, pogotovu u situaciji njihovog korišćenja u prognoziranju, je da će izabrani tip funkcije

trenda važiti i u budućem periodu. Međutim, veoma često se u primenama javlja situacija da se za vremensku seriju ne može prihvatiti pretpostavka postojanja determinističke funkcije vremena kojom bismo u celom posmatranom periodu modelirali tu nestacionarnu seriju. Tako na primer, serija broja završenih stanova u SR Jugoslaviji (Slika 2.2), ima sve karakteristike nestacionarne serije, ali istovremeno za tu seriju ne možemo pretpostaviti postojanje globalnog determinističkog trenda. Po podperiodima posmatrana serija ima niz kratkoročnih trendova (periode uspona, padova i stagnacije). Rekli bismo u slučaju ove serije da i sam trend doživljava promene tokom vremena pod dejstvom slučajnih faktora. Takav trend nazivamo *stohastički trend*. Dakle, u analizi vremenskih serija uočava se razlika između determinističkog i stohastičkog tipa trenda. Definicijom, osobinama i posledicama neodgovarajuće primene ova dva tipa trenda u modeliranju vremenskih serija bavimo se u Odeljku 5.2.1.

U bliskoj vezi sa konceptom stohastičkog trenda jeste definicija *homogeno nestacionarnih serija* kojima se bavimo u Odeljku 5.2.2. Kod ovih serija stacionarnost se postiže diferenciranjem. Na stacionarne serije dobijene postupkom diferenciranja primenjujemo zatim teoriju stacionarnih stohastičkih procesa za koju je definisana opšta klasa ARMA modela. Time smo izvršili uopštavanje ARMA klase modela i na slučaj nestacionarnih procesa. Najopštija klasa tzv. *autoregresionih integrisanih procesa pokretnih proseka* (standardno ih označavamo kao ARIMA procese) definiše se u Poglavlju 5.3 uz razmatranje njegovih osnovnih pokazatelja i funkcija. U okviru istog poglavlja izlažemo i specijalne procese iz ove klase koji su od posebnog interesa u ekonomiji. Reč je pre svega o tzv. *procesima slučajnog hoda*.

Naposletku, glavu završavamo razmatranjem pojave nestacionarnosti u varijansi. Njome se bavimo u manjem obimu jer je pristup analizi takvih serija u dobroj meri zasnovan na ranije izloženom Box-Coxovom tipu transformacije vremenske serije.

## 5.2 NESTACIONARNOST U SREDINI

Pre nego što izložimo klasu nestacionarnih procesa poznatu pod nazivom ARIMA procesi ukazaćemo na različite načine modeliranja nestacionarnosti. Prvi, klasičan pristup polazi od toga da se sredina nestacionarnog procesa može predstaviti determinističkom funkcijom vremena. Tada za seriju kažemo da joj odgovara deterministički trend. Drugi pristup zasnovan je na postupku diferenciranja vremenske serije. Ako se postupkom diferenciranja dobije stacionarna serija tada prvobitna serija sadrži stohastički trend. U drugom delu ovog poglavlja iznosimo dodatne argumente u prilog korišćenja stohastičkog trenda, odnosno postupka diferenciranja u cilju postizanja stacionarnosti serije.

### 5.2.1 Deterministički i stohastički trend

Prvi pristup modeliranju stohastičkih procesa kod kojih je prisutna nestacionarnost u sredini zasnovan je na pretpostavci da u opštem slučaju, sredina evoluirala kao polinom po vremenu reda  $d$ . Ocnom izabrane linije trenda i računanjem serije reziduala

dobijamo stacionarni stohastički proces. Ovu klasu stacionarnih procesa nazivamo *trend stacionarni procesi*, a definišemo ih na osnovu Cramerovog proširenja Woldove teoreme razlaganja za nestacionarne procese. Predstavljamo ih kao zbir determinističke komponente  $\mu_t$  (polinom po vremenu) i stacionarne komponente  $\eta_t$  koja u opštem slučaju sledi ARMA proces. Ovaj nestacionarni proces pišemo u obliku:

$$X_t = \mu_t + \eta_t = \sum_{j=0}^d \beta_j t^j + \psi(B)\varepsilon_t. \quad (5.1)$$

Pošto je

$$E(\eta_t) = \psi(B)E(\varepsilon_t) = 0, \quad E(X_t) = E(\mu_t) = \sum_{j=0}^d \beta_j t^j, \quad (5.2)$$

a koeficijenti  $\beta_j$  ostaju konstantni tokom vremena, ovaj trend nazivamo *deterministički trend*. Sa stanovišta praktične primene trend stacionarnim procesom rukujemo kao sa svakim standardnim regresionim modelom. To znači da nakon regresiranja opservacija vremenske serije na "regresore"  $(1, t, t^2, \dots, t^d)$  definisane izabranim polinomom, rezidualne ocenjenog trenda posmatramo kao stacionarnu seriju.

Da bismo ukazali na karakteristike trend stacionarnih procesa poslužićemo se jednostavnim primerom. Pretpostavimo da je stacionarna komponenta proces belog šuma, a deterministička komponenta linearni trend ( $d=1$ ). Tada (5.1) pišemo u obliku

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t. \quad (5.3)$$

Očigledno je  $E(X_t) = \beta_0 + \beta_1 t$  i  $Var(X_t) = Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$ . Pretpostavimo da smo na proces (5.3), koji se može okarakterisati kao trend stacionarni proces, pogrešno primenili postupak diferenciranja u cilju postizanja stacionarnosti serije. Da bismo razmotrili kakve su posledice primene ovog pogrešno izabranog postupka transformacije, posmatrajmo opservaciju procesa u vremenskom trenutku  $(t-1)$  i oduzmimo je od (5.3). Tada sledi:

$$X_t - X_{t-1} = \beta_1 + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}. \quad (5.4)$$

Dakle, dobijen je ARMA(1,1) proces koji je nestacionaran i neinvertibilan, pošto je  $\phi_1 = 1$  i  $\theta_1 = 1$ . Označimo prvu diferencu ovog procesa sa  $W_t$ . Gornji ARMA(1,1) proces možemo pisati u obliku:

$$W_t = (1-B)X_t = \beta_1 + (1-B)\varepsilon_t. \quad (5.5)$$

Pošto je  $E(W_t) = \beta_1$  konstantno, znači da je  $W_t$  generisano stacionarnim, ali neinvertibilnim MA(1) procesom.

U opštem slučaju ako je polinomijalni trend reda  $d$ , a  $\eta_t$  predstavlja ARMA proces  $\phi(B)\eta_t = \theta(B)\varepsilon_t$ , tada će diferencu  $X_t$  reda  $d$  biti opisana procesom

$$(1-B)^d X_t = \theta_0 + \frac{(1-B)\theta(B)}{\phi(B)} \varepsilon_t, \quad \theta_0 = d! \beta_d. \quad (5.6)$$

Što znači da će MA deo procesa generisanog prvim diferencama imati  $d$  jediničnih korena. Kao i u slučaju jednostavnog trend stacionarnog procesa (5.3) može se pokazati da će varijansa od  $X_t$  biti jednaka varijansi od  $\eta_t$  i biti konstantna tokom vremena. Na osnovu izloženog zaključujemo da će primena pogrešno izabrane transformacije trend stacionarne serije, tj. postupak diferenciranja, imati za posledicu generisanje neinvertibilnog MA procesa. Težine ove posledice bićemo svesni kada budemo u 7. Glavi pristupili praktičnom modeliranju vremenskih serija.

Drugi način modeliranja nestacionarne serije u sredini  $X_t$  zasnovana je na pretpostavci da će njena diferencna reda  $d$  biti stacionarna. Klasu procesa sa ovim svojstvom nazivamo *diferencno stacionarni procesi*. Da bismo sagledali kakve su posledice pogrešnog tretmana ovog diferencno stacionarnog procesa kao trend stacionarnog procesa poslužimo se jednostavnim primerom u kome je prva diferencna serije predstavljena zbirom konstante i procesa belog šuma:

$$(1-B)X_t = \beta_1 + \varepsilon_t, \quad (5.7)$$

Drugim rečima do procesa datog izrazom (5.7) možemo doći polazeći od AR(1) procesa sa konstantom kod koga smo zamenili  $\phi_1 = 1$ . Slučaj kada je  $\phi_1 > 1$  generiše eksplozivan tok vremenske serije i kao takav nije od posebnog interesa u analizi. U opštem slučaju, ARMA procesi kod kojih koreni AR polinoma po operatoru doznje leže *na* jediničnom krugu od posebnog su interesa u analizi tzv. homogeno nestacionarnih procesa kojima se bavimo u narednom odeljku. Izraz (5.7) možemo drugačije pisati u obliku

$$X_t = X_{t-1} + \beta_1 + \varepsilon_t, \quad (5.8)$$

odakle kumuliranjem promena  $X$  od početne vrednosti, na primer  $X_0$ , dobijamo

$$X_t = X_0 + \beta_1 t + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i. \quad (5.9)$$

Prema izrazu (5.8) nivo procesa u trenutku  $t$  zavisi od prethodne vrednosti procesa koja je sa svoje strane pod uticajem stohastičkog člana. Pošto se nivo procesa stohastički menja tokom vremena kažemo da ovu klasu procesa karakteriše *stohastički trend*.

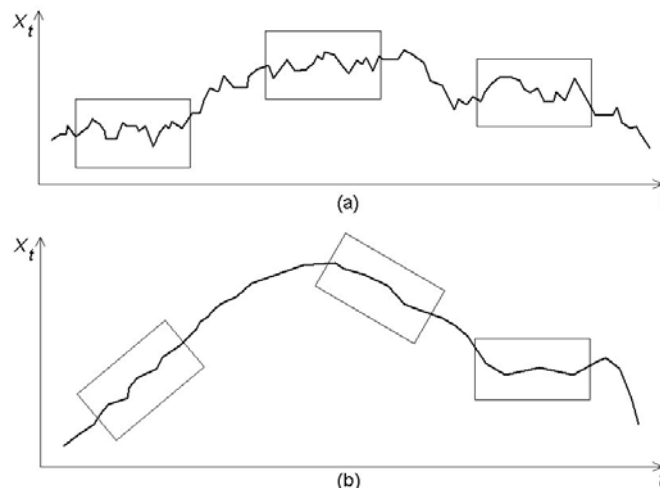
Na prvi pogled procesi (5.3) i (5.9) međusobom su slični. Međutim, između njih postoje suštinske razlike. Slobodni član u (5.9) nije stalan koeficijent nego zavisi od početne vrednosti  $X_0$ , a stohastički deo nije stacionaran jer mu varijansa i autokovarijanse zavise od vremena. Može se pokazati da je varijansa procesa (5.9) jednaka  $t\sigma^2$ . U slučaju korišćenja procesa (5.3) u prognoziranju, varijansa greške prognoze biće ograničena bez obzira na dužinu horizonta prognoziranja, zato što  $\varepsilon_t$ , odnosno  $\eta_t$  (u opštijem slučaju imamo proces (5.2)) imaju konačnu varijansu. Što se tiče prognoze procesa datog izrazom (5.9), videćemo u narednoj glavi da varijansa

greške prognoze neograničeno raste tokom vremena. Štaviše, za celu klasu trend stacionarnih procesa opisanih izrazom (5.2), čiji je predstavnik dat izrazom (5.3), autokorelaciona struktura može biti korišćena u kratkoročnom prognoziranju. Kod dugoročnog prognoziranja jedina informacija o budućim vrednostima sadržana je u njegovoj sredini, tj.  $\beta_0 + \beta_1 t$ , tako da neće ni tekući niti prošli događaji menjati dugoročnu prognozu. Klasu diferencno stacionarnih procesa karakteriše to da će njegove dugoročne prognoze uvek biti pod uticajem istorijskih događaja kroz akumuliranje šokova  $\varepsilon_t$ .

Ako smo na primer za vremensku seriju realnog društvenog proizvoda utvrdili da je trend stacionarna serija to znači da društveni proizvod beleži stalan rast po konstantnoj stopi koja je implicirana koeficijentima polinoma  $\mu_t$ . S druge strane, ako je serija društvenog proizvoda diferencno stacionarna serija tada i kratkoročni poremećaji u proizvodnji imaju svoga odraza na dugoročni rast društvenog proizvoda kroz kumuliranje tih poremećaja. Otuda interes istraživača da se ispita karakter serije društvenog proizvoda, jer on u diferencno stacionarnom slučaju direktno ističe vezu između kratkoročne stabilizacione makroekonomske politike i dugoročne razvojne politike.

### 5.2.2 Homogeno nestacionarni procesi

Drugi način modeliranja procesa koji je nestacionaran u nivou zasnovan je na korišćenju stohastičkog trenda. Njegovo uvođenje u analizu zasnovano je na osobini većine nestacionarnih serija prema kojoj se različiti delovi procesa ponašaju veoma slično, osim što postoji razlika u lokalnom nivou serije. Primer takvog procesa prikazan je na Slici 5.1(a). Ako zanemarimo razliku u nivou tri ucrtana okvira možemo uočiti da su tokovi serija u svakom okviru slični međusobno.



**Slika 5.1** Homogeno nestacionarna serija: (a) u nivou i (b) u nivou i nagibu

Takođe postoje procesi kod kojih se različiti delovi serije ponašaju slično, osim što postoji razlika u nivou i nagibu serije. Primer takvog procesa prikazan je na Slici 5.1(b). Kod ove serije tri ucrtana okvira osim što su postavljeni na različitim nivoima imaju međusobno i različite nagibe. Međutim, tok serije unutar tih okvira je veoma sličan.

Box i Jenkins (1976, s. 85) nestacionarne serije sa takvim karakteristikama nazivaju *homogeno nestacionarne serije*. Ako je ponašanje procesa nezavisno od njegovog nivoa, tada autoregresioni polinom po operatoru docnje  $\varphi(B)$  u modelu takvog procesa, mora biti tako izabran da je  $\varphi(B)(X_t + C) = \varphi(B)X_t$ , gde je  $C$  proizvoljna konstanta. Kako  $\varphi(B)C = 0$  implicira  $\varphi(1) = 0$ , to znači da polinom mora dopuštati faktorizaciju:  $\varphi(B) = \phi_1(B)(1-B)$ . Prema tome klasa homogeno nestacionarnih procesa biće opisana izrazom:

$$\phi_1(B)W_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (5.10)$$

gde je  $W_t = (1-B)X_t$ . Kako zahtevana homogenost podrazumeva da  $W_t$  ne raste eksplozivno, to znači da je  $\phi_1(B)$  ili stacionarni autoregresioni polinom po operatoru docnje ili se može pisati u sledećem obliku:  $\phi_1(B) = \phi_2(B)(1-B)$ , tako da je  $\phi_2(B)W_t = \theta(B)\varepsilon_t$ , gde je sada  $W_t = (1-B)^2$ . Ovu argumentaciju na sličan način možemo nastaviti dalje, što znači da se za homogeno nestacionarnu seriju autoregresioni polinom mora izraziti u obliku  $\phi(B)(1-B)^d$ , gde je  $\phi(B)$  stacionarni autoregresioni operator. Gornjim razmatranjima homogene nestacionarnosti pripremili smo teren za definisanje najopštije klase modela vremenskih serija koja je podobna za modeliranje kako stacionarnih tako i nestacionarnih stohastičkih procesa.

### 5.3 A R I M A PROCESI

U prethodnom poglavlju proces dat izrazom (5.8) predstavlja jedan primer klase nestacionarnih procesa poznate pod nazivom *integriranih procesa*, kod kojih se višestrukim diferenciranjem postiže stacionarnost. Pri tome diferencirana serija može biti autokorelisana. Tako se kod procesa datog izrazom (5.8) prvim diferenciranjem serije dobija stacionaran proces, odnosno proces belog šuma. Ako u opštem slučaju diferenciranu seriju  $(1-B)^d X_t$  modeliramo stacionarnim ARMA( $p, q$ ) procesom, tada imamo:

$$\phi_p(B)(1-B)^d X_t = \theta_0 + \theta_q(B)\varepsilon_t, \quad (5.11)$$

gde su  $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$  i  $\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$  AR i MA polinomi po operatoru docnje, reda  $p$  i  $q$  respektivno. U daljem tekstu pretpostavljamo da koreni odgovarajućih karakterističnih jednačina  $\phi_p(B) = 0$  i  $\theta_q(B) = 0$  leže van jediničnog kruga, drugim rečima pretpostavljamo da su ispunjeni

uslovi stacionarnosti i invertibilnosti. Pored toga za ova dva polinoma pretpostavljamo da nemaju zajedničkih faktora.

Za razliku od ARMA( $p, q$ ) modela u izraz (5.11) uveli smo i konstantu  $\theta_0$ . Što se interpretacije konstante  $\theta_0$  tiče ona zavisi od reda diferenciranja. Ako je  $d=0$  proces je stacionaran, a konstanta je u relaciji sa sredinom procesa  $\theta_0 = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$ , gde je  $\mu = E(X_t)$ . Za vrednosti  $d > 0$ , konstanta  $\theta_0$  ukazuje na prisustvo determinističkog trenda u seriji. Konstanta se izostavlja iz izraza (5.11) kada nema mesta pretpostavci da će diferencirana serija sadržavati deterministički trend. Detaljnija interpretacija konstante u ovom smislu data je u Odeljku 5.3.1.

Homogeno nestacionarni proces dat izrazom (5.11) nazivamo *autoregresioni integrisani proces pokretnih proseka* (engl. *autoregressive-integrated-moving average*) reda  $p$ ,  $d$  i  $q$  ili prema skraćenoj notaciji ARIMA( $p, d, q$ ) proces. Takođe, za proces  $X_t$  kažemo da je integrisan reda  $d$ , u oznaci  $I(d)$ . U praktičnim primenama kod ekonomskih vremenskih serija obično je red diferenciranja  $d$  jednak 0, 1 ili 2.

Karakteristika autokorelacione funkcije ARIMA procesa može se sagledati preko jednostavnog primera ARIMA procesa, tj. analizom autokorelacione funkcije stacionarnog ARMA(1,1) procesa. Na osnovu njegove autokorelacione funkcije (4.121), kada pustimo da  $\phi_1 \rightarrow 1$ , dobijamo da autokorelacioni koeficijenti na različitim docnjama teže jedinici. U graničnom slučaju kao rezultat dobijamo ARIMA(0,1,1) proces  $(1-B)X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ . Što se tiče parcijalne autokorelacione funkcije ARIMA procesa ona je za vrednosti  $d > 0$  na prvoj docnji bliska jedinici, a jednaka nuli na svim ostalim docnjama.

Da bismo pokazali još jedno svojstvo ARIMA procesa pretpostavićemo, jednostavnosti radi, da je  $\theta_0 = 0$ . Tada se ARIMA proces može izraziti dvema jednačinama:

$$\phi_p(B)W_t = \theta_q(B)\varepsilon_t \text{ i } W_t = (1-B)^d X_t. \quad (5.12)$$

Znači da se diferencija reda  $d$  serije  $X_t$  opisuje stacionarnim, invertibilnim ARMA procesom. Za  $d \geq 1$  drugu jednačinu u izrazu (5.12) možemo invertovati da bismo dobili

$$X_t = S^d W_t, \quad (5.13)$$

gde je  $S$  operator beskonačne sume:

$$S = (1 + B + B^2 + \dots) = (1 - B)^{-1}. \quad (5.14)$$

Prema tome se sumiranjem ili "integriranjem", stacionarnog procesa  $d$  puta dobija homogeno nestacionarni ARIMA proces. Otuda izraz "integrirani" u nazivu ARIMA procesa. Razmotrimo najčešće korišćene ARIMA procese.



### 5.3.1 Procesi slučajnog hoda

Ako u izrazu (5.11) zamenimo  $p=0$ ,  $d=1$  i  $q=0$  dobićemo dobro poznati proces slučajnog hoda (engl. *random walk process*):

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (5.15)$$

koji korišćenjem operatora docnje pišemo u obliku:

$$(1-B)X_t = \varepsilon_t, \quad (5.16)$$

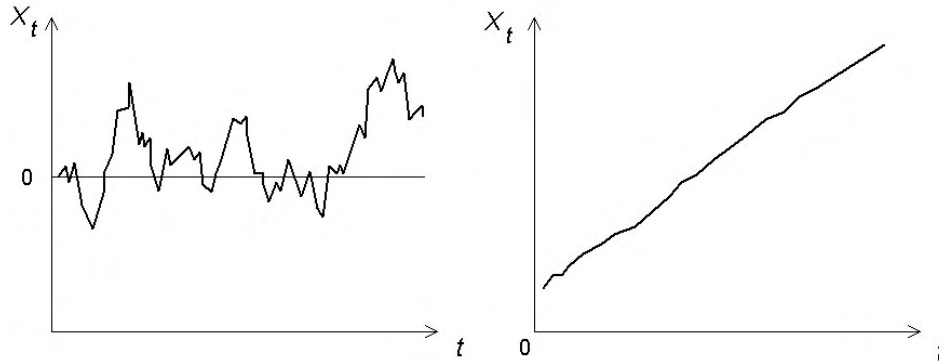
Koristeći standardnu notaciju ovaj proces označavamo kao ARIMA(0,1,0) proces. Izraz "slučajni hod" u nazivu ovog procesa potiče od njegovog karakterističnog ponašanja koje podseća na kretanje pijanog čoveka čiji je položaj u trenutku  $t$  određen položajem u prethodnom trenutku plus korak u slučajno izabranom pravcu u tekućem trenutku. Ovaj proces u ekonomiji koristi se za opisivanje kretanja cena akcija ili deonica, odnosno uopšte za opisivanje kretanja cene robe na spekulativnom tržištu.

Ako u izraz (5.16) uvedemo konstantu  $\theta_0$  dobićemo

$$X_t = X_{t-1} + \theta_0 + \varepsilon_t, \quad (5.17)$$

pa tada za  $X_t$  kažemo da predstavlja proces slučajnog hoda sa konstantom (engl. *random walk process with drift*). Proces slučajnog hoda sa konstantom korišćen je kao ilustracija diferencno stacionarnog procesa (izraz (5.8)). Tada je istaknuto da kumuliranjem vrednosti  $X$  od početne vrednosti dobijamo izraz (5.9) u kome konstanta  $\theta_0$  predstavlja koeficijent uz deterministički trend. Za proces (5.11) može se pokazati da je konstanta  $\theta_0$  u relaciji sa koeficijentom  $\beta_d$  koji stoji uz "regresor"  $t^d$  u determinističkom trendu (videti izraz (5.6) za vrednost  $\theta_0$ ). Zato se za vrednosti  $d > 0$  prisustvo konstante  $\theta_0$  u ARIMA modelu interpretira kao prisustvo determinističkog trenda u modelu. Za velike vrednosti  $t$  konstanta postaje dominantna prisiljavajući seriju da iskazuje deterministički tip ponašanja.

Proces slučajnog hoda predstavlja granični slučaj AR(1) procesa koji se dobija za  $\phi_1=1$ . Na osnovu obične autokorelacione funkcije AR(1) procesa  $\rho_k = \phi_1^k$  možemo za autokorelacionu funkciju procesa slučajnog hoda reći da je karakterišu visoke neopadajuće vrednosti. Parcijalna autokorelaciona funkcija uzima vrednost blisku jedinici na prvoj docnji, a nulu na ostalim docnjama. Prva diferencna procesa slučajnog hoda predstavlja proces belog šuma, pa autokorelaciona funkcija na svim docnjama ima vrednost nula. Na osnovu običnog i parcijalnog korelograma nismo u mogućnosti razlikovati proces slučajnog hoda sa konstantom od procesa slučajnog hoda bez konstante. Razlikovanje ova dva procesa omogućava nam grafik vremenske serije. Na Slici 5.2 prikazan je karakteristični izgled vremenske serije slučajnog hoda bez i sa konstantom.



Slika 5.2 Proces slučajnog hoda: (a) bez konstante i (b) sa konstantom.

### 5.3.2 ARIMA(0,1,1) procesi

Ako u izrazu (5.11) zamenimo  $p=0$ ,  $d=1$  i  $q=1$ , dobijamo ARIMA(0,1,1) proces

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \quad (5.18)$$

koji korišćenjem operatora docnje pišemo u obliku:

$$(1-B)X_t = (1-\theta_1 B)\varepsilon_{t-1}, \quad (5.19)$$

gde je  $|\theta_1| < 1$ . Diferenciranje procesa dobijamo stacionarni MA(1) proces. Proces slučajnog hoda je poseban slučaj ovog, ARIMA(0,1,1) procesa (ili kako se ponekad označava IMA(1,1) proces) za nultu vrednost koeficijenta  $\theta_1$ . Vrednosti autokorelacionih koeficijenata ovog procesa, uostalom kao i kod ostalih ARIMA procesa, veoma sporo opadaju ka nuli. Parcijalni autokorelacioni koeficijent samo na prvoj docnji je različit od nule i blizak je jedinici. Međutim obična i parcijalna autokorelaciona funkcija prvih diferenci ovog procesa ima sve karakteristike odgovarajućih funkcija kod MA(1) procesa.

U Poglavlju 8.5 uspostavljamo vezu ARIMA modela i strukturnih modela, pa je pokazano da je eksponencijalni metod izravnjanja optimalan metod prognoziranja ako je posmatrani proces generisan ARIMA(0,1,1) modelom (videti Muth (Mut) (1960)).

## 5.4 NESTACIONARNOST U VARIJANSI

### 5.4.1 Varijansa i autokovarijansa kod ARIMA procesa

S obzirom na definiciju sredine, varijanse, autokovarijanse i autokorelacije stohastičkog procesa možemo reći da stacionarnost u sredini ne implicira stacionarnost u varijansi, autokovarijansi i autokorelaciji. Međutim, ako znamo da je proces nestacionaran u sredini tada je nestacionaran i u varijansi, autokovarijansi i

autokorelaciji. Prema tome, kako smo pokazali da je ARIMA proces nestacionaran u sredini to znači da je on nestacionaran i u varijansi, autokovarijansi i autokorelaciji.

Za razliku od stacionarnih stohastičkih procesa za koje smo istakli da su u svojevrsnoj statističkoj ravnoteži, za nestacionarne procese to ne možemo reći. To znači da je kod ovih potonjih bitan i vremenski trenutak od kog smo započeli sa praćenjem toka procesa. Dok smo, dakle, kod stacionarnih procesa mogli pratiti tok od  $t = -\infty$ , kod nestacionarnih ćemo početi sa posmatranjem od trenutka  $t = -m$ , pri čemu  $-m$  prethodi trenutku  $t = 1$  u kome registrujemo prvu opservaciju. Pri tome ćemo pretpostaviti da je  $X_t = 0$ , za  $t < -m$ . Vremensku zavisnost varijanse, autokovarijanse i autokorelacije pokazaćemo korišćenjem jednostavnog procesa kao što je ARIMA(0,1,1) proces. Ako ARIMA(0,1,1) proces izrazimo u obliku (5.19), tada je prva diferencija ovog procesa

$$W_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \quad (5.20)$$

što znači da  $W_t$  predstavlja stacionarni MA(1) proces. Sada možemo nestacionarni proces  $X_t$  izraziti korišćenjem procesa  $W_t$  i procesa belog šuma. Korišćenjem operatora sumiranja do trenutka  $t + m$ , u oznaci  $S_{t+m}$ , dobijamo

$$\begin{aligned} X_t &= S_{t+m} W_t = (1 + B + B^2 + \dots + B^{t+m}) W_t = \sum_{j=0}^{t+m} W_{t-j} \\ &= \varepsilon_t + (1 - \theta_1) \varepsilon_{t-1} + (1 - \theta_1) \varepsilon_{t-2} + \dots + (1 - \theta_1) \varepsilon_{-m} - \theta_1 \varepsilon_{-m-1}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Na osnovu izraza (5.21) možemo pokazati (Cryer (Krajer) (1986, s. 90) ili Wei (1990, ss. 78-80)) da je varijansa i autokovarijansa nestacionarnog procesa  $X_t$ :

$$\text{Var}(X_t) = [1 + \theta_1^2 + (1 - \theta_1)^2 (t + m)] \sigma^2, \quad (5.22)$$

$$\text{Var}(X_{t-k}) = [1 + \theta_1^2 + (1 - \theta_1)^2 (t + m - k)] \sigma^2, \quad (5.23)$$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t-k}) = [1 - \theta_1 + \theta_1^2 + (1 - \theta_1)^2 (t + m - k)] \sigma^2, \quad (5.24)$$

pa je autokorelacija

$$\text{Corr}(X_t, X_{t-k}) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{\text{Var}(X_t) \text{Var}(X_{t-k})}} \approx \sqrt{\frac{t + m - k}{t + m}}, \quad (5.25)$$

Prema dobijenim izrazima od (5.22) do (5.25) možemo zaključiti sledeće:

1. Varijansa ARIMA procesa je vremenski zavisna, a takođe je  $\text{Var}(X_t) \neq \text{Var}(X_{t-k})$ , za  $k \neq 0$ .
2. Varijansa ARIMA procesa neograničeno raste kada  $t \rightarrow \infty$ .
3. Autokovarijanse i autokorelacije ARIMA procesa su vremenski zavisne, a takođe se translacijom vremenskog intervala menjaju.

4. Kada je  $m$  znatno veće od  $k$ , tada je autokorelacija prema izrazu (5.25) bliska jedinici.

Prema prethodnom izlaganju sledi da se na osnovu jedne nestacionarne vremenske serije ne mogu izvesti zaključci o posmatranom procesu zbog vremenske zavisnosti sredine, varijanse i autokovarijanse. Međutim, ako je u pitanju homogeno nestacionarna serija tada postupkom diferenciranja dobijamo stacionaran proces kod koga na osnovu jedne realizacije možemo izvesti korektne statističke zaključke o posmatranom procesu.

### 5.4.2 Stabilizacija varijanse

Homogeno nestacionarne serije smo postupkom diferenciranja "preveli" u stacionarne serije na koje smo mogli primeniti teoriju stacionarnih stohastičkih procesa. Međutim, postupak diferenciranja nije odgovarajući postupak transformacije ako je posmatrani proces nestacionaran samo u varijansi. Tada nam je, zbog pretpostavljene konstantnosti varijanse procesa u teoriji stacionarnih stohastičkih procesa, zadatak da transformacijom stabilizujemo varijansu, odnosno da je učinimo konstantnom. Da bismo ukazali na postupak određivanja odgovarajuće transformacije za stabilizovanje varijanse uvešćemo uobičajenu pretpostavku prema kojoj se varijansa nestacionarnog procesa menja sa promenom sredine (nivou) serije:

$$\text{Var}(X_t) = ch(\mu_t), \quad (5.26)$$

gde je  $c$  proizvoljna pozitivna konstanta, a  $h$  neka funkcija. Primer vremenske serije kod koje je uvedena pretpostavka ispunjena dat je na Slici 1.1(b). Zadatak nam je da odredimo funkciju  $f(\cdot)$  tako da transformisana serija  $f(X_t)$  ima konstantnu varijansu. U tom cilju formiraćemo prvu aproksimaciju ove funkcije korišćenjem Taylorovog razvoja u red oko tačke  $\mu_t$ . Tada je

$$f(X_t) \approx f(\mu_t) + f'(\mu_t)(X_t - \mu_t), \quad (5.27)$$

gde je  $f'(\mu_t)$  vrednost prvog izvoda funkcije  $f(X_t)$  u tački  $\mu_t$ . Sada imamo

$$\text{Var}[f(X_t)] = [f'(\mu_t)]^2 \text{Var}(X_t) \approx c[f'(\mu_t)]^2 h(\mu_t). \quad (5.28)$$

Prema tome, da bismo stabilizovali varijansu procesa moramo transformaciju  $f(X_t)$  tako izabrati da bude ispunjen uslov:

$$f'(\mu_t) = \frac{1}{\sqrt{h(\mu_t)}}. \quad (5.29)$$

Iz koga se dobija

$$f(\mu_t) = \int \frac{1}{\sqrt{h(\mu_t)}} d\mu_t. \quad (5.30)$$

Na osnovu izraza (5.30) izvode se specijalni slučajevi koji su od interesa u analizi vremenskih serija. Kada je na primer standardna devijacija procesa proporcionalna nivou serije, odnosno kada je  $Var(X_t) = c^2 \mu_t^2$ , dobijamo

$$f(\mu_t) = \int \frac{1}{\sqrt{\mu_t^2}} d\mu_t = \ln(\mu_t). \quad (5.31)$$

Prema tome, kada se može pretpostaviti da je standardna devijacija serije proporcionalna njenom nivou odgovarajući tip transformacije jeste logaritamska transformacija. Uz pretpostavku da je varijansa proporcionalna nivou serije  $Var(X_t) = c\mu_t$  može se pokazati da je odgovarajući tip transformacije kvadratni koren originalne serije, dok je recipročna vrednost originalne serije odgovarajući tip transformacije kada je standardna devijacija serije proporcionalna kvadratu nivoa serije  $Var(X_t) = c^2 \mu_t^4$ .

Svi navedeni tipovi transformacije mogu se izvesti iz opšte formule za Box-Coxovu transformaciju datu izrazom (2.1). Zato se za stabilizovanje varijanse vremenske serije koristi Box-Coxova transformacija prema postupku koji je izložen u Poglavlju 2.4.

## Zadaci

- 5.1 Dati su sledeći modeli: (i)  $X_t = 0.4X_{t-1} + \varepsilon_t$ , (ii)  $X_t = \varepsilon_t - 1.4\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2}$ , (iii)  $X_t = -0.7X_{t-1} + \varepsilon_t - 1.4\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2}$ . (a) Svaki od ovih modela izraziti u drugoj formi korišćenjem operatora docnje  $B$ . (b) Svaki od ovih modela klasifikovati kao  $ARIMA(p, d, q)$  model (odnosno, odrediti  $p$ ,  $d$  i  $q$ ). (c) Za svaki model proveriti da li je stacionaran i/ili invertibilan. (d) Za model pod (i) naći ekvivalentnu MA reprezentaciju.
- 5.2 Dati model  $(1-B)(1-0.3B)X_t = (1-0.7B)\varepsilon_t$  (a) klasifikovati kao  $ARIMA(p, d, q)$  model (odrediti  $p$ ,  $d$  i  $q$ ). (b) Proveriti da li je model stacionaran? (c) Izračunati prva četiri  $\psi$  pondera. (d) Izračunati prva četiri  $\pi$  pondera.
- 5.3 Identifikovati kao specifičan  $ARIMA$  model: (a)  $X_t = X_{t-1} - 0.4X_{t-2} + \varepsilon_t + 0.6\varepsilon_{t-1}$ , (b)  $X_t = 2X_{t-1} - X_{t-2} + \varepsilon_t$ , (c)  $X_t = 0.5X_{t-1} + 0.5X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}$ . Proveriti da li su navedeni modeli stacionarni i/ili invertibilni?
- 5.4 Razmotriti modele: (A)  $X_t = 0.9X_{t-1} + 0.09X_{t-2} + \varepsilon_t$ , (B)  $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t - 0.1\varepsilon_{t-1}$ . (a) Identifikovati svaki model kao specifičan  $ARIMA$  model, (b) U kom smislu su ova dva modela različita međusobom? (c) U kom smislu su slična? (Uputstvo: porediti  $\psi$  i  $\pi$  pondere).

- 5.5 Razmotriti sledeći model:  $(1-B)^2 X_t = (1-0.2B-0.6B^2)\varepsilon_t$ . (a) Da li je proces  $X_t$  stacionaran? Zašto? (b) Neka je  $W_t = (1-B)^2 X_t$ . Da li je proces  $W_t$  stacionaran? Zašto? (c) Odrediti autokorelacionu funkciju procesa  $W_t$ .
- 5.6 Svaki od sledećih procesa: (a)  $(1-B)^2 X_t = \varepsilon_t - 0.75\varepsilon_{t-1} + 0.45\varepsilon_{t-2}$ , (b)  $(1-B)X_t = (1-0.6B)\varepsilon_t$ , izraziti u drugoj formi korišćenjem AR reprezentacije, izračunavajući i grafički prikazujući  $\pi$ -pondere.
- 5.7 Pretpostavimo da je proces generisan modelom:  $X_t = \varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1} + c\varepsilon_{t-2} + \dots + c\varepsilon_0$ , za  $t > 0$ . (a) Naći sredinu i autokovarijacionu funkciju od  $X_t$ . Da li je proces stacionaran? (b) Naći sredinu i autokovarijacionu funkciju prve diference procesa. Da li je prva diferencija procesa  $X_t$  stacionarna? (c) Identifikovati proces  $X_t$  kao specifičan ARIMA model.
- 5.8 Neka je dat MA(1) proces:  $X_t = (1-\theta_1 B)\varepsilon_t$ , gde je  $|\theta_1| < 1$ . Ako odredimo prvu diferencu ove stacionarne serije čemu će biti jednaka varijansa diferencirane serije? Uporediti je sa varijansom originalnog procesa. Da li će diferencirana serija biti stacionarna? Identifikovati odgovarajući ARIMA model koji odgovara seriji prvih diferenci.
- 5.9 (a) Simulirati vremensku seriju od 100 opservacija korišćenjem sledećih modela:
- (i)  $(1-B)X_t = (1-0.7B)\varepsilon_t$ , (ii)  $(1-B)X_t = 10 + (1-0.7B)\varepsilon_t$ ,
- (iii)  $(1-0.8B)(1-B)X_t = \varepsilon_t$ , (iv)  $(1-0.8B)(1-B)X_t = (1-0.6B)\varepsilon_t$ .
- (b) Grafički prikazati simulirane vremenske serije. (c) Za svaku simuliranu vremensku seriju izračunati i komentarisati uzoračke autokorelacione i parcijalne autokorelacione funkcije do maksimalno 20 docnji upoređujući ih sa odgovarajućim populacionim korelogramima.



# 6 PROGNOZIRANJE

Jedan od važnijih, ako ne i najvažniji cilj analize vremenskih serija jeste *prognoziranje*, odnosno određivanje budućeg toka posmatrane vremenske serije. Na primer, na nivou privrede kao celine od interesa je prognozirati kretanje društvenog proizvoda, jer se zatim na osnovu dobijene prognoze procenjuju obim i udeo sredstava za zajedničke i opšte potrebe. Ovaj primer istovremeno nam ukazuje na to da formirana prognoza društvenog proizvoda povratno deluje na odluke nosilaca ekonomske politike. Odatle direktno sledi da pogrešna prognoza ima veoma konkretne materijalne posledice u vidu dodatnih troškova prouzrokovanih pogrešno donetim odlukama. Zbog ovog važnog domena korišćenja, modeli u analizi vremenskih serija često se nazivaju prognostičkim modelima. Tako su i brojne knjige iz analize vremenskih serija koje su navedene na spisku literature naslovljene ili u naslovu sadrže reč prognoziranje.

Međutim, bez obzira na značaj prognoziranja vremenskih serija, u okviru ove glave bavićemo se teorijom prognoziranja samo u onoj meri u kojoj je to potrebno da se istaknu izvesne osobine ARIMA modela u modeliranju konkretnih vremenskih serija. Mada su ARIMA modeli osnovna klasa prognostičkih modela koje razmatramo u ovoj knjizi, čitaoca upućujemo na 3. Glavu u kojoj je izložena alternativna klasa modela: strukturni modeli vremenskih serija, kao i način njihovog korišćenja u prognoziranju.

## 6.1 UVOD

Mada u nekom pravilnom redosledu koraka, prognoziranje sledi tek nakon etape ocene ARIMA modela i provere njegove adekvatnosti, u ovoj glavi poćićemo od pretpostavke da su nam date opservacije vremenske serije, te da su nam poznati koeficijenti modela. Na taj način se u teorijskom slučaju možemo pozabaviti izvođenjem u statističkom smislu optimalne prognoze. Time izlaganje nećemo opterećivati problemom odstupanja ocena koeficijenata od njihovih stvarnih, ali nepoznatih vrednosti.



Inače, u realnom postupku prognoziranja, nepoznate koeficijente zamenićemo njihovim ocenjenim vrednostima.

Izlaganje teorije prognoziranja započinjemo izvođenjem prognoze koja ima *minimalnu srednje kvadratnu grešku*. Pri tome polazimo od opservacija vremenske serije  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Želimo prognozirati  $X_{n+h}$ , tj. buduću vrednost vremenske serije za  $h$  vremenskih perioda unapred. Pri tome prognozu formiramo u poslednjem periodu za koji su raspoložive opservacije, a to je  $n$ -ti period. Za tu prognozu koristimo oznaku koju smo uveli u Poglavlju 1.3, naime  $\hat{X}_n(h)$  označava prognozu formiranu u periodu  $n$  za  $h$  perioda (ili koraka) unapred. Prirodan broj  $h$  nazivamo i *dužina horizonta prognoziranja*. Uslovljavajući buduću vrednost vremenske serije prošlim, raspoloživim opservacijama dolazimo do prognoze sa minimalnom srednje kvadratnom greškom. Nakon formiranja *funkcije prognoze* sa navedenim optimalnim svojstvom, istu koristimo za izračunavanje prognoziranih vrednosti. Tako u Poglavlju 6.3 izračunavamo brojnu i intervalnu vrednost prognoze.

Proticanjem vremena nova opservacija vremenske serije postaje nam dostupna. Uzimajući u obzir njeno odstupanje od prognozirane vrednosti u prilici smo da korigujemo svoju, prethodno formiranu prognozu za naredne periode. Ovim postupkom svojevrstne *revizije prognoze* bavimo se u Poglavlju 6.4. Naposljetku, u poslednjem poglavlju definišemo tzv. *moguću funkciju prognoze* koja nam omogućava ispitivanje prirode, odnosno ponašanja prognoze za različite dužine horizonta prognoziranja.

## 6.2 PROGNOZA SA MINIMALNOM SREDNJE KVADRATNOM GREŠKOM

Cilj prognoziranja nam je da predvidimo buduće vrednosti serije sa što je moguće manjom greškom. Stoga ćemo formirati prognozu koja ima optimalna svojstva, odnosno onu koja minimizira srednje kvadratnu grešku prognoze. Ako pretpostavimo da je vremenska serija stacionarna, tada promenljive  $X_1, X_2, \dots, X_n$  imaju konstantnu sredinu  $\mu$ . Prirodno se nameće, mada kao trivijalno rešenje, korišćenje sredine kao prognoze budućih vrednosti serije. Prognozu smo nazvali trivijalnom, jer ne uzima u obzir raspoložive opservacije vremenske serije. Međutim, ova prognoza je optimalna, jer se može pokazati da među svim prognozama ona ima najmanju srednje kvadratnu grešku.

U opštem slučaju do bolje prognoze budućih vrednosti možemo doći korišćenjem raspoloživih opservacija vremenske serije. Zato ćemo umesto funkcije gustine verovatnoće promenljive  $X_{n+h}$  koristiti uslovnu funkciju gustine verovatnoće, uslovljenu raspoloživom informacijom o poznatim vrednostima  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Tako ćemo i srednje kvadratnu grešku prognoze formirati kao uslovnu očekivanu vrednost, uslovljenu raspoloživim  $n$  opservacijama vremenske serije.

Da bismo izveli prognozu sa minimalnom srednje kvadratnom greškom poćićemo od najopštijeg stacionarnog i invertibilnog ARMA modela:

$$\phi_p(B)X_t = \theta_q(B)\varepsilon_t. \quad (6.1)$$

Izrazimo ovaj ARMA model u MA formi, korišćenjem izraza za linearni proces:

$$X_t = \psi(B)\varepsilon_t = \varepsilon_t + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \psi_2\varepsilon_{t-2} + \dots, \quad (6.2)$$

gde je  $\psi(B) = \theta_q(B)/\phi_p(B)$ . Zamenom  $t = n+h$  u izrazu (6.2) dobijamo:

$$X_{n+h} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{n+h-j}. \quad (6.3)$$

U periodu  $t = n$  raspoložemo observacijama  $X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \dots$ , a zadatak nam je da formiramo prognozu buduće vrednosti serije  $X_{n+h}$  za  $h$ -perioda unapred i to u obliku linearne kombinacije raspoloživih observacija  $X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \dots$ . Pošto  $X_t$  za  $t = n, n-1, n-2, \dots$ , možemo pisati u obliku (6.2), kažemo da je prognoza sa minimalnom srednje kvadratnom greškom  $\hat{X}_n(h)$  od  $X_{n+h}$  data izrazom:

$$\hat{X}_n(h) = \psi_h^* \varepsilon_n + \psi_{h+1}^* \varepsilon_{n-1} + \psi_{h+2}^* \varepsilon_{n-2} + \dots, \quad (6.4)$$

gde treba odrediti  $\psi_j^*$  koeficijente. Vrednost ovih koeficijenata odredićemo minimiziranjem srednje kvadratne greške prognoze. Kako je na osnovu izraza (6.3) i (6.4) greška prognoze:

$$X_{n+h} - \hat{X}_n(h) = \left( \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j \varepsilon_{n+h-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{h+j} \varepsilon_{n-j} \right) - \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{h+j}^* \varepsilon_{n-j}, \quad (6.5)$$

to je srednje kvadratna greška prognoze:

$$E[X_{n+h} - \hat{X}_n(h)]^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2 + \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} [\psi_{h+j} - \psi_{h+j}^*]^2. \quad (6.6)$$

Na osnovu izraza (6.6) očigledno je da se minimalna vrednost srednje kvadratne greške postiže kada je  $\psi_{h+j}^* = \psi_{h+j}$ . Prema tome, *prognoza sa minimalnom srednje kvadratnom greškom* (engl. *minimum mean square error forecast*) glasi:

$$\hat{X}_n(h) = \psi_h \varepsilon_n + \psi_{h+1} \varepsilon_{n-1} + \psi_{h+2} \varepsilon_{n-2} + \dots. \quad (6.7)$$

Napominjemo da  $\hat{X}_n(h)$ , za  $h = 1, 2, \dots$ , nazivamo *funkcija prognoze* (engl. *forecasting function*). Ona je dakle funkcija broja perioda  $h$  za koje formiramo prognozu u odnosu na fiksirani početak  $n$ . Uslovna očekivana vrednost šokova je

$$E(\varepsilon_{n+j} | X_n, X_{n-1}, \dots) = \begin{cases} \varepsilon_{n+j}, & j \leq 0 \\ 0, & j > 0 \end{cases}, \quad (6.8)$$

jer su prošle vrednosti šokova  $\varepsilon_{n+j}$  poznate za  $j \leq 0$ , a pošto su buduće vrednosti nepoznate, zamenjujemo ih očekivanom vrednošću koja je jednaka nuli. Korišćenjem (6.3) i (6.8) dobijamo:

$$E(X_{n+h} | X_n, X_{n-1}, \dots) = \psi_h \varepsilon_n + \psi_{h+1} \varepsilon_{n-1} + \psi_{h+2} \varepsilon_{n-2} + \dots \quad (6.9)$$

To znači da je prognoza za  $X_{n+h}$  sa minimalnom srednje kvadratnom greškom data njenom uslovnom očekivanom vrednošću, odnosno

$$\hat{X}_n(h) = E(X_{n+h} | X_n, X_{n-1}, \dots). \quad (6.10)$$

Može se pokazati da je prognoza nepristrasna ocena buduće vrednosti. Ovo svojstvo prognoze sledi na osnovu osobine *greške prognoze za h perioda unapred počevši od tog perioda* (ili kako se ova greška ukratko naziva – greška prognoze za h perioda unapred):

$$e_n(h) = X_{n+h} - \hat{X}_n(h) = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j \varepsilon_{n+h-j}, \quad (6.11)$$

prema kojoj je  $E[e_n(h) | X_t, t \leq n] = 0$ . *Varijansa greške prognoze za h perioda unapred* je

$$\text{Var}[\hat{X}_n(h)] = \text{Var}[e_n(h)] = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2. \quad (6.12)$$

Na osnovu varijanse greške prognoze za h perioda unapred definišemo intervalnu ocenu prognoze. U tom cilju uvodimo pretpostavku da je proces  $\{X_t\}$  Gausov proces. Tada  $100(1-\alpha)\%$  granice *intervala poverenja prognoze* glase:

$$\hat{X}_n(h) \pm Z_{\alpha/2} \left[ 1 + \sum_{j=1}^{h-1} \psi_j^2 \right]^{1/2} \sigma, \quad (6.13)$$

gde je  $Z_{\alpha/2}$  vrednost normalne standardizovane slučajne promenljive takve da je  $P(Z > Z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ . Na osnovu izraza (6.12) i (6.13) postaje jasno zašto je značajno određivanje  $\psi$ -pondera u analizi vremenskih serija, odnosno formiranje MA reprezentacija. Naime, korišćenjem  $\psi$ -pondera izračunavamo varijansu greške prognoze i odgovarajuću intervalnu ocenu prognoze.

Ukažimo na još jedno svojstvo grešaka prognoze u slučaju kada je  $h=1$ , tj za jedan period unapred. Prema izrazu (6.11), greška prognoze je linearna kombinacija budućih šokova nakon trenutka  $n$ , a u slučaju greška prognoze za jedan period unapred je

$$e_n(1) = X_{n+1} - \hat{X}_n(1) = \varepsilon_{n+1}. \quad (6.14)$$

Drugim rečima, šokovi koji generišu posmatrani proces i za koje smo pretpostavili da su nezavisne slučajne promenljive predstavljaju greške prognoze za jedan period unapred. Odatle proizilazi da za prognozu sa minimalnom srednje kvadratnom greškom, greške prognoze za jedan period unapred moraju biti nekorelisane.

Međutim, u opštem slučaju greške prognoze za  $h$ -perioda unapred biće korelisane. Pri tome razlikujemo dva slučaja. Prvi slučaj kada prognozu formiramo počevši od različitih perioda za istu dužinu horizonta prognoziranja i drugi slučaj kada prognozu formiramo u istom periodu, ali za različite dužine horizonta prognoziranja. Box i Jenkins (1976, ss. 158-160) su pokazali da je autokorelacija između grešaka prognoze formirane počevši od različitih perioda  $n$  i  $n-j$ ,  $j \geq 0$  data izrazom:

$$\rho[e_n(h), e_{n-j}(h)] = \frac{\sum_{i=j}^{h-1} \psi_i \psi_{i-j}}{\sum_{i=0}^{h-1} \psi_i^2}, \quad 0 \leq j \leq h. \quad (6.15)$$

a jednaka nuli u ostalim slučajevima. Autokorelacija između grešaka prognoze formirane u istom vremenskom periodu  $n$ , ali za  $h$  i  $h+j$  perioda unapred data je izrazom:

$$\rho[e_n(h), e_n(h+j)] = \frac{\sum_{i=0}^{h-1} \psi_i \psi_{h+i}}{\sqrt{\sum_{i=0}^{h-1} \psi_i^2 \sum_{m=0}^{h+j-1} \psi_m^2}}. \quad (6.16)$$

Prema tome, često će biti prisutna tendencija da funkcija prognoze leži ili cela ispod ili iznad stvarnih observacija vremenske serije kada one postanu dostupne.

Ako imamo ARIMA proces, tada u izrazu (6.1) figuriše i polinom  $(1-B)^d$ . Sada se ne mogu direktno izvesti ponderi jer je proces nestacionaran. U ovom slučaju prognozu  $X_{n+h}$  možemo formirati korišćenjem AR reprezentacije procesa:

$$\pi(B)X_{n+h} = \varepsilon_{n+h}, \quad (6.17)$$

gde je  $\pi(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j = \frac{\phi_p(B)(1-B)^d}{\theta_q(B)}$ . Ekvivalentan izraz izrazu (6.17) je

$$X_{n+h} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{n+h-j} + \varepsilon_{n+h}. \quad (6.18)$$

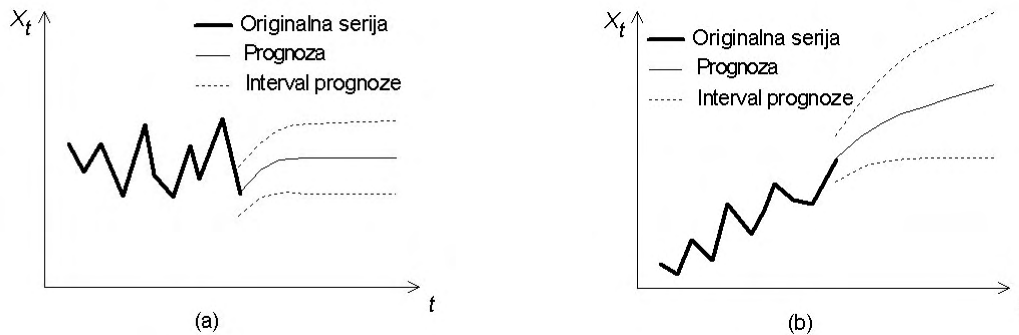
AR forma procesa postoji jer je proces invertibilan. Pokazano<sup>1</sup> je da svi rezultati dobijeni kod ARMA procesa (izrazi (6.10) do (6.16)) važe i u slučaju nestacionarnog ARIMA procesa. Rekurzivna relacija koja se može uspostaviti između  $\psi$  i  $\pi$  pondera je sledeća:

<sup>1</sup> Videti na primer: Wei (1990, ss. 89-90).

$$\psi_j = \sum_{i=0}^{j-1} \pi_{j-i} \psi_i, \quad j=1, 2, \dots, h-1. \quad (6.19)$$

Dakle, pošto su za nestacionarni ARIMA proces određeni  $\pi$ -ponderi, na osnovu relacije (6.19) određujemo  $\psi$ -pondere, a potom varijansu (6.12) greške prognoze i interval poverenja prognoze (6.13).

Pre nego što izložimo praktičan postupak izračunavanja prognoze, ukažimo na različito ponašanje intervalnih ocena prognoze sa porastom dužine horizonta prognoziranja i to u zavisnosti od toga da li je posmatrani proces stacionaran ili ne.



**Slika 6.1** Brojna i intervalna ocena prognoze: (a) stacionarne i (b) nestacionarne serije

Sa povećanjem dužine horizonta prognoziranja kod stacionarnog procesa varijansa (6.12) greške prognoze je konačna, tj.  $\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2$  postoji, a na osnovu izraza (6.13) granice intervala poverenja prognoze približavaju se dvema horizontalnim paralelnim linijama kao što je to prikazano na Slici 6.1(a). Za nestacionarni proces  $\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2$  ne postoji, odnosno  $\sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2$  raste neograničeno sa povećanjem horizonta prognoziranja, a time i granice intervala poverenja postaju sve šire i šire. Brojna i intervalna ocena prognoze nestacionarnog procesa prikazane su na Slici 6.1(b).

### 6.3 IZRAČUNAVANJE PROGNOZE

U dosadašnjem izlaganju koristili smo dve forme ARIMA modela: MA i AR reprezentaciju. Mada se na osnovu njih može izračunati prognoza kod konkretnog modela, ipak ćemo u tu svrhu koristiti treću formu ARIMA modela: tzv. *formu diferencne jednačine*. Pri tome imamo na umu dobijeni rezultat prema kome je prognoza sa minimalnom srednje kvadratnom greškom data očekivanom vrednošću  $\hat{X}_n(h) = E(X_{n+h} | X_n, X_{n-1}, \dots)$ . Da bismo izrazili ARIMA model u formi diferencne jednačine pomnožićemo dva polinoma  $\phi(B)$  i  $(1-B)^d$  tako da dobijemo:

$$\alpha(B) = \phi(B)(1-B)^d = (1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_{p+d} B^{p+d}). \quad (6.20)$$

Sada možemo opšti ARIMA( $p, d, q$ ) model pisati u formi diferencne jednačine:

$$(1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_{p+d} B^{p+d}) X_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t. \quad (6.21)$$

Zamenom  $t = n + h$  u izrazu (6.21) dobijamo:

$$\begin{aligned} X_{n+h} &= \alpha_1 X_{n+h-1} + \alpha_2 X_{n+h-2} + \dots + \alpha_{p+d} X_{n+h-p-d} \\ &\quad + \varepsilon_{n+h} - \theta_1 \varepsilon_{n+h-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{n+h-q}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Određivanjem uslovne očekivane vrednosti izraza (6.22) dobijamo opšti izraz na osnovu koga za konkretne oblike ARIMA modela izračunavamo prognozu:

$$\begin{aligned} \hat{X}_n(h) &= \alpha_1 \hat{X}_n(h-1) + \dots + \alpha_{p+d} \hat{X}_n(h-p-d) \\ &\quad + \hat{\varepsilon}_n(h) - \theta_1 \hat{\varepsilon}_n(h-1) - \dots - \theta_q \hat{\varepsilon}_n(h-q), \end{aligned} \quad (6.23)$$

gde su

$$\hat{X}_n(j) = \begin{cases} E(X_{n+j} | X_n, X_{n-1}, \dots), & j > 0 \\ X_{n+j}, & j \leq 0 \end{cases}, \quad (6.24)$$

$$\hat{\varepsilon}_n(j) = \begin{cases} 0, & j > 0 \\ X_{n+j} - \hat{X}_{n+j-1}(1), & j \leq 0 \end{cases}. \quad (6.25)$$

Prema izrazu (6.23) sledi da je za izračunavanje prognoze na osnovu ocenjenog ARIMA modela potrebno zameniti prošla očekivanja, kada je  $j \leq 0$ , poznatim vrednostima serije  $X_{n+j}$  i poznatim vrednostima šokova  $\varepsilon_{n+j}$ , a buduća očekivanja, kada je  $j > 0$ , prognozom serije  $\hat{X}_n(j)$  i vrednošću šokova čija je očekivana vrednost u budućem periodu jednaka nuli.

Ilustrujmo na karakterističnim primerima ARIMA modela način formiranja kao i osobine prognoza. Kod svih modela pretpostavljamo da su nam koeficijenti modela poznati. Za AR(1) model:  $X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$ , imamo na osnovu izraza (6.22):

$$X_{n+h} = \mu + \phi_1(X_{n+h-1} - \mu) + \varepsilon_{n+h}, \quad (6.26)$$

odakle se dobija prognoza na osnovu izraza (6.23) za  $h = 1$ :

$$\hat{X}_n(1) = \mu + \phi_1(X_n - \mu). \quad (6.27)$$

Prognoza za  $h > 1$  je

$$\hat{X}_n(h) = \mu + \phi_1[\hat{X}_n(h-1) - \mu] = \mu + \phi_1^h(X_n - \mu). \quad (6.28)$$

Na osnovu izraza (6.28) možemo rekursivno odrediti prognozu od početnog vremenskog perioda  $n$  za  $h$  perioda unapred na osnovu prognoze za  $h-1$  perioda unapred. Izraz sa desne strane drugog znaka jednakosti u istom izrazu sugerise način izračunavanja prognoze u odnosu na poslednji raspoloživi podatak. Tekuće odstupanje od sredine procesa ponderise se veličinom  $\phi_1^h$  čija vrednost opada sa povećanjem dužine horizonta prognoziranja.

Iz (6.26) i (6.27) direktno sledi greška prognoze za jedan period unapred:  $e_n(1) = \varepsilon_{n+1}$ . Na osnovu nje varijansa greške prognoze za jedan period unapred:  $Var[e_n(1)] = \sigma^2$ . Dakle, kod AR(1) modela varijansa greške prognoze za jedan period unapred jednaka je varijansi procesa belog šuma. Može se pokazati da su i u slučaju ovog modela prognoze nepristrasne ocene nepoznate buduće vrednosti serije, a da je varijansa greške prognoze data izrazom:

$$Var[e_n(h)] = \sigma^2 \frac{1 - \phi_1^{2h}}{1 - \phi_1^2}, \quad (6.29)$$

odnosno, za velike vrednosti  $h$  imamo:

$$Var[e_n(h)] \approx \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}, \quad (6.30)$$

što znači da se za velike vrednosti  $h$  varijansa greške prognoze izjednačava sa varijansom vremenske serije.

**Primer 6.1** Za ilustraciju postupka izračunavanja prognoze kod AR(1) modela pretpostavimo da su nam poznati sledeći elementi:  $\phi_1 = 0.8$ ,  $\mu = 10$  i  $\sigma^2 = 0.16$ . Pretpostavimo takođe da je poslednja raspoloživa observacija  $X_{50} = 10.5$ . Zadatak nam je da izračunamo prognozu sledećih opservacija:  $X_{51}$ ,  $X_{52}$ ,  $X_{53}$  i  $X_{54}$ , te da formiramo odgovarajuće 95% intervale poverenja prognoza.

Na osnovu opšteg izraza (6.28) za prognoze AR(1) modela imamo:

$$\hat{X}_{50}(1) = 10 + 0.8(10.5 - 10) = 10.4$$

$$\hat{X}_{50}(2) = 10 + 0.8^2(10.5 - 10) = 10.32$$

$$\hat{X}_{50}(3) = 10 + 0.8^3(10.5 - 10) = 10.256$$

$$\hat{X}_{50}(4) = 10 + 0.8^4(10.5 - 10) = 10.2048.$$

Iz jednakosti:  $(1 - \phi_1 B)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots)$ , dobijamo  $\psi$ -pondere, pa je  $\psi_j = \phi_1^j = 0.8^j$ ,  $j \geq 0$ , tako da na osnovu izraza (6.13) možemo izračunati intervale poverenja:

$$X_{51} \in (10.4 \pm 1.96\sqrt{0.16}) \text{ ili } 9.616 < X_{51} < 11.184$$

$$X_{52} \in (10.32 \pm 1.96\sqrt{1+0.8^2}\sqrt{0.16}) \text{ ili } 9.316 < X_{52} < 11.324$$

$$9.134 < X_{53} < 11.378 \text{ i } 9.013 < X_{54} < 11.397.$$

Očigledno je da sa povećanjem horizonta prognoziranja interval poverenja postaje sve širi. ■

Za MA(1) model  $X_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ , imamo na osnovu izraza (6.22):

$$X_{n+h} = \mu + \varepsilon_{n+h} - \theta_1 \varepsilon_{n+h-1}, \quad (6.31)$$

odakle se dobija prognoza na osnovu izraza (6.23), za period unapred:

$$\hat{X}_n(1) = \mu - \theta_1 \varepsilon_n, \quad (6.32)$$

a za  $h > 1$  prognoza je

$$\hat{X}_n(h) = \mu. \quad (6.33)$$

Znači da je za ma koji horizont prognoziranja veći od jedan, prognoza kod MA(1) modela jednaka sredini vremenske serije. Kako je  $\psi_1 = -\theta_1$ ,  $\psi_j = 0$ , za  $j > 1$ , to je prema izrazu (6.12) za  $h=1$  varijansa greške prognoze jednaka varijansi procesa belog šuma. Za  $h > 1$  varijansa greške prognoze je:

$$\text{Var}[e_n(h)] = (1 + \theta_1^2) \sigma^2. \quad (6.34)$$

Prema tome počevši od drugog perioda, pa na dalje, varijanse greške prognoze jednake su međusobom. Jednaka vrednost varijanse greške prognoze kod MA(1) procesa za različite dužine horizonte prognoziranja objašnjava izgled intervala poverenja prognoze ovog procesa prikazanog na Slici 6.1(a).

**Primer 6.2** Za ilustraciju postupka izračunavanja prognoze kod MA(1) modela pretpostavimo da su nam poznati sledeći elementi:  $\theta_1 = 0.7$ ,  $\mu = 5$  i  $\sigma^2 = 0.25$ . Pretpostavimo takođe da je poslednja raspoloživa observacija  $X_{80} = 5.3$ , a da je pretposlednja vrednost šoka  $\varepsilon_{79} = -0.2$ . Zadatak nam je da izračunamo prognozu sledećih opservacija:  $X_{81}$ ,  $X_{82}$ ,  $X_{83}$  i  $X_{84}$ , te da formiramo odgovarajuće 95% intervale poverenja prognoza.

Da bismo izračunali prognozu za jedan period unapred potrebno je odrediti tekuću vrednost šoka. U realnoj situaciji do nje dolazimo na osnovu ocenjenog modela, odnosno ona predstavlja rezidual u tekućem periodu. U našem primeru do te vrednosti dolazimo na osnovu izraza:  $\varepsilon_n = (X_n - \mu) + \theta_1 \varepsilon_{n-1}$ , odakle dobijamo



$$\varepsilon_{80} = (X_{80} - \mu) + \theta_1 \varepsilon_{79} = (5.3 - 5) + 0.7(-0.2) = 0.16.$$

Na osnovu opšteg izraza (6.32) za prognoze MA(1) modela dobijamo:

$$\hat{X}_{80}(1) = \mu - \theta_1 \varepsilon_{80} = 5 - 0.7(0.16) = 4.888,$$

a za  $h > 1$  vrednost prognoze je prema izrazu (6.33) jednaka sredini serije, tj.  $\hat{X}_{80}(2) = \hat{X}_{80}(3) = \hat{X}_{80}(4) = 5$ . Kako je  $\psi_1 = -\theta_1 = -0.7$ , a  $\psi_j = 0$ , za  $j > 1$ , to je varijansa greške prognoze za jedan period unapred:

$$\text{Var}[e_n(1)] = \text{Var}[e_{80}(1)] = \sigma^2 = 0.25,$$

a za dva, tri i četiri perioda unapred varijanse su:

$$\text{Var}[e_{80}(2)] = \text{Var}[e_{80}(3)] = \text{Var}[e_{80}(4)] = (1 + \theta_1^2)\sigma^2 = (1 + 0.7^2) \cdot 0.25 = 0.3725.$$

Naposletku, 95% intervali poverenja prognoza su:

$$\text{za } h = 1: \hat{X}_{80}(1) \pm 1.96\sqrt{\text{Var}[e_{80}(1)]}; 4.888 \pm 1.96\sqrt{0.25}$$

$$X_{81} \in (3.908, 5.868)$$

$$\text{za } h > 1: \hat{X}_{80}(h) \pm 1.96\sqrt{\text{Var}[e_{80}(h)]}; 5 \pm 1.96\sqrt{0.3725}$$

$$X_{82}, X_{83}, X_{84} \in (3.804, 6.196). \quad \blacksquare$$

Za ARMA(1,1) model  $(1 - \phi_1 B)(X_t - \mu) = (1 - \theta_1 B)\varepsilon_t$ , imamo na osnovu izraza (6.22):

$$X_{n+h} = \mu + \phi_1(X_{n+h-1} - \mu) + \varepsilon_{n+h} - \theta_1 \varepsilon_{n+h-1}, \quad (6.35)$$

odakle je prognoza na osnovu izraza (6.23), za  $h = 1$  period unapred:

$$\hat{X}_n(1) = \mu + \phi_1(X_n - \mu) - \theta_1 \varepsilon_n, \quad (6.36)$$

a za  $h > 1$  prognoza je

$$\hat{X}_n(h) = \mu + \phi_1[\hat{X}_n(h-1) - \mu] = \mu + \phi_1^h(X_n - \mu) - \phi_1^{h-1}\theta_1 \varepsilon_n. \quad (6.37)$$

Varijansu greške prognoze dobićemo korišćenjem MA forme ARMA modela. Na osnovu izraza (6.2) imamo jednakost polinoma:

$$(1 - \phi_1 B)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = (1 - \theta_1 B), \quad (6.38)$$

odakle se izjednačavanjem koeficijenata uz  $B^j$  sa obe strane znaka jednakosti dobija:

$$\psi_j = \phi_1^{j-1}(\phi_1 - \theta_1), \quad j \geq 1. \quad (6.39)$$

Na osnovu izračunate vrednosti  $\psi$ -pondera konačno dobijamo varijansu greške prognoze koja je data izrazom:

$$\text{Var}[e_n(h)] = \sigma^2 \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{h-1} [\phi_1^{j-1}(\phi_1 - \theta_1)]^2 \right\}. \quad (6.40)$$

Ako je ispunjen uslov stacionarnosti  $|\phi_1| < 1$ , sa povećanjem dužine horizonta prognoziranja varijansa greške prognoze približavaće se ka  $\sigma^2[1 + (\phi_1 - \theta_1)^2 / (1 - \phi_1^2)]$ .

**Primer 6.3** Za ilustraciju postupka izračunavanja prognoze kod ARMA(1,1) modela pretpostavimo da su nam poznati sledeći elementi:  $\phi_1 = -0.8$ ,  $\theta_1 = 0.3$  i  $\mu = 8$ . Pretpostavimo takođe da su dve poslednje raspoložive observacije  $X_{99} = 8.2$  i  $X_{100} = 7.9$ , a da je pretposlednja vrednost šoka  $\varepsilon_{99} = -0.1$ . Zadatak nam je da izračunamo prognozu sledećih opservacija:  $X_{101}$ ,  $X_{102}$ ,  $X_{103}$  i  $X_{104}$ , te da formiramo odgovarajuće 95% intervale poverenja prognoza.

Da bismo izračunali prognozu za jedan period unapred potrebno je odrediti tekuću vrednost šoka. U našem primeru do te vrednosti dolazimo na osnovu izraza:  $\varepsilon_n = (X_n - \mu) - \phi_1(X_{n-1} - \mu) + \theta_1\varepsilon_{n-1}$ , odakle dobijamo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{100} &= (X_{100} - \mu) - \phi_1(X_{99} - \mu) + \theta_1\varepsilon_{99} = \\ &= (7.9 - 8) + 0.8(8.2 - 8) + 0.3(-0.1) = 0.03. \end{aligned}$$

Na osnovu opšteg izraza (6.37) za prognoze ARMA(1,1) modela dobijamo:

$$\begin{aligned} \hat{X}_{100}(1) &= \mu + \phi_1(X_{99} - \mu) - \theta_1\varepsilon_{99} = \\ &= 8 - 0.8(7.9 - 8) + 0.3 \cdot 0.03 = 8.071, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_{100}(2) &= \mu + \phi_1^2(X_{100} - \mu) - \phi_1\theta_1\varepsilon_{100} = \\ &= 8 + (-0.8)^2(7.9 - 8) - (-0.8)0.3 \cdot 0.03 = 7.943, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_{100}(3) &= \mu + \phi_1^3(X_{100} - \mu) - \phi_1^2\theta_1\varepsilon_{100} = \\ &= 8 + (-0.8)^3(7.9 - 8) - (-0.8)^2 0.3 \cdot 0.03 = 8.05, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_{100}(4) &= \mu + \phi_1^4(X_{100} - \mu) - \phi_1^3\theta_1\varepsilon_{100} = \\ &= 8 + (-0.8)^4(7.9 - 8) - (-0.8)^3 0.3 \cdot 0.03 = 7.964, \end{aligned}$$

Varijansa greške prognoze za jedan period unapred na osnovu izraza (6.40) je:

$$\text{Var}[e_{100}(1)] = \sigma^2 = 0.64.$$

Varijansa greške prognoze za dva perioda unapred je:

$$\text{Var}[e_{100}(2)] = \sigma^2 \left\{ 1 + [\phi_1^0(\phi_1 - \theta_1)]^2 \right\} = 0.64 [1 + (-0.8 - 0.3)^2] = 1.4144,$$

a preostale dve varijanse greške prognoze su:  $\text{Var}[e_{100}(3)] = 1.91$  i  $\text{Var}[e_{100}(4)] = 2.2705$ . Na osnovu njih, 95% intervali poverenja prognoza su:

$$\text{za } h=1: \hat{X}_{100}(1) \pm 1.96\sqrt{\text{Var}[e_{100}(1)]}; 8.071 \pm 1.96\sqrt{0.64}$$

$$X_{101} \in (7.091, 9.051)$$

$$\text{za } h>1: \hat{X}_{100}(2) \pm 1.96\sqrt{\text{Var}[e_{100}(2)]}; 7.943 \pm 1.96\sqrt{1.4144}$$

$$X_{102} \in (6.486, 9.4), X_{103} \in (6.352, 9.738), X_{104} \in (6.135, 9.792)$$

■

Na kraju razmotrimo primer izračunavanja prognoze i varijanse greške prognoze kod nestacionarnog ARIMA modela. Uzećemo primer jednostavnog modela kao što je ARMA(1,1) modela, kod koga ćemo staviti da je  $\phi_1 = 1$ . Na taj način dobićemo nestacionarni ARIMA(0,1,1), odnosno IMA(1,1) model.

Za izračunavanje  $\psi$ -pondera koristimo AR formu modela jer MA forma ne postoji zbog nestacionarnosti modela. Iz jednakosti

$$1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots = \frac{1 - B}{1 - \theta_1 B}, \quad (6.41)$$

koja se može napisati u obliku

$$(1 - B) = 1 - (\pi_1 + \theta_1)B - (\pi_2 - \pi_1\theta_1)B^2 - (\pi_3 - \pi_2\theta_1)B^3 - \dots \quad (6.42)$$

izjednačavanjem koeficijenata uz  $B^j$  sa obe strane znaka jednakosti dobijamo

$$\pi_j = (1 - \theta_1)\theta_1^{j-1}, \quad j \geq 1. \quad (6.43)$$

Napokon se primenom rekursivne relacije (6.19) izračunavaju  $\psi$ -ponderi, tj. za  $\psi_j = 1 - \theta_1$ , za  $1 \leq j \leq h-1$ . Pošto smo odrediti  $\psi$ -pondere dobijamo konačan izraz za varijansu greške prognoze:

$$\text{Var}[e_n(h)] = \sigma^2 [1 + (h-1)(1 - \theta_1)^2] \quad (6.44)$$

koja teži beskonačnosti sa povećanjem dužine horizonta prognoziranja. Na osnovu prognoze i njene preciznosti merene varijansom greške prognoze, zaključujemo da suštinski različite rezultate prognoziranja ostvarujemo u zavisnosti od toga da li smo za visoke vrednosti koeficijenta  $\phi_1$  izabrali ARMA(1,1) ili IMA(1,1) model. Ako je ispunjen uslov stacionarnosti  $|\phi_1| < 1$ , tada na osnovu izraza (6.37)  $\hat{X}_n(h) \rightarrow \mu$ , kada  $h \rightarrow \infty$ . Međutim, ako koeficijent  $\phi_1 \rightarrow 1$ , tada na osnovu izraza (6.37)  $\hat{X}_n(h) \rightarrow \hat{X}_n(h-1)$ , kada  $h \rightarrow \infty$ . Znači da sa povećanjem horizonta prognoziranja prognoza ne konvergira ka fiksnom nivou, nego slobodno "luta".

## 6.4 REVIZIJA PROGNOZE

Pretpostavimo da smo na osnovu vremenske serije, na primer u maju, formirali prognozu tri meseca unapred (za jun, jul i avgust). Protokom vremena stvarna vrednost observacije za jun postaje dostupna, pa sa tom novom vrednošću možemo izvršiti reviziju prethodno formiranih prognoza za jul i avgust, uzimajući u obzir razliku koja se javila između prognoze i ostvarenja u junu mesecu. Da bismo došli do izraza prema kome vršimo reviziju prognoze poćićemo od prognoze sa minimalnom srednje kvadratnom greškom date izrazom (6.7). Prema tom izrazu dobijamo prognoze buduće opservacije  $X_{n+h+1}$ , formirane u periodu  $n+1$  i  $n$ , tj.  $\hat{X}_{n+1}(h)$  i  $\hat{X}_n(h+1)$ :

$$\hat{X}_{n+1}(h) = \psi_h \varepsilon_{n+1} + \psi_{h+1} \varepsilon_n + \psi_{h+2} \varepsilon_{n-1} + \dots, \quad (6.45)$$

$$\hat{X}_n(h+1) = \psi_h \varepsilon_n + \psi_{h+1} \varepsilon_{n-1} + \psi_{h+2} \varepsilon_{n-2} + \dots \quad (6.46)$$

Oduzimanjem izraza (6.46) od (6.45) sledi da je

$$\hat{X}_{n+1}(h) = \hat{X}_n(h+1) + \psi_h \varepsilon_{n+1}. \quad (6.47)$$

Kako je prema (6.14)

$$\varepsilon_{n+1} = X_{n+1} - \hat{X}_n(1). \quad (6.48)$$

*jednačina revizije prognoze je:*

$$\hat{X}_{n+1}(h) = \hat{X}_n(h+1) + \psi_h [X_{n+1} - \hat{X}_n(1)]. \quad (6.50)$$

Znači da u periodu kada nam postane dostupna opservacija  $X_{n+1}$  vršimo ažuriranje, u prethodnom periodu formirane prognoze  $\hat{X}_n(h+1)$  dodajući joj razliku između stvarne i prognoziranе vrednosti (grešku prognoze za jedan period unapred) množenu vrednošću  $\psi$  – pondera.

**Primer 6.4** Za ilustraciju postupka revizije prognoze poslužimo se AR(1) modelom koji smo definisali u Primeru 6.1. Izvršiti ažuriranje prognoze za naredne periode korišćenjem izračunatih prognoza iz tog primera:  $\hat{X}_{50}(1) = 10.4$ ,

$\hat{X}_{50}(2) = 10.32$ ,  $\hat{X}_{50}(3) = 10.256$  i  $\hat{X}_{50}(4) = 10.2048$ , uz pretpostavku da je postala dostupna opservacija  $X_{51} = 10.6$ .

Korišćenjem (6.50) dobijamo ažurirane prognoze za jedan, dva i tri perioda unapred:

$$\hat{X}_{51}(1) = \hat{X}_{50}(2) + \psi_1[X_{51} - \hat{X}_{50}(1)] = 10.32 + 0.8(10.6 - 10.4) = 10.48$$

$$\hat{X}_{51}(2) = \hat{X}_{50}(3) + \psi_2[X_{51} - \hat{X}_{50}(1)] = 10.256 + 0.64(10.6 - 10.4) = 10.384$$

$$\hat{X}_{51}(3) = \hat{X}_{50}(4) + \psi_3[X_{51} - \hat{X}_{50}(1)] = 10.2048 + 0.512(10.6 - 10.4) = 10.3072.$$

U poređenju sa vrednošću prethodno izračunatih prognoza ažurirane prognoze su korigovane naviše zbog pozitivne vrednosti greške prognoze. ■

## 6.5 MOGUĆA FUNKCIJA PROGNOZE

Ako nam je u analizi vremenskih serija osnovni zadatak izračunavanje prognozirane vrednosti, tada je diferencni oblik ARIMA modela najpogodniji. Međutim, kada nameravamo da ispitamo prirodu, odnosno ponašanje prognoza, tada se služimo *srubljenim oblikom linearnog procesa* (engl. *truncated linear process*). Pretpostavimo da je proces  $X_t$  opisan ARIMA( $p, d, q$ ) modelom. Tada je *srubljeni oblik linearnog procesa*:

$$X_{n+h} = C_n(h) + I_n(h), \text{ za } h \geq 1. \quad (6.51)$$

U izrazu (6.51) za određeno  $n$ ,  $C_n(h)$  je komplementarna funkcija ili opšte rešenje diferencne jednačine (6.23). Za  $h > q$  dobijamo na osnovu (6.23) homogenu diferencnu jednačinu:

$$\hat{X}_n(h) - \alpha_1 \hat{X}_n(h-1) - \dots - \alpha_{p+d} \hat{X}_n(h-p-d) = 0, \text{ } h > q \quad (6.52)$$

Njeno rešenje glasi:

$$\hat{X}_n(h) = \beta_0^{(n)} f_0(h) + \beta_1^{(n)} f_1(h) + \dots + \beta_{p+d-1}^{(n)} f_{p+d-1}(h), \text{ } h > q - p - d, \quad (6.53)$$

gde su  $f_0(h)$ ,  $f_1(h)$ , ...,  $f_{p+d-1}(h)$  funkcije dužine horizonta prognoziranja. Ove funkcije mogu biti polinomijalne, eksponencijalne, sinusne i kosinusne funkcije ili proizvod tih funkcija. Za određeni početni period  $n$ , koeficijenti  $\beta_j^{(n)}$  su konstantni bez obzira na dužinu horizonta prognoziranja. Međutim, ovi koeficijenti menjaju svoju vrednost sa promenom početnog perioda u kome formiramo prognozu. Rešenje diferencne jednačine dato izrazom (6.53) nazivamo *moguća funkcija prognoze* (engl. *eventual forecast function*). Reč "moguća" u nazivu funkcije, dodata je za slučaj kada je  $q > p + d$ , jer tada na osnovu ove funkcije možemo odrediti prognozu samo za horizont

prognoziranja  $h > q - p - d$ . U opštem slučaju moguća funkcija prognoze jednoznačno je određena krivom koja prolazi kroz  $p + d$  tačaka  $\hat{X}_n(q)$ ,  $\hat{X}_n(q-1)$ , ...,  $\hat{X}_n(q-p-d+1)$  gde je  $\hat{X}_n(j) = X_{n-j}$ , za  $j \geq 0$ .

U izrazu (6.51)  $I_n(h)$  je partikularno rešenje diferencne jednačine (6.23) i ono je

$$I_n(h) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j \varepsilon_{n+h-j} & h \geq 1 \\ 0, & h < 1 \end{cases}. \quad (6.54)$$

Detaljno izvođenje opšteg rešenja diferencne jednačine (6.23) dato je kod Box i Jenkinsa (1976, ss. 114-119).

Prema izrazu (6.52) može se zaključiti da autoregresioni koeficijenti  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p+d}$  uslovljavaju formu funkcije prognoze, odnosno izraze za funkcije  $f_0(h)$ ,  $f_1(h)$ , ...,  $f_{p+d-1}(h)$ . Da bismo to pokazali razmotrićemo slučaj kada je  $d=0$ , pa ćemo razložiti polinom  $\alpha(B)$ :

$$\alpha(B) = (1 - g_1 B)(1 - g_2 B) \dots (1 - g_p B), \quad (6.55)$$

gde smo pretpostavili da su  $g_i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) različite recipročne vrednosti korena karakteristične jednačine  $\alpha(B) = 0$ . Ako je  $g_1$  realno, tada je  $f_1(h) = g_1^h$ . Ako su  $g_2$  i  $g_3$  par recipročnih vrednosti konjugovano kompleksnih korena, tada je njihov doprinos iskazan kroz prigušene sinusne oscilacije. Naposljetku, ako imamo  $d$  jednakih korena, odnosno ako je polinom  $\alpha(B)$  oblika:

$$\alpha(B) = (1 - g_1 B)(1 - g_2 B) \dots (1 - g_p B)(1 - g_0 B)^d, \quad (6.56)$$

tada je  $f_{p+1}(h) = g_0$ ,  $f_{p+2}(h) = h g_0$ , ...,  $f_{p+d}(h) = h^{d-1} g_0$ . Kada su koreni jednaki jedinici, tada je  $\alpha(B) = \phi(B)(1 - B)^d$ , pa je rešenje (6.53) jednako:

$$\hat{X}_n(h) = \sum_{j=1}^p \beta_j^{(n)} f_j(h) + \sum_{j=p+1}^{p+d} \beta_j^{(n)} h^{j-p-1}. \quad (6.57)$$

Do sada smo razmatrali moguću funkciju prognoze ARIMA procesa bez konstante. Međutim, ako je konstanta  $\theta_0$  prisutna, tada se rešenju (6.57) dodaje sabirak  $\beta_0$  čija je vrednost:

$$\beta_0 = \frac{\theta_0}{1 - \theta_1 - \dots - \theta_q} \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j \varepsilon_{n+h-j}. \quad (6.58)$$

Na osnovu opšteg izraza moguće funkcije prognoze može se ukazati na formu iste kod specifičnih ARIMA procesa. Tako na primer, moguća funkcija prognoze

ARIMA(0,  $d$ ,  $q$ ) procesa sa konstantnom, zadovoljava jednačinu  $(1-B)^d \hat{X}_n(h) = 0$  i data je izrazom:

$$\hat{X}_n(h) = \beta_0 + \beta_1^{(n)} + \beta_2^{(n)}h + \dots + \beta_d^{(n)}h^{d-1}, \quad (6.59)$$

na osnovu kojeg dobijamo prognoze za horizont prognoziranja  $h > q - d$ . Drugim rečima, moguća funkcija prognoze za ovaj proces predstavlja polinom reda  $(d-1)$  po dužini horizonta prognoze. Pomeranjem početnog perioda  $n$  dolazi do revizije koeficijenata  $\beta_j^{(n)}$ . Pre nego što počne da sledi navedeni polinom po  $h$ , prognoza počevši od perioda  $n$ , čini  $(q-d)$  skokova koji zavise od  $\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \dots, \varepsilon_{n-q+1}$ . Položaj polinoma na grafiku vremenske serije jednoznačno je određen *glavnim tačkama* (engl. *pivotal values*)  $\hat{X}_n(q), \hat{X}_n(q-1), \dots, \hat{X}_n(q-d+1)$ .

Za ARIMA( $p, d, 0$ ) proces sa konstantom imamo moguću funkciju prognoze datu izrazom (6.57) kojoj je dodata konstanta definisana izrazom (6.58). Možuća funkcija prognoze ovog procesa zadovoljava jednačinu  $\phi(B)(1-B)^d \hat{X}_n(h) = 0$ . Prognoza prolazi kroz poslednje  $(p+d)$  raspoložive opservacije vremenske serije, odnosno glavne tačke kod ove funkcije su:  $X_n, X_{n-1}, \dots, X_{n-p-d+1}$ .

Najopštiji proces je opisan kao ARIMA( $p, d, q$ ) proces sa konstantnom. Njegova moguća funkcija prognoze data je istim izrazom kao i kod prethodnog procesa, uz napomenu da ova funkcija važi za  $h > q - p - d$ , ako je  $q > p + d$ , i za  $h > 0$  ako je  $q < p + d$ . Položaj funkcije prognoze na grafiku vremenske serije jednoznačno je određen glavnim tačkama  $\hat{X}_n(q), \hat{X}_n(q-1), \dots, \hat{X}_n(q-p-d+1)$ .

**Primer 6.5** Neka je proces opisan ARIMA(1,1,1) modelom:

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B)X_t = (1 - \theta_1 B)\varepsilon_t.$$

Odrediti moguću funkciju prognoze ovog procesa.

Kako je  $q < p + d$ , to moguća funkcija prognoze za svako  $h > 0$  predstavlja rešenje jednačine:

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B)\hat{X}_n(h) = 0,$$

i data je izrazom:

$$\hat{X}_n(h) = \beta_1^{(n)} + \beta_2^{(n)}\phi_1^h, \text{ za } h > (q - p - d) = -1.$$

Funkcija prognoze prolazi kroz prvu prognozu  $\hat{X}_n(1)$  i poslednju raspoloživu opservaciju  $X_n$ . ■

O mogućoj funkciji prognoze može se pročitati kod Box i Jenkinsa (1976, ss. 139-158). Detaljnije obrazloženi postupci određivanja ove funkcije sa karakterističnim primerima ARIMA procesa dati su kod Millsa (1990, ss. 109-115). Kod ovog poslednjeg dati su i izrazi za reviziju koeficijenata  $\beta_j^{(n)}$  s obzirom na različiti početni period  $n$ . Na osnovu tih izraza moguće je iskazati njihovu vrednost preko koeficijenata modela.

### Zadaci

- 6.1 Dati su sledeći elementi kod AR(1) modela:  $\mu = 6.5$ ,  $\phi_1 = -0.6$ ,  $\sigma^2 = 0.81$  i  $X_{70} = 7$ . Odrediti brojnu i intervalnu ocenu prognoze za horizont prognoziranja  $h = 1, 2, 3, 4$ .

(Rešenje:  $\hat{X}_{70}(1) = 6.2$ ,  $X_{71} \in (4.436, 7.964)$ ,  $\hat{X}_{70}(2) = 6.68$ ,  $X_{72} \in (4.623, 8.737)$ ,  $\hat{X}_{70}(3) = 6.392$ ,  $X_{73} \in (4.239, 8.545)$ ,  $\hat{X}_{70}(4) = 6.5648$ ,  $X_{74} \in (4.378, 8.751)$ ).

- 6.2 Dati su sledeći elementi kod MA(1) modela:  $\mu = 9.4$ ,  $\theta_1 = -0.8$ ,  $\sigma^2 = 0.49$  i  $X_{150} = 10$ . Ako je pretposlednja vrednost šoka  $\varepsilon_{149} = 0.1$ , odrediti brojnu i intervalnu ocenu prognoze za horizont prognoziranja  $h = 1, 2, 3, 4$ .

(Rešenje:  $\hat{X}_{150}(1) = 9.816$ ,  $X_{151} \in (8.444, 11.188)$ ,  $\hat{X}_{150}(2) = 9.4$ ,  $X_{152} \in (7.643, 11.157)$ ).

- 6.3 Dati su sledeći elementi kod ARMA(1,1) modela:  $\mu = 14$ ,  $\phi_1 = 0.4$ ,  $\theta_1 = 0.8$ ,  $\sigma^2 = 1$  i  $X_{80} = 15$ . Ako je pretposlednja vrednost šoka  $\varepsilon_{79} = 0.9$ , odrediti brojnu i intervalnu ocenu prognoze za horizont prognoziranja  $h = 1, 2, 3, 4$ .

(Rešenje:  $\hat{X}_{80}(1) = 13.536$ ,  $X_{81} \in (11.576, 15.496)$ ,  $\hat{X}_{80}(2) = 13.8144$ ,  $X_{82} \in (11.703, 15.925)$ ,  $\hat{X}_{80}(3) = 13.925$ ,  $X_{83} \in (11.792, 16.06)$ ,  $\hat{X}_{80}(4) = 13.9703$ ,  $X_{84} \in (11.832, 16.108)$ ).

- 6.4 Poznato je da je dnevna proizvodnja proizvoda A u fabrici opisana AR(1) modelom u obliku:  $X_t = 15 + 0.6X_{t-1} + \varepsilon_t$ , a pri tome je  $X_{21} = 25$ ,  $X_{22} = 29$ ,  $X_{23} = 21$ . Odrediti prognozu za: (a)  $X_{24}$ ,  $X_{25}$  i  $X_{26}$  u periodu  $t = 23$  i (b)  $X_{25}$  i  $X_{26}$  u periodu  $t = 22$ .

- 6.5 Za seriju znamo da joj je sredina jednaka nuli, a da joj odgovara AR(1) model. Ako je poznato da je  $\rho_2 = 0.64$  i da je  $X_{100} = 15$ , prognozirati buduće opservacije  $X_{101}$  i  $X_{102}$ . Zašto će poznavanje autokorelacionog koeficijenta  $\rho_3$  biti od pomoći u prognoziranju  $X_{101}$ , a ne i  $X_{102}$ ?



- 6.6 Poznato je da je promena dnevne prodaja proizvoda B u prodavnici opisana MA(2) modelom u obliku:  $X_t = \varepsilon_t + 0.7\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2}$  a pri tome je  $X_{30} = 150$ ,  $X_{31} = -90$ ,  $X_{32} = 60$  i  $X_{33} = -20$ . (a) Izračunati prognozu za  $X_{30}$  i  $X_{31}$  u periodu  $t = 29$ , ako se pretpostavi da je  $\varepsilon_{27} = -40$ ,  $\varepsilon_{28} = 0$  i  $\varepsilon_{29} = 40$ . (b) Korišćenjem istih vrednosti za šokove, izračunati prognozu za  $X_{34}$ ,  $X_{35}$ ,  $X_{36}$  i  $X_{37}$  u periodu  $t = 33$ .
- 6.7 Pretpostavimo da su date opservacije vremenske serije  $X_t$ :

$t$	1	2	3	4	5
$X_t$	-5	-3	3	1	9

Takođe se pretpostavlja da su opservacije generisane ili AR(1) ili MA(1) modelom sa vrednošću koeficijenata  $\phi_1 = 0.6$  i  $\theta_1 = 0.6$  respektivno. Korišćenjem oba modela izračunati prognozu za  $X_6$  i  $X_7$  (neka je kod MA(1) modela  $\varepsilon_0 = 0$ ). Objasniti kako bismo se opredelili koji je od ova dva modela bolji za prognoziranje, ako bismo raspolagali dužom vremenskom serijom.

- 6.8 Neka je godišnja prodaja jednog preduzeća (u milionima dinara) modelirana AR(2) modelom. Ovoj seriji odgovara sledeći AR(2) model:  $X_t = 100 + 1.5X_{t-1} - 0.8X_{t-2} + \varepsilon_t$ , pri čemu je  $\sigma^2 = 1$ . Ako se zna da je prodaja u prethodne dve godine (1992. i 1993. godine) iznosila: 148 i 153 miliona dinara, prognozirati prodaju u naredne dve godine. Odrediti 95% interval poverenja prognoza. Ako se zna da je obim prodaje u 1994. godini iznosio 138 miliona dinara izvršiti reviziju prognoze za 1995. godinu.

(Rešenje:  $\psi_1 = 1.5$ ,  $\psi_2 = 1.45$ ,  $\hat{X}_{1993}(1) = 141.1$ ,  $\hat{X}_{1993}(2) = 119.25$ ,  $X_{1994} \in (139.14, 143.06)$ ,  $X_{1995} \in (115.72, 122.78)$ ,  $\hat{X}_{1994}(1) = 116.1$ ).

- 6.9 Neka je dat nestacionarni AR(2) model:  $X_t = 4 + 0.4X_{t-1} + 0.8X_{t-2} + \varepsilon_t$ , kod koga je  $\sigma^2 = 1$ . Poslednje dve opservacije serije su:  $X_{109} = 4.7$  i  $X_{110} = 4.8$ . Izračunati prognozu deset perioda unapred i odrediti 95% interval poverenja prognoza.

(Rešenje: U Tabeli 6.1 date su tražene prognoze. Napominjemo da se zbog nestacionarnosti modela do  $\psi$ -pondera dolazi preko  $\pi$ -pondera korišćenjem rekurzivne formule (6.19)).

Tabela 6.1 Prognoze nestacionarnog AR(2) modela

Horizont prognoze	Prognoza	$\psi$ - ponderi	Granice 95% intervala poverenja	
			Donja	Gornja
1	4.880	-0.400	2.920	6.840
2	4.992	-0.640	2.881	7.103
3	5.101	0.576	2.645	7.556
4	5.234	0.282	2.531	7.937
5	5.374	-0.573	2.616	8.133
6	5.537	0.004	2.558	8.515
7	5.714	0.457	2.735	8.693
8	5.915	-0.186	2.805	9.026
9	6.137	-0.291	3.006	9.269
10	6.387	0.265	3.204	9.570

- 6.10 Za ARIMA(1,1,1) model:  $(1 - \phi_1 B)(1 - B)X_t = (1 - \theta_1 B)\varepsilon_t$ , odrediti prognozu za  $X_{n+h}$ , a zatim odrediti varijansu greške prognoze  $h$  perioda unapred za  $h = 1, 2, 3$ .
- 6.11 Za model:  $(1 - 0.68B)(1 - B)^2 X_t = (1 - 0.75B + 0.34B^2)\varepsilon_t$ , izračunati i grafički prikazati koeficijente korelacije između grešaka prognoze: (a)  $\hat{X}_n(5)$  i  $\hat{X}_{n-j}(5)$ , za  $j = 1, 2, \dots, 10$ ; (b)  $\hat{X}_n(3)$  i  $\hat{X}_n(h)$ , za  $h = 1, 2, \dots, 10$ .
- 6.12 Za sledeće procese odrediti moguću funkciju prognoze: (a) ARIMA(0,1,1), (b) ARIMA(0,2,2), (c) ARIMA(1,2,2).



# 7 IZGRADNJA A R I M A MODELA

U prethodne tri glave bavili smo se teorijskom osnovom ARIMA procesa. Pokazano je da se odgovarajućim ARIMA modelima može modelirati široka klasa stacionarnih i nestacionarnih stohastičkih procesa. U ovoj glavi bavimo se primenom izloženih teorijskih rezultata u modeliranju konkretnih vremenskih serija. Opštu strategiju modeliranja ARIMA procesa koncipirali su Box i Jenkins, pa se prema njima ona naziva i *Box-Jenkinsova metodologija*. Zato glavni akcenat u izlaganju postupka modeliranja stavljamo na ovaj pristup i na njegove modifikacije.

Pre nego što pristupimo detaljnom izlaganju svake etape u gradnji modela konkretne vremenske serije u uvodu se bavimo osnovnim principima koje treba da zadovolji dobar model. Nakon toga ukazujemo na tri osnovne etape Box-Jenkinsove metodologije, a to su: identifikacija modela, njegovo ocenjivanje i provera njegove adekvatnosti. Svaka od ovih etapa sadrži brojne postupke i metode kojima se detaljno bavimo u posebnim odeljcima. Izloženi formalni postupci statističkog zaključivanja omogućavaju nam da zadovoljimo principe koji karakterišu dobar model. Na primeru nesezonskih ekonomskih vremenskih serija ilustrujemo izložene metode identifikacije, ocene i provere adekvatnosti modela.

## 7.1 UVOD

Pre nego što izložimo statističke postupke izbora modela, ukazaćemo na neke principe koji karakterišu dobar model. Mada se u literaturi ovi principi navode u vezi sa ekonometrijskim modelima smatramo da se mogu primeniti i u analizi vremenskih serija. Predloženo je nekoliko principa, odnosno kriterijuma koje treba da ispuni dobar model. To su principi: ekonomičnosti, identifikabilnosti, konzistentnosti sa podacima, konzistentnosti sa teorijom, prihvatljivosti podataka, uspešnosti prognoziranja i obuhvatnosti. Bliže razmotrimo svaki od njih.

1. **Ekonomičnost** (engl. *parsimony*). Na ovaj princip se u analizi vremenskih serija najčešće pozivamo. Namera nam je da sa što jednostavnijim modelom opišemo posmatranu pojavu. Model dakle treba da istakne suštinsku karakteristiku izučavane pojave. U operacionalizaciji ovog principa kažemo da je ekonomičan onaj model koji sadrži relativno mali broj koeficijenata. Ukoliko su kod dva modela ostale osobine jednake, jednostavniji model je poželjniji od složenijeg. U literaturi su predložena dva puta kojima možemo doći do ekonomičnog modela. Prema prvom pristupu polazi se od jednostavnog modela ka složenijem. Prvobitni model se zatim proširuje da bi se na osnovu statističkih testova utvrdilo da li je opravdano umesto jednostavnijeg koristiti taj složeniji model. Ovaj pristup se često koristi u analizi vremenskih serija. Hendry (Hendri) (1983) zagovara suprotan pristup formiranju adekvatnog ekonometrijskog modela. On preporučuje da se krene od opšteg ka posebnom modelu. Prema ovom pristupu polazi se od opšteg modela, a zatim se na bazi statističkih testova vrši njegovo pojednostavljanje. Pri tome se vodi računa da u tom redukovanju modela (smanjivanju broja koeficijenata) pojednostavljeni model zadovoljava ostale kriterijume dobrog modela.
2. **Identifikabilnost** (engl. *identifiability*). Predstavlja princip bez koga nije moguće ocenjeni model na zadovoljavajući način interpretirati. Naime, kada model nije identifikovan postoje barem dva skupa vrednosti koeficijenata koji su u saglasnosti sa podacima. Napominjemo da identifikacija kod ekonometrijskog modela ima potpuno drugačije značenje od pojma identifikacije u Box-Jenkinsovom pristupu modeliranju vremenskih serija. Mada se ovim principom u većoj meri bavimo kod ekonometrijskih modela njegovo prisustvo je bitno i kod višedimenzionih i strukturnih modela vremenskih serija.
3. **Konzistentnost sa podacima**. Provera konzistentnosti modela sa podacima sprovodi se korišćenjem različitih testova provere adekvatnosti modela. Od modela se očekuje da obezbedi dobro prilagodavanje podacima, a reziduali pored toga što treba da budu relativno mali, treba da imaju karakteristike potpuno slučajnog procesa. Dugačka je lista testova i grafičkih prikaza koji se mogu koristiti u ispitivanju da li reziduali odstupaju od pretpostavljene slučajnosti.
4. **Konzistentnost sa teorijom**. Prema ovom zahtevu model mora biti konzistentan sa apriornim saznanjem bez obzira na to da li je izvor tog saznanja u ekonomskoj teoriji ili zdravom razumu. Na primer, ekonomska teorija može sugerisati veličinu ili predznak koeficijenta, a ocenjeni model treba da bude saglasan sa tom informacijom.
5. **Prihvatljivost podataka** (engl. *data admissibility*). Model ne sme da predviđa vrednosti koje ne zadovoljavaju neka definiciona ograničenja. Tako na primer, ako posmatramo vremensku seriju koja opisuje kretanje učešća društvenog

proizvoda industrije u ukupnom društvenom proizvodu privrede, tada opservacije te vremenske serije ne mogu uzeti negativne vrednosti ili vrednosti veće od 100.

6. **Uspešnost prognoziranja.** Ovaj kriterijum je veoma bitan u izboru modela u analizi vremenskih serija s obzirom da je prognoziranje jedan od važnijih ciljeva analize vremenskih serija. On ukazuje na preciznost prognoza dobijenih na osnovu modela vremenskih serija. Ističemo da je ovaj princip u bliskoj vezi sa pojmom strukturne stabilnosti, odnosno konstantnosti koeficijenata modela. Za model kažemo da je strukturno stabilan ukoliko njegovo ponovno ocenjivanje na osnovu opservacija van uzorka koji je korišćen za prvobitno ocenjivanje modela ne dovodi do statistički značajne promene ocenjenih koeficijenata. Kod modela vremenskih serija kriterijum uspešnosti prognoziranja proveravamo tako što koristimo opservacije van uzorka za ocenjivanje u cilju provere stepena preciznosti prognoza modela. Ukoliko jedan od modela ima manju srednje kvadratnu grešku prognoze, a sve ostale karakteristike modela su jednake, tada za taj model kažemo da je uspešniji sa stanovišta prognoziranja, te je prihvatljiviji za korišćenje od konkurentskih modela.
7. **Obuhvatnost** (engl. *encompassing*). Za model se kaže da obuhvata konkurentski model ako može da objasni rezultate dobijene tim drugim modelom. U tom slučaju konkurentski model ne sadrži informacije koje bi se mogle koristiti u cilju poboljšanja izabranog modela. Da bi model imao ovu osobinu ne mora biti opštiji od konkurenta. Model treba ne samo da objasni, odnosno opiše podatke, nego treba da objasni uspeh ili promašaj konkurentskog modela u objašnjenju istih podataka. Tako na primer, ARMA(1, 1) model predstavlja model koji u opštem slučaju obuhvata AR(1) model. Međutim, ukoliko se ograničenje na koeficijent  $\theta_1$  ( $\theta_1 = 0$ ) ne može odbaciti, tada se opredeljujemo za model sa ograničenjem, tj AR(1) model, jer se pri modeliranju istovremeno držimo i principa ekonomičnosti.

U okviru ove glave izlažu se osnovni koraci u modeliranju ARIMA modela. Box i Jenkins su prvobitno predložili trostepeni pristup koji je u ključnim fazama sadržavao veliki stepen subjektivnosti. Da bi se prevazišla arbitrarnost originalnog Box-Jenkinsovog pristupa definisani su brojni drugi kriterijumi koji u svakoj fazi omogućavaju donošenje odluke u kom pravcu se kretati pri izboru, oceni i proveru modela.

Tako se za identifikaciju ARIMA modela pored uzoračkih, običnih i parcijalnih korelograma koriste: formalni statistički testovi jediničnih korena (za testiranje reda diferenciranja), inverzna autokorelaciona funkcija, a takođe i brojni kriterijumi izbora reda procesa. Svim ovim postupcima za identifikaciju ARIMA modela bavimo se u Poglavlju 7.3. Metode ocenjivanja ARIMA modela izlažemo u Poglavlju 7.4, pri čemu najveći naglasak dajemo metodi najveće verodostojnosti s obzirom da se ona među

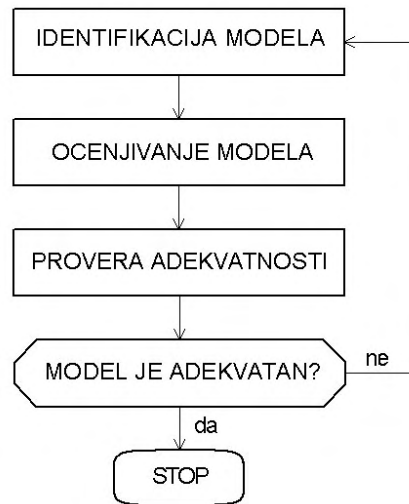
ostalim metodama ocenjivanja (metod momenata i metod nelinearnih najmanjih kvadrata) u statističkom smislu najbolje pokazala. Na kraju ove glave, u Poglavlju 7.5 ukazujemo na to kako se vrši provera adekvatnosti ocenjenih modela. Daje se prikaz statističkih postupaka i testova kojima proveravamo da serija reziduala ocenjenog modela ispunjava pretpostavke modela. Tako preporučujemo korišćenje histograma standardizovanih reziduala i dodavanja novih koeficijenata u cilju provere adekvatnosti modela. Takođe je prikazan, u analizi vremenskih serija popularan Box-Pierceov test, odnosno tzv. *portmanteau* test.

## 7.2 OPŠTA STRATEGIJA MODELIRANJA

U osnovi Box-Jenkinsove metodologije leži troetapni iterativni postupak gradnje modela vremenskih serija. Te tri etape su: identifikacija, ocenjivanje i provera adekvatnosti. Sadržaj svake od etapa je sledeći:

1. **Identifikacija.** Pod etapom identifikacije podrazumeva se postupak korišćenja podataka vremenske serije u cilju izdvajanja uže klase ekonomičnih ARIMA modela koje istraživač uzima u razmatranje kao potencijalne generatore datog skupa podataka. Prema prvobitnom Box-Jenkinsovom pristupu na osnovu grafika vremenske serije, običnih i parcijalnih korelograma utvrdi se da li je potrebno seriju prethodno transformisati (korišćenjem Box-Coxove transformacije ili diferenciranja), da bi se zatim izabrala odgovarajuća klasa AR, MA ili ARMA modela. Iz izabrane klase bira se odgovarajući model sa kojim ulazimo u narednu etapu.
2. **Ocenjivanje.** U etapi ocenjivanja modela potrebno je efikasno iskoristiti raspoložive podatke u cilju zaključivanja o njegovim koeficijentima. Pri tome je zaključivanje uslovljeno adekvatnošću izabranog modela. Metodi ocenjivanja ARIMA modela koji su zasnovani na numeričkim postupcima maksimiziranja funkcije kriterijuma zahtevaju poznavanje početnih ocena koeficijenata. Korišćenjem ovih početnih ocena započinje iterativan proces dolaženja do konačnih ocena po metodi nelinearnih najmanjih kvadrata ili najveće verodostojnosti. Nakon ocene izabranog modela prelazimo na narednu etapu.
3. **Provera adekvatnosti.** Pod proverom adekvatnosti modela podrazumeva se suočavanje prilagođenog modela podacima u cilju otkrivanja njegovih eventualne nedostataka. Osnovni koraci u okviru etape provere adekvatnosti modela podrazumevaju proveru statističke značajnosti ocenjenih koeficijenata i ispunjenosti pretpostavke da reziduali ocenjenog modela predstavljaju proces belog šuma. Ukoliko se pokaže da je model manjkav, moguće je njegovo poboljšavanje, pa se nastavlja postupak gradnje ARIMA modela za datu vremensku seriju. U suprotnom, adekvatan model se može koristiti u svrhe prognozirivanja.

U osnovi Box-Jenkinsove metodologije leži iterativni postupak sa etapama: identifikacije, ocenjivanja i provere adekvatnosti, koji se može grafički prikazati korišćenjem dijagrama toka kao što smo to uradili na Slici 7.1.



**Slika 7.1** Dijagram toka Box-Jenkinsovog iterativnog postupka

Kao što se sa Slike 7.1 može videti utvrđena neadekvatnost modela vodi ka njegovoj ponovnoj specifikaciji. Sledi zatim ponovno ocenjivanje novog modela i provera njegove adekvatnosti, tako da se gradnja modela može smatrati iterativnim procesom koji se završava kada se nađe zadovoljavajući model u skladu sa opštim principima modeliranja, odnosno specifičnim statističkim kriterijumima adekvatnosti modela. Finalni se model može zatim koristiti u analitičke svrhe ili u cilju formiranja prognoze budućih vrednosti vremenske serije.

### 7.3 IDENTIFIKACIJA MODELA

Ključna etapa Box-Jenkinsove metodologije jeste etapa identifikacije modela. Ona zahteva dobro poznavanje osobina stohastičkih procesa koje smo definisali u 4. i 5. Glavi. Posebno se to odnosi na karakteristike tih procesa iskazane preko autokorelacione i parcijalne autokorelacione funkcije. Kako su nam za konkretnu vremensku seriju ove funkcije nepoznate, to ih ocenjujemo na osnovu raspoloživih opservacija. Prema prvobitnom pristupu identifikaciji modela poredi se oblik uzoračke autokorelacione i parcijalne autokorelacione funkcije sa poznatim oblikom ovih funkcija kod teorijskih ARIMA procesa.

U procesu identifikacije modela polazimo od  $ARIMA(p, d, q)$  modela:

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(1 - B)^d X_t = \theta_0 + (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t. \quad (7.1)$$

Pod pojmom identifikacije modela podrazumevamo: utvrđivanje potrebne transformacije u cilju stabilizovanja varijanse i određivanja reda diferenciranja, odluku o



uključivanju determinističkog člana, odnosno konstante  $\theta_0$  u model kada je  $d > 1$  i konačno izbor odgovarajućeg reda ARIMA modela, odnosno veličina  $p$  i  $q$ . Proces identifikacije ARIMA modela iskazujemo kroz sledeće faze:

1. Na osnovu grafičkog prikaza vremenske serije vrši se izbor odgovarajuće transformacije. Pažljivim ispitivanjem grafika možemo dobiti ideju o tome da li serija sadrži trend, sezonu, nestandardne opservacije, promenljivu varijansu i da li ima neku neuobičajenu karakteristiku. U analizi vremenskih serija najčešće korišćene transformacije su logaritamska transformacija u cilju stabilizovanja varijanse i diferenciranje u cilju postizanja stacionarnosti. Kako opservacije diferencirane serije mogu biti sa negativnim predznakom uvek ćemo prvo primeniti transformaciju za stabilizovanje varijanse, a zatim diferencirati tako dobijenu seriju.
2. Osim grafičkog prikaza vremenske serije koristimo obične i parcijalne uzoračke autokorelacione funkcije radi utvrđivanja potrebnog reda diferenciranja. Ako uzoračka autokorelaciona funkcija veoma lagano odumire, a parcijalna autokorelaciona funkcija je presečena posle prve docnje, to nam sugeriše da je potrebno izvršiti diferenciranje serije. Pored ovog "vizuelnog" načina utvrđivanja potrebe za diferenciranjem može se primeniti formalan statistički postupak zasnovan na korišćenju testova jediničnog korena.
3. Nakon dobijanja odgovarajuće transformisane i diferencirane serije izračunavamo njene obične i parcijalne uzoračke autokorelacione funkcije radi identifikacije reda  $p$  i  $q$ . Kod nesezonskih vremenskih serija obično je vrednost  $p$  i  $q$  manja ili jednaka 3. U početnoj fazi identifikacije modela koncentrišemo se samo na opšte osobine uzoračkih autokorelacionih funkcija ne ulazeći u detalje, zato što se dalje poboljšanje modela može postići u kasnijim iteracijama. Alternativni načini određivanja reda procesa, korišćenjem kriterijuma za izbor reda procesa, uvedeni su u cilju eliminacije arbitrarnosti svojstvene originalnom Box- Jenkinsovom postupku identifikacije modela.
4. Tokom diskusije nestacionarnih procesa sugerisano je da se izostavlja konstanta kod diferencirane serije. Međutim, ukoliko se pretpostavi da diferencirana serija sadrži deterministički trend u sredini, tu pretpostavku možemo testirati tako što ćemo porediti uzoračku sredinu  $\bar{W}$  diferencirane serije  $W_t = (1-B)^d X_t$ , sa aproksimativnom standardnom greškom  $S_{\bar{W}}$ , formirajući poznati "t-odnos". Drugim rečima proveravamo opravdanost uključivanja determinističkog trenda kada je  $d > 0$  u izrazu (7.1). Kod određivanja standardne greške sredine diferencirane serije koristimo dve aproksimacije. Prema prvoj je

$$S_{\bar{W}} = \left[ \frac{\hat{\gamma}_0}{n} (1 + 2\hat{\rho}_1 + 2\hat{\rho}_2 + \dots + 2\hat{\rho}_k) \right]^{1/2}. \quad (7.2)$$

gde je  $\hat{\gamma}_0$  uzoračka varijansa, a  $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_k$  prvih  $k$  značajnih autokorelacionih koeficijenata diferencirane serije. Kod druge aproksimacije izraz (7.2) svodi se na  $S_{\bar{w}} = \sqrt{\hat{\gamma}_0/n}$ , kada je tačna hipoteza da je  $\rho_k = 0$ , za  $k \geq 1$ . Za razliku od ovog pristupa konstantu možemo uključiti u početnoj fazi, ako rezultati prethodnog ocenjivanja sugerišu da nije značajna, a zatim je odbaciti pre finalne ocene modela.

**Primer 7.1** Odrediti odgovarajuću transformaciju Box-Coxovog tipa, odnosno vrednost  $\lambda$  za sledeće godišnje vremenske serije SR Jugoslavije: nezaposlenost (serija S4), realni društveni proizvod (serija S5), vrednost osnovnih sredstava privrede društvenog sektora (serija S7) i ukupan broj završenih stanova (serija S8).

Korišćenjem programa *Statgraphics 4.0*<sup>1</sup>, opcije koja omogućava Box-Coxovu transformaciju, dobijene su transformisane vremenske serije za karakteristične vrednosti koeficijenta  $\lambda$  (videti Tabelu 2.2). Standardne devijacije transformisanih vremenskih serija prikazane su u Tabeli 7.1.

Prema izloženim rezultatima, a koristeći kriterijum minimalne vrednosti standardne devijacije (u Tabeli 7.1 minimalne vrednosti su šrafirane), možemo zaključiti da je za prve tri serije izabrana vrednost koeficijenta  $\lambda = 0.5$ , odnosno da treba koristiti kvadratne korene opservacija tih vremenskih serija. Što se serije završenih stanova tiče, minimalna vrednost standardne devijacije se postiže za vrednost  $\lambda = 1$ , tj. dalju analizu ove serije zasnivamo na originalnim, netransformisanim opservacijama.

**Tabela 7.1** Box-Coxova transformacija četiri vremenske serije (standardna devijacija)

$\lambda$	Nezaposlenost	Društveni proizvod	Osnovna sredstva	Završeni stanovi
-1.0	259,545	699.9	1,892.3	37,396.4
-0.5	222,329	573.5	1,456.9	26,971.4
0.0	202,337	505.5	1,261.7	20,852.1
0.5	<b>196,275</b>	<b>478.6</b>	<b>1,234.4</b>	17,247.6
1.0	202,916	482.9	1,346.2	<b>15,156.8</b>

<sup>1</sup> U ovom i narednim primerima uglavnom je korišćen statistički program *RATS 3.0*, a nekada i programi *Statgraphics 4.0* i *Micro TSP 6.0*. Za ova tri programska paketa opredelili smo se zbog njihove relativne dostupnosti i lakoće korišćenja u odnosu na ostale statističke pakete. Upozoravamo čitaoca koji bi želeo da proveri dobijene rezultate da je na žalost, analiza iste vremenske serije na bazi korišćenja ova tri programa pokazala izvesna odstupanja u rezultatima. Zato smo u svakom primeru naveli koji od programskih paketa je korišćen pri izračunavanju.

Prema tome, dalju analizu prvobitnih serija zasnivamo na vremenskim serijama koje su podvrgnute spomenutim transformacijama. ■

Razmotrimo detaljno svaku fazu u etapi identifikacije ARIMA modela. Pri tome ćemo podrazumevati da je preliminarna transformacija tipa Box-Coxa obavljena, te ćemo dobijenu seriju nazivati originalnom vremenskom serijom.

### 7.3.1 Određivanje reda diferenciranja

Prvi naredni korak u etapi identifikacije modela, nakon Box-Coxove transformacije vremenske serije jeste određivanje reda diferenciranja. Kod nekih vremenskih serija već se i na osnovu njenog grafičkog prikaza može utvrditi da li je potrebno primeniti diferenciranje. Mada, podsećamo, na osnovu grafičkog prikaza nismo uvek u mogućnosti razlikovati tip nestacionarnosti (trend ili diferencna stacionarnost). Zato određivanje stvarne vrednosti  $d$  nije uvek lako obaviti samo na osnovu grafika vremenske serije. Stoga se zahteva ispitivanje uzoračke autokorelacione funkcije za različite diference vremenske serije.

Lagano i skoro linearno opadanje uzoračke autokorelacione funkcije predstavlja pokazatelj nestacionarnosti i potrebe za diferenciranjem. Naglašavamo da lagano opadanje uzoračke autokorelacione funkcije može početi od vrednosti  $\rho_1$  znatno manje od 1, ponekad od 0.5 ili čak i manje. U graničnim slučajevima kada na osnovu autokorelacione funkcije nismo sigurni da li je potrebno primeniti postupak diferenciranja, on se preporučuje. Ipak pri tome treba biti oprezan, jer se u slučaju isključivog oslanjanja na uzoračku autokorelacionu funkciju može ponekad pojaviti problem tzv. *prekomernog diferenciranja* (engl. *overdifferencing*). Mada će dalje diferenciranje stacionarne serije imati za rezultat stacionarnu seriju, prekomerno diferenciranje može voditi ka ozbiljnim poteškoćama. Da bismo ilustrovali posledice prekomernog diferenciranja posmatrajmo stacionarni MA(1) proces:  $X_t = (1 - \theta B)\varepsilon_t$ . Ako neopravdano diferenciramo ovaj proces dobićemo:

$$(1 - B)X_t = (1 - B)(1 - \theta B)\varepsilon_t = (1 - (1 + \theta)B + \theta B^2)\varepsilon_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)\varepsilon_t \quad (7.3)$$

Nakon diferenciranja dobili smo složeniji model koji sadrži dva koeficijenta umesto jednog. Dodatna otežavajuća okolnost je da je jedan od korena polinoma  $(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)$  jednak je jedinici, jer je  $\theta_1 + \theta_2 = 1$ . Model je stoga neinvertibilan, pa AR reprezentacija ne postoji, a kasnije se prilikom ocenjivanja takvog modela javljaju problemi.

Očigledno je da je varijansa prekomerno diferenciranog modela (7.3) ustvari varijansa MA(2) modela i jednaka je  $2\sigma^2(1 + \theta + \theta^2)$ , dok je varijansa prvobitnog MA(1) modela jednaka  $\sigma^2(1 + \theta^2)$ . Kako je razlika ove dve varijanse:  $\sigma^2(1 + \theta)^2 > 0$ , znači da je varijansa prekomerno diferenciranog procesa uvek veća od varijanse originalnog procesa.

Posmatranje promene vrednosti uzoračke varijanse za različite vrednosti  $d$  može biti korisno pri odlučivanju o odgovarajućem redu diferenciranja: uzoračka varijansa će opadati sve dok se ne dobije stacionaran niz, ali će zatim početi da raste ako nastavimo sa prekomernim diferenciranjem. Međutim, i ovaj pristup, poznat pod nazivom *kriterijum minimalne uzoračke varijanse diferencirane serije*, ima svojih slabih strana koje ne dozvoljavaju da donosimo pouzdane zaključke o redu diferenciranja na osnovu varijanse diferencirane serije.

**Primer 7.2** Odrediti red diferenciranja za godišnju vremensku seriju broja nezaposlenih u SR Jugoslaviji (serija S4)<sup>2</sup>. Koristiti uzoračku autokorelaciju i parcijalnu autokorelaciju funkciju kao i kriterijum minimalne uzoračke varijanse diferencirane serije.

Korišćenjem programa RATS 3.0 ocenili smo uzoračke autokorelacije i parcijalne autokorelacije koeficijente. Kako je serija relativno kratka (svega 29 opservacija), to smo ocenili i u Tabeli 7.2 prikazali samo prvih deset koeficijenata za originalnu seriju, a takode za njenu prvu i drugu diferencu.

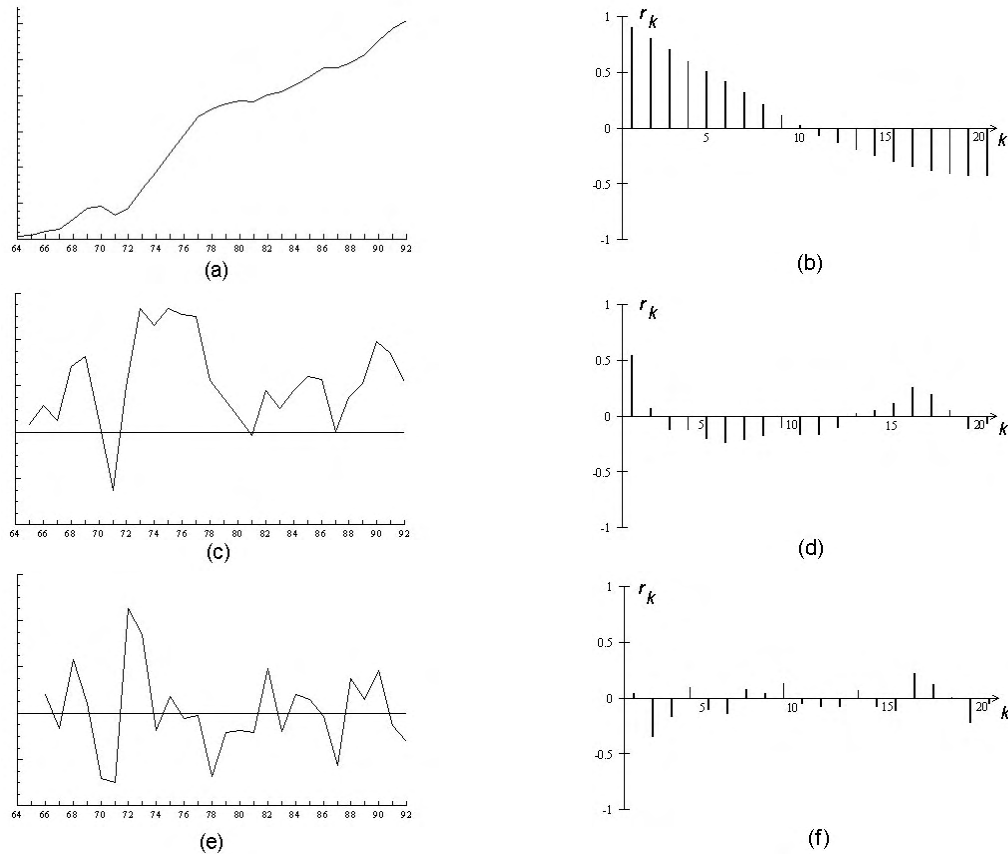
**Tabela 7.2** Uzorački autokorelacioni i parcijalni autokorelacioni koeficijenti za seriju nezaposlenosti (serija S4)

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Varijansa
	<b>Originalna serija</b>										37.195 x 10 <sup>9</sup>
$\hat{\rho}_k$	0.95	0.89	0.82	0.75	0.67	0.60	0.51	0.44	0.37	0.29	
$\hat{\phi}_{kk}$	0.91	-0.10	-0.05	-0.04	-0.04	-0.04	-0.11	-0.12	-0.06	-0.03	
	<b>Prva diferencija</b>										0.343 x 10 <sup>9</sup>
$\hat{\rho}_k$	0.55	0.07	-0.12	-0.12	-0.20	-0.24	-0.21	-0.17	-0.11	-0.16	
$\hat{\phi}_{kk}$	0.55	-0.33	0.01	-0.03	-0.22	-0.05	-0.11	-0.12	-0.02	-0.29	
	<b>Druga diferencija</b>										0.310 x 10 <sup>9</sup>
$\hat{\rho}_k$	0.04	-0.35	-0.17	0.10	-0.11	-0.14	0.08	0.04	0.13	-0.04	
$\hat{\phi}_{kk}$	0.04	-0.35	-0.15	-0.02	-0.25	-0.17	-0.04	-0.17	0.12	-0.11	

Kako je broj opservacija originalne vremenske serije nezaposlenosti jednak 29, to je standardna greška ocene autokorelacionih i parcijalnih autokorelacionih koeficijenata jednaka  $1/\sqrt{29} = 0.19$ . Izračunavanjem

<sup>2</sup> Napominjemo da se Box-Jenkinsova metodologija preporučuje za serije koje imaju najmanje 40-50 opservacija. Mada je serija nezaposlenosti kraća od ove donje granice želimo u realnoj situaciji pokazati sa kakvim se problemima istraživač suočava pri izgradnji ARIMA modela. Naime, u ekonomiji je pre pravilo nego izuzetak da su godišnje serije upravo slične dužine kao i serija nezaposlenosti.

95% intervala poverenja autokorelacionih i parcijalnih autokorelacionih koeficijenata dobićemo da je on jednak:  $(-0.36, 0.36)$  kod originalne vremenske serije,  $\pm 0.37$  kod serije prvih diferenci i naposljetku kod serije drugih diferenci 95% interval poverenja je  $\pm 0.38$ .



**Slika 7.2** Nezaposlenost: (a) originalna serija ((b) korelogram originalne serije), (c) prva diferencija ((d) korelogram prve diference) i (e) druga diferencija ((f) korelogram druge diference)

Na osnovu izračunatih intervala poverenja možemo utvrditi koji su koeficijenti statistički značajno različiti od nule na datom nivou značajnosti. Međutim, s obzirom na kratkoću vremenske serije preporučuje se računanje nešto užih intervala poverenja (recimo  $\pm 1.5/\sqrt{n} = \pm 0.28$ ). Prema tim intervalima poverenja originalna serija pokazuje da su sve do sedme doznje autokorelacioni koeficijenti statistički značajno različiti od nule. Veliki broj statistički značajnih koeficijenata zajedno sa vrednošću prvog parcijalnog autokorelacionog koeficijenta  $\hat{\phi}_{11} = 0.91$  (ostali nisu statistički značajni) upućuje na to da je serija nezaposlenosti nestacionarna.

Pored statističke značajnosti koeficijenata od interesa je posmatrati njihovo ponašanje na različitim doznjama, kao i izgled različitih diferenci vremenske serije. Zato koristimo korelograme vremenskih serija na koje

smo primenili difference nultog, prvog i drugog reda, a takode i njihove grafičke prikaze (Slika 7.2). Grafik originalne vremenske serije potvrđuje naš pređašnji nalaz o njenoj nestacionarnoj prirodi.

Mada prema kriterijumu minimalne uzoračke varijanse diferencirane serije seriju nezaposlenosti treba dvostruko diferencirati, korelogrami prve difference i značajnost koeficijenata sugerišu nam da je prva diferencija sasvim dovoljna da se postigne stacionarnost serije. Istovremeno uočavamo da vrednost autokorelacionih koeficijenata opada po prigušenoj oscilatornoj putanji. Ovakav izgled korelograma serije prvih diferencija kasnije koristimo pri identifikaciji modela vremenske serije nezaposlenosti. ■

**Primer 7.3** Odrediti red diferenciranja za godišnju vremensku seriju realni društveni proizvod SR Jugoslavije (serija S5). Koristiti uzoračku autokorelaciju i parcijalnu autokorelaciju kao i kriterijum minimalne uzoračke varijanse diferencirane serije.

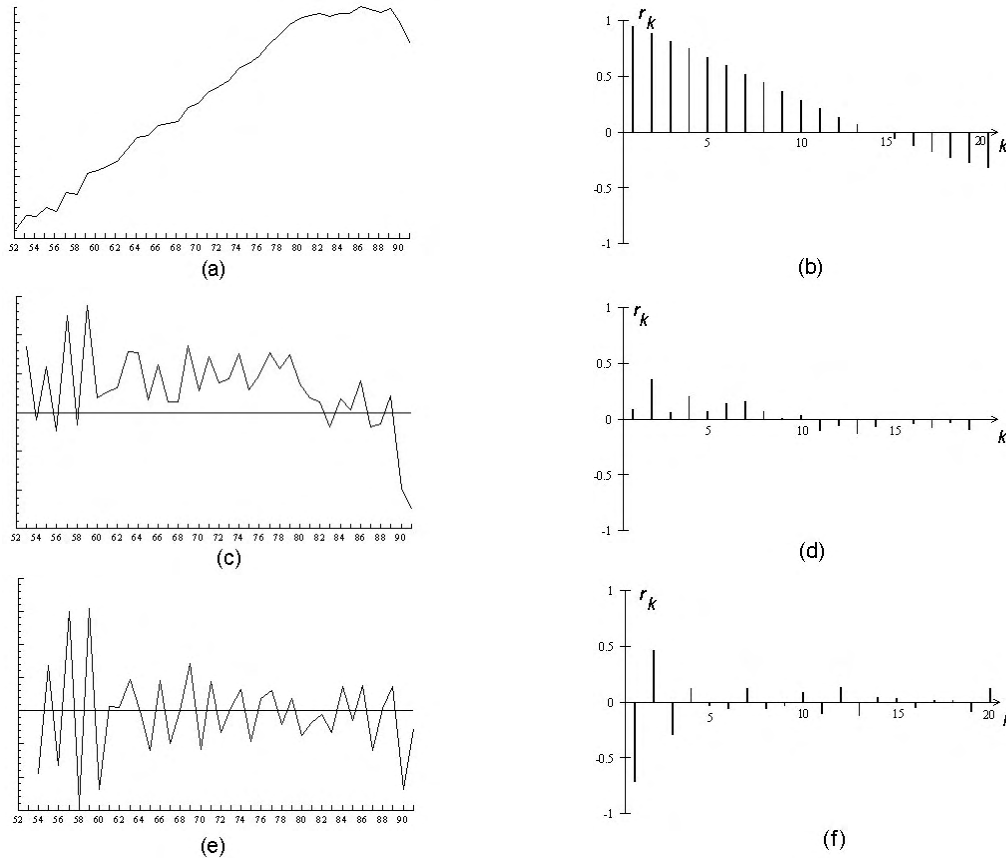
Korišćenjem programa *RATS 3.0* ocenili smo uzoračke autokorelacije i parcijalne autokorelacije koeficijente. Kako je serija relativno kratka (svega 40 opservacija), to smo ocenili i u Tabeli 7.3 prikazali samo prvih deset koeficijenata za originalnu seriju, a takode i za njenu prvu i drugu diferenciju.

**Tabela 7.3** Uzorački autokorelacioni i parcijalni autokorelacioni koeficijenti za seriju društvenog proizvoda (serija S5)

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Varijansa
	<b>O r i g i n a l n a   s e r i j a</b>										2.2332 x 10 <sup>5</sup>
$\hat{\rho}_k$	0.95	0.89	0.82	0.75	0.67	0.60	0.51	0.44	0.37	0.29	
$\hat{\phi}_{kk}$	0.95	-0.05	-0.16	-0.03	-0.12	0.01	-0.09	0.00	-0.06	-0.10	
	<b>P r v a   d i f e r e n c a</b>										2,525.7
$\hat{\rho}_k$	0.08	0.36	0.06	0.21	0.07	0.14	0.16	0.07	0.01	0.03	
$\hat{\phi}_{kk}$	0.08	0.35	0.02	0.09	0.03	0.05	0.14	-0.03	-0.11	-0.00	
	<b>D r u g a   d i f e r e n c a</b>										4,018.5
$\hat{\rho}_k$	-0.71	0.46	-0.29	0.12	-0.03	-0.06	0.13	-0.06	-0.03	0.09	
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.71	-0.09	0.00	-0.12	-0.02	-0.10	0.04	0.16	-0.09	0.02	

Kako je broj opservacija originalne vremenske serije društvenog proizvoda jednak 40, to je 95% interval poverenja autokorelacionih i parcijalnih autokorelacionih koeficijenata jednak:  $(-0.31, 0.31)$ , a s obzirom na kratkoću vremenske serije korišćemo užu interval poverenja:

$\pm 0.24$  (videti preporuku u Primer 7.2). Slično seriji nezaposlenosti i originalna serija društvenog proizvoda je nestacionarna serija. To potvrđuje grafik serije i njen korelogram sa Slike 7.3 kao i parcijalni autokorelacioni koeficijenti iz Tabele 7.3.



**Slika 7.3** Realni društveni proizvod: (a) originalna serija ((b) korelogram originalne serije), (c) prva diferencija ((d) korelogram prve diferencije) i (e) druga diferencija ((f) korelogram druge diferencije)

Razlika u izgledu serije društvenog proizvoda i serije nezaposlenosti ispoljava se tokom osamdesetih godina kada dolazi do usporenog kretanja ove prve, a posebno se izdvajaju njene poslednje dve opservacije. Za te dve opservacije moglo bi se pretpostaviti da su rezultat strukturne promene "mehanizma" (čitaj: privrede) koji ih je generisao ili da su rezultat dejstva nekontrolisanih spoljnih faktora. Zato bi za ovakve vremenske serije bilo primerenije koristiti modele koji se "hvataju u koštac" sa problemima navedene vrste (reč je o modelima sa promenljivim koeficijentima ili modelima intervencije). Međutim, mi smo za potrebe identifikacije ARIMA modela posmatrali sve opservacije vremenske serije društvenog proizvoda kao da su generisane od strane neizmenjenog mehanizma. Ovakav pristup analizi serije društvenog proizvoda može rezultirati u pogrešno određenom redu diferenciranja ili

tipa nestacionarnosti, nego da je strukturna promena ili intervencija uzeta u obzir u postupku modeliranja.

Kriterijum minimalne uzoračke varijanse diferencirane serije i njen korelogram sugerišu korišćenje istog reda diferencirana. Naime, serija prvih diferenci društvenog proizvoda predstavlja stacionarnu seriju prema oba kriterijuma. Korelogram serije prvih diferenci društvenog proizvoda, slično odgovarajućem korelogramu kod serije nezaposlenosti, iskazuje prigušeno oscilatorno kretanje vrednosti autokorelacionih koeficijenata. ■

**Primer 7.4** Odrediti red diferenciranja za godišnju vremensku seriju realna vrednost osnovnih sredstava privrede društvenog sektora SR Jugoslavije (serija S7). Koristiti uzoračku autokorelacionu i parcijalnu autokorelacionu funkciju kao i kriterijum minimalne uzoračke varijanse diferencirane serije.

Korišćenjem programa *RATS 3.0* ocenili smo uzoračke autokorelacione i parcijalne autokorelacione koeficijente. Kako je serija relativno kratka (svega 40 opservacija), to smo ocenili i u Tabeli 7.4 prikazali samo prvih deset koeficijenata za originalnu seriju, a takode i za njenu prvu i drugu diferencu.

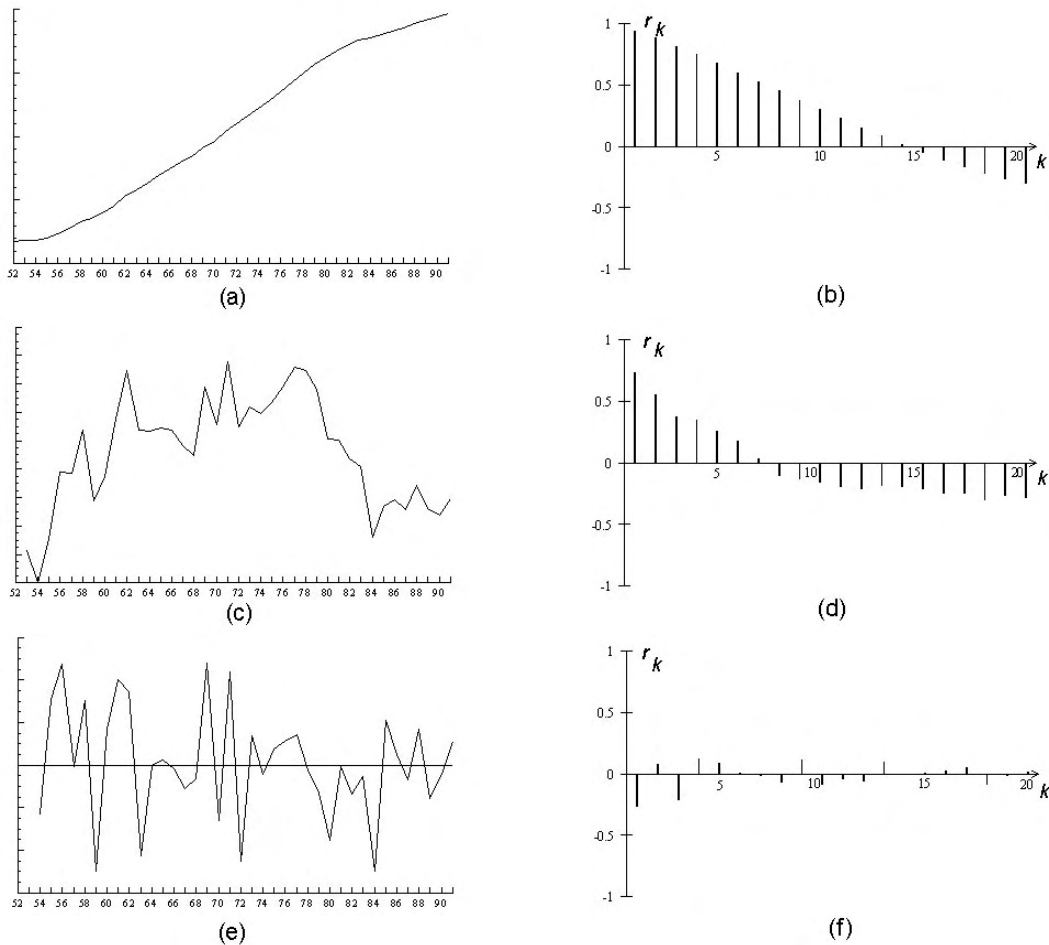
**Tabela 7.4** Uzorački autokorelacioni i parcijalni autokorelacioni koeficijenti za seriju osnovnih sredstava (serija S7)

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Varijansa
	<b>O r i g i n a l n a   s e r i j a</b>										1.4857 x 10 <sup>6</sup>
$\hat{\rho}_k$	0.94	0.88	0.82	0.75	0.68	0.60	0.53	0.45	0.38	0.30	
$\hat{\phi}_{kk}$	0.94	-0.06	-0.07	-0.07	-0.05	-0.06	-0.05	-0.07	-0.07	-0.05	
	<b>P r v a   d i f e r e n c a</b>										1,491.3
$\hat{\rho}_k$	0.73	0.55	0.37	0.35	0.26	0.18	0.03	-0.10	-0.13	-0.16	
$\hat{\phi}_{kk}$	0.73	0.02	-0.09	0.22	-0.10	-0.07	-0.14	-0.16	0.11	-0.09	
	<b>D r u g a   d i f e r e n c a</b>										658.05
$\hat{\rho}_k$	-0.27	0.08	-0.21	0.12	0.09	0.01	-0.02	-0.07	0.11	-0.08	
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.27	0.01	-0.20	0.02	0.14	0.03	0.02	-0.03	0.08	-0.06	

Kod serije osnovnih sredstava imamo isti broj opservacija kao i u slučaju serije društvenog proizvoda, pa su intervali poverenja autokorelacionih koeficijenata identični. Serija prvih diferenci (Slika 7.4(c)) ne pokazuje prisustvo izrazitog trenda, nego je karakterišu fluktuacije oko promenljivog nivoa, što je inače odlika nestacionarne serije (sličan tok ima proces slučajnog hoda bez konstante). Ovakvo kretanje serije prvih diferenci rezultiralo je u korelogramu (Slika 7.4(d)) sa relativno malim



vrednostima koeficijenata (nisu statistički značajni posle četvrte doznje), ali koji čak i na doznjama većim od 15 ne iščezavaju.



**Slika 7.4** Osnovna sredstva: (a) originalna serija ((b) korelogram originalne serije), (c) prva diferencija ((d) korelogram prve diference) i (e) druga diferencija ((f) korelogram druge diference)

Upravo na primeru ove serije uočava se teškoća određivanja reda diferenciranja. S jedne strane statistička značajnost autokorelacionih koeficijenata sugeriše nam da je serija stacionarna, a sa druge strane, izgled dela korelograma u kome koeficijenti nisu statistički značajno različiti od nule, ukazuje na nestacionarnu prirodu prvih diferenci serije osnovnih sredstava. Tako, prema kriterijumu minimalne uzoračke varijanse diferencirane serije kao i na osnovu korelograma, odnosno parcijalnog korelograma sugeriše nam se da je seriju osnovnih sredstava potrebno dva puta diferencirati, da bi se dobila stacionarna serija. Međutim, ako uzmemo u obzir mali broj opservacija vremenske serije, tada ćemo u drugoj varijanti za ovu seriju pretpostaviti da ju je potrebno samo jedanput diferencirati. ■

**Primer 7.5** Odrediti red diferenciranja za godišnju vremensku seriju ukupnog broja završenih stanova u SR Jugoslaviji (serija S8). Pri tome koristiti uzoračku autokorelaciju i parcijalnu autokorelaciju kao i kriterijum minimalne uzoračke varijanse diferencirane serije.

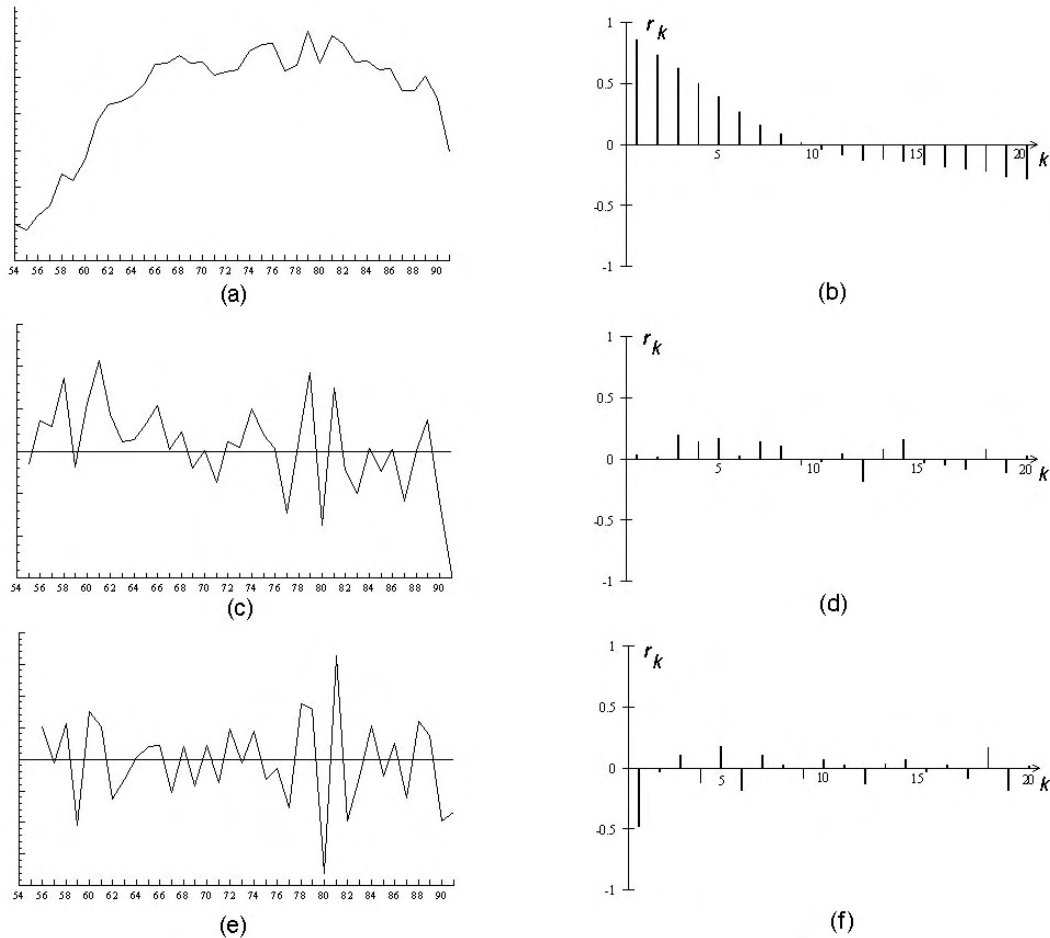
Korišćenjem programa *RATS 3.0* ocenili smo uzoračke autokorelacije i parcijalne autokorelacije koeficijente. Kako je serija relativno kratka (svega 38 opservacija), to smo ocenili i u Tabeli 7.5 prikazali samo prvih deset koeficijenata za originalnu seriju, a takode i za njenu prvu i drugu diferencu.

**Tabela 7.5** Uzorački autokorelacioni i parcijalni autokorelacioni koeficijenti za seriju završenih stanova (serija S8)

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Varijansa
	<b>Originalna serija</b>										2.2368 x 10 <sup>8</sup>
$\hat{\rho}_k$	0.86	0.73	0.62	0.50	0.39	0.27	0.16	0.08	0.01	-0.04	
$\hat{\phi}_{kk}$	0.86	-0.02	0.01	-0.13	-0.01	-0.15	-0.02	0.02	-0.03	-0.01	
	<b>Prva diferencija</b>										0.2579 x 10 <sup>8</sup>
$\hat{\rho}_k$	0.04	0.01	0.19	0.14	0.17	0.02	0.14	0.11	-0.05	-0.02	
$\hat{\phi}_{kk}$	0.04	0.01	0.19	0.13	0.17	-0.02	0.10	0.03	-0.09	-0.10	
	<b>Druga diferencija</b>										0.4461 x 10 <sup>8</sup>
$\hat{\rho}_k$	-0.48	-0.03	0.11	-0.12	0.17	-0.18	0.10	0.02	-0.08	0.07	
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.48	-0.33	-0.10	-0.16	0.09	-0.09	0.02	0.04	-0.01	-0.01	

Sa korelograma originalne serije (Slika 7.5(b)) vidimo da vrednost koeficijenata relativno brzo opada ka nuli, ali nam sliku donekle "kvare" koeficijenti na višim dočnjama. To nam ukazuje da seriju nije potrebno diferencirati. Međutim, na osnovu raspoloživog broja opservacija vremenske serije gruba aproksimacija 95% intervala poverenja koeficijenata iznosi  $(-0.32, 0.32)$ , pa nam značajnost prvih pet-šest koeficijenata sugerije da je seriju potrebno barem jedanput diferencirati.

Po svom izgledu originalna serija završenih stanova (Slika 7.5(a)) i njen korelogram (Slika 7.5(b)) podsećaju na odgovarajuće grafike kod serije prvih diferenci osnovnih sredstava (Slika 7.4(c) i 7.4(d)), pa je i komentar sa stanovišta izbora reda diferenciranja sličan onome iz Primera 7.4. Dakle, u slučaju serije sa malim brojem opservacija, na osnovu korelograma ne može se doneti nedvosmislen zaključak o potrebi, odnosno redu diferenciranja. Zato smo se za potrebe dalje analize opredelili da originalnu seriju završenih stanova u drugoj varijanti posmatramo kao stacionarnu seriju, odnosno da seriju ne diferenciramo.



**Slika 7.5** Završeni stanovi: (a) originalna serija ((b) korelogram originalne serije), (c) prva diferencija ((d) korelogram prve diference) i (e) druga diferencija ((f) korelogram druge diference)

Ukoliko prema prvoj varijanti (red diferenciranja jednak jedinici) primenimo postupak diferenciranja na seriju završenih stanova dobija se serija (Slika 7.5(c)) koja ima sve odlike stacionarne serije, a njen korelogram (Slika 7.5(d)) svojim izgledom sugerise da je reč o procesu belog šuma. Do identičnog zaključka dolazimo korišćenjem kriterijuma minimalne uzoračke varijanse diferencirane serije, odnosno da je prvom diferencom postignuta stacionarnost serije završenih stanova. ■

### 7.3.2 Testovi jediničnih korena

Alternativa "vizuelnom" načinu određivanju reda diferenciranja na osnovu običnog i parcijalnog uzoračkog korelograma jeste formalan statistički postupak testiranja prisustva jednog ili više jediničnih korena. U prikazu postupka testiranja prisustva jediničnog korena skoncentrisaćemo se na autoregresione modele. Ovaj izbor modela nije posebno restriktivan, jer će ARIMA model uvek imati AR reprezentaciju, ako je MA polinom invertibilan. Posmatrajmo AR proces prvog reda:

$$(1 - \alpha B)X_t = \varepsilon_t. \quad (7.4)$$

Kako je  $(1 - \alpha B) = [(1 - B) + (1 - \alpha)B]$  jednačinu (7.4) pišemo u obliku

$$(1 - B)X_t + (1 - \alpha)X_{t-1} = \varepsilon_t \quad (7.5)$$

odnosno

$$\Delta X_t = (\alpha - 1)X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (7.6)$$

gde je  $\Delta X_t = (1 - B)X_t$ . Koeficijent  $(\alpha - 1)$  se može konzistentno oceniti metodom običnih najmanjih kvadrata. Ocena tog koeficijenta omogućava testiranje nulte hipoteze da je  $\alpha = 1$  prema alternativnoj hipotezi da je  $\alpha < 1$ . Drugim rečima, nultom hipotezom iskazujemo pretpostavku o nestacionarnosti protiv alternativne pretpostavke da je posmatrani proces stacionaran. Prema terminologiji koju smo koristili u 5. Glavi kažemo da je prema nultoj hipotezi posmatrani proces integrisan prvog reda, protiv alternativne hipoteze da je nultog reda integrisanosti. Na osnovu korišćenih oznaka pišemo da je  $H_0: X_t \sim I(1)$ , protiv  $H_1: X_t \sim I(0)$ . Fuller (1976) je pokazao da odnos ocene koeficijenta  $(\alpha - 1)$  i njegove standardne greške nema standardan  $t$ -raspored čak i u asimptotskom slučaju. Raspored ove statistike, koju označavamo sa  $\tau$  da bi je razlikovali od  $t$ -statistike, asimetričan je ulevo. Prema autorima koji su dali veliki doprinos navedenom definisanju testova jediničnog korena, ovaj " $t$ -odnos" nazivamo *Dickey-Fullerova statistika* ( $DF$ -statistika).

Ako u regresioni model (7.6) uvedemo konstantu dobićemo sledeći model:

$$\Delta X_t = \beta_0 + (\alpha - 1)X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (7.7)$$

na osnovu koga testiramo nultu hipotezu o postojanju jediničnog korena, ali, za razliku od modela (7.6), sada nultom hipotezom pretpostavljamo za posmatrani proces da predstavlja proces slučajnog hoda sa konstantnom. Uvođenjem konstante u model menja se prvobitni raspored Dickey-Fullerove statistike.

Naredna modifikacija modela (7.7) sastoji se u uvođenju linearnog trenda što nam omogućava da iskažemo alternativnu hipotezu o trend stacionarnosti posmatrane vremenske serije. Osnovu testa nulte hipoteze o diferencnoj stacionarnosti protiv alternativne hipoteze o trend stacionarnosti zasnivamo dakle na modelu:

$$\Delta X_t = \beta_0 + \beta_1 t + (\alpha - 1)X_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (7.8)$$

I u slučaju ove modifikacije menja se prvobitni raspored Dickey-Fullerove statistike. U primeni Dickey-Fullerovog testa pretpostavljamo da je serija reziduala ocenjenih modela (7.6)-(7.8) proces belog šuma, što kod većine vremenskih serija nije ispunjeno. Prema predloženoj korekciji tih modela (Dickey (Diki) i Fuller (1979)) dodaju se vrednosti zavisne promenljive s docnjom, odnosno članovi  $\Delta X_{t-i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ . Pri tome se pretpostavlja da je veća verovatnoća da će serija reziduala proširenog modela slediti

proces belog šuma, no što je to slučaj sa rezidualima dobijenim pre proširivanja modela. Ovime je omogućeno definisanje tzv. *proširenog* (engl. *augmented*) *Dickey-Fullerovog testa*. Odgovarajuću statistiku označavamo kao  $ADF(p)$  statistiku. Dakle, uz sve navedene modifikacije preporučuje se da se pri testiranju postojanja jediničnog korena koristi model:

$$\Delta X_t = \beta_0 + \beta_1 t + (\alpha - 1)X_{t-1} + \sum_{i=1}^p \lambda_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (7.9)$$

gde  $p$  predstavlja broj zavisnih promenljivih s docnjom. Veličinu  $p$  određujemo tako da serija reziduala ocenjenog modela predstavlja proces belog šuma. Alternativa je da se koristi jedan od kriterijuma izbora reda autoregresionog procesa koji ćemo definisati u Odeljku 7.3.4. Kao i kod obične Dickey-Fullerove statistike i prošireni Dickey-Fullerov test zasnovan je na " $t$ -odnosu" ocene koeficijenta uz  $X_{t-1}$  i njegove standardne greške.

Ukoliko na osnovu modela (7.9) odbacimo hipotezu o postojanju jednog jediničnog korena, odnosno konstatujemo da serija nije diferencno stacionarna, tada je moguće da je vremenska serija trend stacionarna. Za sve navedene modifikacije u Tabeli B6 (Dodatak B) dajemo kritične vrednosti Dickey-Fullerovih statistika. Naposletku, ako za originalnu vremensku seriju na osnovu Dickey-Fullerove statistike ne odbacimo nultu hipotezu o postojanju jednog jediničnog korena, testira se prisustvo drugog jediničnog korena korišćenjem modela (7.9), ali sada za prvu diferencu vremenske serije. U tom slučaju poredimo " $t$ -odnos" koeficijenta uz  $\Delta X_{t-1}$  i odgovarajuću kritičnu vrednost Dickey-Fullerove statistike, pri čemu zavisna promenljiva u modelu (7.9) postaje  $\Delta \Delta X_t$ .

Pored izloženih testova jediničnog korena zasnovanih na " $t$ -odnosu", Dickey i Fuller (1981) su definisali i tri statistike zasnovane na principu količnika verodostojnosti. U praktičnoj primeni ovih testova možemo reći da se radi o standardnim "*regresionim F-testovima*" namenjenih testiranju hipoteze o ograničenju na parametre modela<sup>3</sup> (7.6)-(7.8). Ako pretpostavimo da vremenskoj seriji  $X_t$  odgovara model (7.7), tada nultu hipotezu da je  $(\beta_0, \alpha) = (0, 1)$ , protiv alternativne da nulta hipoteza nije tačna, testiramo korišćenjem statistike količnika verodostojnosti koja se naziva  $\Phi_1$  statistika. Kao što su pokazali Dickey i Fuller ova statistika nema standardan  $F$ -raspored, mada se do njene izračunate vrednosti dolazi na osnovu izraza u 3. fusnoti. Kritične vrednosti ove i ostalih statistika  $\Phi$  testova date su u Tabeli B7 (Dodatak B).

<sup>3</sup> Za postupak testiranja ograničenja na parametre modela, odnosno definiciju "regresionog F-testa" videti Jovičić (1981, ss. 77-80). Prema obeležavanju korišćenom u navedenoj referenci količnik koji koristimo u postupku testiranja:  $((OSKG - BSKG)/g)/(BSKG/(n-k))$  ima  $F$  raspored sa  $g$  i  $(n-k)$  stepeni slobode, gde je sa  $OSKG$  i  $BSKG$  označena suma kvadrata reziduala u regresionom modelu sa i bez ograničenja na parametre modela respektivno,  $g$  predstavlja broj ograničenja na parametre modela,  $n$  je dužina vremenske serije, a  $k$  broj regresora u modelu bez ograničenja na parametre.

Na osnovu modela (7.8) testiramo nultu hipotezu  $(\beta_0, \beta_1, \alpha) = (0, 0, 1)$ , protiv alternativne da nulta hipoteza nije tačna. Osnovu testa navedene hipoteze predstavlja statistika količnika verodostojnosti koja se naziva  $\Phi_2$  statistika. Do izračunate vrednosti ove statistike dolazimo na osnovu izraza iz 3. fusnote, pri čemu imamo tri ograničenja na parametre modela (7.8) definisana nultom hipotezom. Model dat izrazom (7.8) koristimo i za testiranje nulte hipoteze  $(\beta_0, \beta_1, \alpha) = (\beta_0, 0, 1)$ , protiv alternativne da nulta hipoteza nije tačna. Osnovu testa predstavlja statistika količnika verodostojnosti koja se naziva  $\Phi_3$  statistika. U ovom slučaju prema nultoj hipotezi pretpostavlja se da postoji jedan jedinični koren, odnosno da vremenskoj seriji odgovara model slučajnog hoda sa konstantom. Napominjemo da tek ako se na osnovu  $\Phi_3$  statistike utvrdi odsustvo linearnog trenda, kao polazni koristi se model (7.7).

Naposletku, ukažimo na jednostavan test jediničnog korena koji su predložili Sargan (Sargn) i Bhargava (Bargava) (1983), a zasnovan je na poznatoj Durbin-Watsonovoj statistici. Polazi se od modela (7.6) koji možemo iskazati u sledećem obliku:

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (7.10)$$

Autori su predložili izračunavanje tzv. *integracione Durbin-Watsonove statistike*:

$$IDW = \frac{\sum_{t=2}^n (X_t - X_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}, \quad (7.11)$$

gde smo sa  $\bar{X}$  označili sredinu vremenske serije. Ako je u modelu (7.10)  $\alpha = 1$ , tada je brojilac u izrazu (7.11) jednak sumi kvadrata reziduala. Može se u tom slučaju reći da je  $X_{t-1}$  "ocenjena" vrednost u regresiji  $X_t$  na  $X_{t-1}$ . Tada očekujemo da će Durbin-Watsonova statistika data izrazom (7.11) biti bliska nuli. Znači da je provera reda integrisanosti vremenske serije zasnovana na proveru da li je  $IDW$  statistika statistički značajno veća od nule. Ako jeste, zaključujemo da je posmatrani proces stacionaran (nultog je reda integrisanosti, tj.  $X_t \sim I(0)$ ) inače je nestacionaran (prvog je reda integrisanosti, tj.  $X_t \sim I(1)$ ).

Ukoliko u izraz (7.10) uvedemo konstantu tada razmatramo proces slučajnog hoda sa konstantom, za koji Bhargava (1986) definiše statistiku:

$$IDW_1 = \frac{\sum_{t=2}^n (X_t - X_{t-1})^2 - \frac{1}{n-1} (X_n - X_1)^2}{\frac{1}{(n-1)^2} \sum_{t=1}^n \left[ (n-1)X_t - (t-1)X_n - (n-1)X_1 - (n-1)\left(\bar{X} - \frac{1}{2}(X_1 + X_n)\right) \right]^2}, \quad (7.12)$$

za testiranje prisustva jediničnog korena. Kritične vrednosti ova dva testa date su u Tabeli B8 (Dodatak B). Ukoliko je izračunata vrednost statistike (7.11) i (7.12) veća od

odgovarajuće tablične vrednosti, tada odbacujemo nultu hipotezu o postojanju jediničnog korena.

**Primer 7.6** Odrediti red diferenciranja korišćenjem predloženih testova jediničnog korena za sledeće godišnje vremenske serije SR Jugoslavije: nezaposlenost (serija S4), realni društveni proizvod (serija S5), osnovna sredstva privrede društvenog sektora (serija S7) i ukupan broj završenih stanova (serija S8).

Korišćenjem programa *RATS 3.0* ocenili smo modele (7.6)-(7.9). Na osnovu izloženog postupka izračunali smo vrednosti zahtevanih statistika testova jediničnog korena. Dobijene rezultate prikazali smo u Tabeli 7.6.

**Tabela 7.6** Rezultati testova jediničnih korena

Serije	DF test			ADF test			$\Phi_1$	$\Phi_2$	$\Phi_3$	IDW
	(7.6)	(7.7)	(7.8)	(7.6)	(7.7)	(7.8)				
<b>Nezaposlenost</b>										
originalna serija	5.57	0.14	-1.53	1.74	-0.61	-2.77	17.4	13.1	1.3	0.02
prva diferencija	-1.56	-2.78	-2.71	-1.73	-3.28	-3.21	3.9	2.5	3.7	0.87
druga diferencija	-4.75	-4.66	-4.56	-4.73	-4.65	-4.55	10.9	6.9	10.4	1.91
<b>Društveni proizvod</b>										
originalna serija	2.78	-2.52	2.47	1.59	-2.14	3.78	11.3	12.2	8.4	0.02
prva diferencija	-3.86	-4.71	-5.78	-0.83	-0.15	-1.19	11.3	11.4	16.9	1.63
druga diferencija	-15.29	-15.28	-15.79	-5.42	-5.49	-5.94	116.8	83.3	124.9	3.47
<b>Osnovna sredstva</b>										
originalna serija	10.24	-0.13	-0.95	0.73	-1.26	-1.41	104.9	70.1	0.5	0.01
prva diferencija	-0.69	-2.48	-2.45	-0.45	-2.57	-2.67	3.1	2.5	3.7	0.44
druga diferencija	-7.94	-7.86	-8.41	-4.56	-4.51	-4.95	30.9	23.5	35.3	2.55
<b>Završeni stanovi</b>										
originalna serija	-0.05	-2.22	-0.15	-0.11	-2.57	-0.32	2.7	3.5	5.0	0.11
prva diferencija	-4.88	-4.85	-6.73	-3.04	-2.96	-5.46	11.9	15.6	23.3	1.69
druga diferencija	-9.84	-9.75	-9.74	-7.24	-7.19	-7.19	47.7	31.7	47.5	2.91

*Napomena:* U Tabeli 7.6 brojevi iz druge, treće i četvrte kolone odnose se na vrednosti Dickey-Fullerove statistike računane na osnovu modela bez konstante i bez trenda (model (7.6)), modela sa konstantom i bez trenda (model (7.7)) i modela sa konstantom i trendom (model (7.8)). Što se proširenog Dickey-Fullerovog testa tiče, vrednost njegove statistike računata je na osnovu istih modela kao i kod DF testa, s tim da je dodat jedan regresor: zavisna promenljiva s docnjom od jednog perioda (znači da je u izrazu (7.8) zamenjeno  $p = 1$ ).

Kao prvu informaciju o redu integrisanosti vremenske serije koristimo rezultate jednostavnog integracionog Durbin-Watsonovog testa. Prezentirani rezultati IDW testa ukazuju da je seriju društvenog proizvoda i završenih stanova potrebno jedanput diferencirati radi postizanja njihove stacionarnosti. U slučaju promenljive osnovnih sredstava red integrisanosti te vremenske serije jednak je dvojci. Što se serije nezaposlenosti tiče,

odgovor na osnovu *IDW* testa nije nedvosmislen, bar ne na nivou značajnosti od 5%.

U primeni *DF* testa javlja se problem na koji smo ukazali pri definisanju *ADF* testa. Naime, niska vrednost *DW* statistike i visoka vrednost relevantnije Box-Pierceove statistike (videti Odeljak 7.5.1) ocenjenog regresionog modela (7.6)-(7.8) sugeriše prisustvo problema autokorelisanosti reziduala. Znači da nije moguće prihvatiti pretpostavku da serija reziduala predstavlja proces belog šuma. Stoga se ne možemo previše pouzdati u rezultate *DF* testa. Ipak, i pored autokorelisanosti reziduala rezultati *DF* testa podudarni su sa našim nalazom na osnovu korelograma, odnosno *IDW* testa. Tako je prema rezultatima *DF* testa seriju društvenog proizvoda i završenih stanova potrebno jedanput diferencirati, seriju osnovnih sredstava dva puta, a za seriju nezaposlenosti smo u dilemi da li je potrebno jedanput ili dva puta diferencirati. Kod ove poslednje serije pretpostavka o procesu slučajnog hoda sa konstantom je takođe verovatna.

Korišćenjem *ADF* testa utvrđeno je da se jedina razlika u odnosu na predašnji zaključak tiče serije društvenog proizvoda. Ovaj test sugeriše da seriju društvenog proizvoda treba dva puta diferencirati radi postizanja stacionarnosti. Na izvestan način ovaj rezultat je očekivan. Naime, u slučaju serije sa strukturnom promenom kakva se desila 1989. godine u seriji društvenog proizvoda, ako se ne uključi veštačka promenljiva koja će obuhvatiti taj strukturni prelom u seriji, rezultati testova jediničnog korena sugerisaće viši red diferenciranja no kada se veštačka promenljiva uključi u model (Perron (Peron) (1989)). Nažalost, do sada nije ispitana jačina testova jediničnog korena uz prisustvo veštačkih promenljivih.

Naposletku, za testove količnika verodostojnosti konstatujemo da pate od istog nedostatka kao i *DF* testovi. Obe klase testova osetljive su na odsustvo pretpostavke da serija reziduala predstavlja proces belog šuma. Ipak, i pored ovog nedostatka, sva tri  $\Phi$  testa kod serije završenih stanova sugerišu da je potrebno seriju jedanput diferencirati. Kod serije nezaposlenosti i osnovnih sredstava ovi testovi ukazuju na potrebu za dvostrukim diferenciranjem. Međutim, rezultat  $\Phi_3$  testa kod serije nezaposlenosti podupire i hipotezu da se radi o procesu slučajnog hoda sa konstantom. Jedino kod serije društvenog proizvoda sva tri testa ne sugerišu da ju je potrebno diferencirati. Ovaj zaključak delimično je rezultat gore navedenog problema autokorelacije serije reziduala. Istovremeno ukazujemo i na to da kada, kao u ovom slučaju, raspoložemo skromnim brojem opservacija jačina testova jediničnog korena je relativno mala (Schwert (Švert) (1989)). Pored ranije navedenog uticaja strukturnih promena ovim bi se objasnili dobijeni divergentni



rezultati različitih testova jediničnog korena kod serije društvenog proizvoda.

Sumirajući izloženo možemo konstatovati da su testovi jediničnog korena ukazali da je za seriju nezaposlenosti i završenih stanova prihvatljiva pretpostavka o postojanju jednog jediničnog korena, pri čemu kod serije nezaposlenosti se može uvesti i konstanta. Za serije društvenog proizvoda i osnovnih sredstava konkurišu dve alternativne formulacije: prema prvoj radi se o procesu slučajnog hoda sa konstantom, a prema drugoj u seriji su prisutna dva jedinična korena. ■

O postupcima testiranja reda integrisanosti kod ARMA modela videti Said (Said) i Dickey (1984), a o alternativnim testovima videti kod Phillipsa (Filips) (1987) i Phillipsa i Perrona (1988). O testiranju prisustva jediničnog korena i utvrđivanju tipa nestacionarnosti (trend ili diferencna stacionarnost) u slučaju strukturnih promena videti kod Perrona (1989).

### 7.3.3 Određivanje reda procesa

Nakon određivanja reda diferenciranja potrebno je odrediti red AR i MA polinoma. On se u klasičnom Box-Jenkinsovom pristupu određuje na osnovu ocenjenih autokorelacionih funkcija za diferenciranu seriju, tako što se poredi izgled uzoračkog korelograma sa izgledom teorijskih korelograma poznatih modela nižeg reda. Radi podsećanja navodimo da klasu stacionarnih AR procesa karakteriše običan korelogram sa eksponencijalno ili oscilatorno opadajućim vrednostima koeficijenata, dok na parcijalnom korelogramu ovih procesa sve vrednosti koeficijenata na docnjama većim od reda procesa su jednake nuli. Na osnovu dualne veze AR i MA procesa, izgled običnog korelograma klase invertibilnih MA procesa sličan je parcijalnom korelogramu AR procesa, i obratno, parcijalni korelogram MA procesa sličan je običnom korelogramu AR procesa. Naposljetku kod mešovitog  $ARMA(p, q)$  procesa, na oba korelograma autokorelacioni koeficijenti pokazuju tendenciju opadanja (mešavina eksponencijalnog i prigušenog sinusnog kretanja) nakon prvih  $q - p$  docnji kod običnog i nakon prvih  $p - q$  docnji kod parcijalnog korelograma.

Time što smo odredili red diferenciranja i red AR i MA polinoma identifikovali smo, tzv. *prethodni* ili *privremeni* (engl. *tentative*) model vremenske serije. Kako je Box-Jenkinsov postupak iterativan po svojoj definiciji, ovaj privremeni model će u narednim etapama, odnosno iteracijama doživeti eventualno promene sve dok se ne dođe do finalnog modela.

**Primer 7.7** Identifikovati odgovarajući red ARIMA procesa korišćenjem uzoračkog običnog i parcijalnog korelograma za sledeće godišnje vremenske serije SR Jugoslavije: nezaposlenost (serija S4), realni društveni proizvod (serija

S5), osnovna sredstva privrede društvenog sektora (serija S7) i ukupan broj završenih stanova (serija S8).

Na osnovu analize korelograma navedenih serija prikazanih na Slikama 7.2- 7.5, pokušajmo odrediti privremeni ARIMA model.

Kod vremenske serije nezaposlenosti konstatovan je prigušeni oscilatorni karakter korelograma serije prvih diferenci (Slika 7.2(d)), što nam sugerira da toj vremenskoj seriji odgovara AR(2) model čiji je pripadajući polinom sa kompleksnim korenima. Ovaj izbor AR(2) modela potvrđuju i prva dva statistički značajna parcijalna autokorelaciona koeficijenta. Na osnovu sredine diferencirane serije  $\bar{W} = 21401.8$  i standardne greške ocene te sredine  $S_{\bar{W}} = 3564$ , vrednost  $t$ -odnosa jednaka je 6.00. Ovo nam ukazuje na prisustvo determinističkog trenda, pa je prva specifikacija ARIMA modela serije nezaposlenosti:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 - B)X_t = \theta_0 + \varepsilon_t. \quad (7.13)$$

Podsećamo da je pri korišćenju testova jediničnog korena sugerisano da se kod serije prvih diferenci uvede konstanta. Ta sugestija je u saglasnosti sa gornjim nalazom na bazi poređenja sredine diferencirane serije i njene standardne greške ocene. S druge strane, pri određivanju reda diferenciranosti serije rečeno je da se eventualno može uzeti u obzir i to da je seriju nezaposlenosti potrebno dva puta diferencirati da bi se postigla njena stacionarnost. Zato je druga, alternativna specifikacija ARIMA modela ove vremenske serije data izrazom:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 - B)^2 X_t = \varepsilon_t. \quad (7.14)$$

Na osnovu korelograma serije drugih diferenci (Slika 7.2(f)) reklo bi se da je predloženi AR(2) model sa ograničenjem na prvi koeficijent, tj. da je  $\phi_1 = 0$ . Pri ocenjivanju predloženog modela (7.14) proverićemo ovu pretpostavku.

U slučaju serije društvenog proizvoda takode dajemo dve alternativne specifikacije ARIMA modela. Prema prvoj radi se o AR(2) modelu za seriju prvih diferenci pri čemu u model uvodimo i konstantu. Računanjem  $t$ -odnosa dobijamo  $t_{\bar{W}} = 3.78$ , pa nam ova izračunata vrednost statistike testa potvrđuje nužnost uključivanja konstante u model. Za seriju društvenog proizvoda prvi prethodni ARIMA model glasi:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 - B)X_t = \theta_0 + \varepsilon_t. \quad (7.15)$$

S obzirom da su nam testovi jediničnog korena sugerisali da je seriju društvenog proizvoda potrebno dva puta diferencirati, korelogram sa Slike

7.3(f) i parcijalni autokorelacioni koeficijenti drugih diferenci iz Tabele 7.3 ukazuju na drugi prethodni ARIMA model. Kako autokorelacioni koeficijenti pokazuju tendenciju ka alterniranju, a među parcijalnim autokorelacionim koeficijentima značajan je samo prvi, to se može reći da za druge difference ove serije odgovara AR(1) model kod koga je  $\phi_1 < 0$ :

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B)^2 X_t = \varepsilon_t. \quad (7.16)$$

Za seriju osnovnih sredstava predloženo je jednostruko i dvostruko diferenciranje u cilju postizanja stacionarnosti. Na osnovu korelograma prvih diferenci predlaže se sledeći model:

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B)X_t = \theta_0 + \varepsilon_t. \quad (7.17)$$

Korelogram drugih diferenci i jedini statistički značajan parcijalni autokorelacioni koeficijent na prvoj doznji ukazuju na drugi model za seriju osnovnih sredstava:

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B)^2 X_t = \varepsilon_t. \quad (7.18)$$

Naposletku, za diferenciranu seriju završenih stanova korelogram sa Slike 7.5(d) sugeriše da se radi o procesu beloga šuma. To znači da serija završenih stanova predstavlja proces slučajnog hoda. Da bismo proverili da li je potrebno dodavati konstantu procesu slučajnog hoda računamo  $t$ -odnos:  $t_{\bar{w}} = \bar{W} / S_{\bar{w}} = 532.05 / 846.46 = 0.63$ . Kako ovaj odnos nije statistički značajan zaključujemo da nije potrebno uvoditi konstantu u model koji stoga glasi:

$$(1 - B)X_t = \varepsilon_t. \quad (7.19)$$

Za potrebe dodatne analize ove serije ocenićemo za nju i AR(1) model.

Ovde je interesantno dodatno prokomentarisati seriju završenih stanova. Podsećamo da smo za seriju završenih stanova na osnovu korelograma i testova jediničnih korena dobili da je potreban red diferenciranja jednak jedinici. Ako nastavimo dalje sa nepotrebnim diferenciranjem ove serije (diferenciramo seriju prvih diferenci), tada ćemo dobiti stacionarnu seriju, ali sa većom uzoračkom varijansom diferencirane serije (videti Tabelu 7.5). Istovremeno na korelogramu dobijamo da je prvi autokorelacioni koeficijent jednak -0.48 i da je statistički značajan. Na osnovu izgleda tog korelograma identifikovali bismo MA(1) model. Uz navedenu vrednost prvog autokorelacionog koeficijenta, implicirani koeficijent MA(1) modela blizak je jedinici. Znači da smo prekomernim diferenciranjem generisali neinvertibilni MA(1) model. ■

Napominjemo da ocenjeni autokorelacioni koeficijenti imaju veliku varijansu i obično su visoko autokorelisani jedan s drugim. Iz tog razloga se ne može očekivati da će se uzorački korelogrami u detaljima podudarati sa izgledom teorijskih korelograma. Mada se na osnovu izgleda korelograma može biti siguran u pogledu opštih karakteristika procesa, nismo uvek u mogućnosti precizno odrediti njegov red. Zbog ovog subjektivnog momenta u fazi identifikacije potrebno je veliko iskustvo da bi se identifikovao odgovarajući ARIMA model. Zato preporučujemo da se prilikom korišćenja uzoračke autokorelacione funkcije za određivanje reda procesa u graničnim slučajevima predlože dva ili više bliskih modela kao kandidata za naredne etape ocenjivanja i provere adekvatnosti. U Primeru 7.7 postupili smo prema upravo datoj preporuci.

### 7.3.4 Korišćenje kriterijuma za izbor modela

Izbor reda ARMA procesa na bazi običnog i parcijalnog korelograma unosi veliki stepen arbitrarnosti u Box-Jenkinsovu metodologiju, a da bi dao dobre rezultate zahteva dosta iskustva. Stoga su činjeni pokušaji da se u fazi izbora reda ARMA procesa Box-Jenkinsov postupak automatizuje korišćenjem statistički utemeljenog skupa pravila. U tom smislu predloženi su brojni kriterijumi izbora modela, prvobitno za čiste AR procese, a zatim i za mešovite ARMA procese. Kod svih se pretpostavlja da je red diferenciranja određen, a cilj postupka jeste određivanje odgovarajuće vrednosti  $p$  i  $q$ . Postupci određivanja reda procesa zasnovani su na minimiziranju funkcije:

$$\delta(p, q) = \ln \hat{\sigma}_{p,q}^2 + \frac{p+q}{n} g(n), \quad (7.20)$$

gde je  $\hat{\sigma}_{p,q}^2$  ocena varijanse reziduala ARMA( $p, q$ ) modela dobijena po metodi najveće verodostojnosti, a  $g(n)$  predstavlja nenegativnu funkciju penala ili kaznenu funkciju (engl. *penalty function*). Napominjemo da će se sa povećanjem broja koeficijenata,  $\ln \hat{\sigma}_{p,q}^2$  smanjivati, a  $(p+q)g(n)/n$  će rasti. Prema tome, funkcijom  $\delta(p, q)$  su opisana dva međusobno suprotstavljena zahteva. Prvi zahtev je zahtev za smanjenjem varijanse, odnosno preciznijim ocenjivanjem, što se postiže povećanjem broja koeficijenata. Drugi zahtev tiče se principa ekonomičnosti u gradnji modela, što znači da se smanjenjem broja koeficijenata u većoj meri pridržavamo ovog principa. Dakle, smanjenje vrednosti funkcije  $\delta(p, q)$  možemo postići smanjivanjem varijanse (prvi sabirak u izrazu (7.20)), ali ćemo istovremeno, zbog uključenja većeg broja koeficijenata, "plaćati" kaznu (drugi sabirak u izrazu (7.20)), što u krajnjem ishodu vodi ka povećanju vrednosti funkcije  $\delta(p, q)$ . Izborom ove kaznene funkcije definišemo različite alternativne kriterijume. Tako na primer, ako u izraz (7.20) stavimo  $g(n) = 2$ , dobijamo tzv. *Akaikeov informacioni kriterijum* ili skraćeno  $AIC(p, q)$  kriterijum (Akaike (Ekeik) (1973)). Ako u izrazu (7.20) stavimo  $g(n) = \ln(n)$ , dobijamo tzv. *Bayesov informacioni kriterijum* ili skraćeno  $BIC(p, q)$  kriterijum koji je predložio

Schwarz (Švarc) (1978). Treći kriterijum je tzv.  $HQ(p, q)$  kriterijum koji su predložili Hannan i Quinn (Kvin) (1979), a koji se dobija na osnovu izraza (7.19) definisanjem funkcije  $g(n) = k \ln[\ln(n)]$ , gde je  $k$  konstanta,  $k \geq 2$ .

Pored gornjih kriterijuma Akaike (1970) je predložio i tzv. *kriterijum konačne greške prognoziranja* (engl. *final prediction error*):

$$FPE(p, q) = \frac{n + p + q}{n - p - q} \hat{\sigma}_{p, q}^2. \quad (7.21)$$

Pored ovih, definisani su brojni drugi kriterijumi<sup>4</sup>. Njihova struktura je slična u tom smislu što im prvi sabirak uključuje varijansu greške prognoze za jedan korak unapred, a drugi sabirak uzima u obzir broj ocenjenih koeficijenata, odnosno pripisuju svojevrsne kazne ukoliko se povećava broj koeficijenata. Postupak primene ovih kriterijuma je sledeći. Prvo se fiksira gornja granica reda polinoma  $\phi(B)$  i  $\theta(B)$ , recimo da su to vrednosti  $P$  i  $Q$ . Zatim se bira red  $p^*$  i  $q^*$  tako da je, na primeru  $AIC$  kriterijuma:

$$AIC(p^*, q^*) = \min_{p, q} AIC(p, q), \quad p \in \{0, 1, \dots, P\}, \quad q \in \{0, 1, \dots, Q\}. \quad (7.22)$$

Postupak primene drugih kriterijuma izbora reda procesa je identičan izloženom postupku primene  $AIC$  kriterijuma.

**Primer 7.8** Za vremensku seriju završenih stanova identifikovati odgovarajući red ARMA procesa korišćenjem izloženih kriterijuma izbora modela. Fiksirati maksimalni red AR i MA polinoma na 3.

Za seriju završenih stanova odredili smo red diferenciranja u Primeru 7.5 i 7.6, te konstatovali da je potrebno jedanput diferencirati tu seriju radi postizanja njene stacionarnosti.

Primenimo na diferenciranu seriju izloženi postupak izbora reda procesa korišćenjem različitih kriterijuma. Opredelili smo se za dva kriterijuma  $AIC$  i  $FPE$ . Čitaocu se ostavlja da proveri da se korišćenjem preostala dva kriterijuma, tj.  $HQ$  i  $BIC$  dobija identičan rezultat kao i primenom  $AIC$  i  $FPE$  kriterijuma<sup>5</sup>. Vrednosti  $AIC$  i  $FPE$  kriterijuma za različiti red AR i MA polinoma za seriju završenih stanova dati su u Tabeli 7.7.

<sup>4</sup> Videti: Gooijer (Guižer) i dr. (1985) i Koreisha (Korejša) i Yoshimoto (Jošimoto) (1991) za iscrpan pregled ovih i drugih postupaka za identifikaciju reda ARIMA modela.

<sup>5</sup> Napominjemo da se u opštem slučaju ne dobija identičan rezultat korišćenjem različitih kriterijuma izbora reda procesa.

Tabela 7.7 Vrednosti *AIC* i *FPE* kriterijuma za seriju završenih stanova

Red AR polinoma	<i>AIC</i> kriterijum				Red AR polinoma	<i>FPE</i> kriterijum ( $\times 10^6$ )			
	Red MA polinoma					Red MA polinoma			
	0	1	2	3		0	1	2	3
0	17.09	17.12	17.15	17.13	0	26.51	27.22	28.02	27.39
1	17.14	<b>16.86</b>	16.91	17.02	1	27.91	<b>20.96</b>	22.14	24.58
2	17.19	17.08	17.16	17.17	2	29.32	26.23	28.25	28.58
3	17.21	17.16	17.14	17.16	3	29.39	28.43	27.69	28.34

U Tabeli 7.7 je minimalna vrednost *AIC* i *FPE* kriterijuma posebno obeležena. Ona nam sugerise izbor ARMA(1,1) modela za narednu etapu postupka izgradnje modela vremenske serije završenih stanova. Podsecamo da je korišćenjem korelograma za ovu seriju u Primeru 7.7 predložen model slučajnog hoda. U odeljku posvećenom ocenjivanju detaljnije ćemo razmotriti ove alternativne modele. ■

Što se tiče vrednosti  $P$  i  $Q$  nema posebnog uputstva o načinu njihovog izbora, ali se pretpostavlja da su dovoljno velike da definišu širok spektar modela koji bi trebalo da obuhvati i tačan model. Pokazano je da *BIC* i *HQ* kriterijum konzistentno ocenjuju red autoregresionog procesa (Hannan (1980)), dok kriterijumi *AIC* i *FPE* teži da pristrasno navise ocene tačan red procesa (Shibata (Šibata) (1976)). Uporedne studije alternativnih kriterijuma za izbor ARMA modela pokazale su da i u malim uzorcima bolje osobine imaju *BIC* i *HQ* kriterijumi u odnosu na ostale kriterijume. Na osnovu ovih teorijskih i empirijskih rezultata *BIC* i *HQ* kriterijumu daje se prednost u odnosu na preostala dva izložena kriterijuma.

### 7.3.5 Inverzna autokorelaciona funkcija

U tradicionalnoj metodologiji Boxa i Jenkinsa obična i parcijalna autokorelaciona funkcija predstavljaju osnovno sredstvo identifikacije ARMA modela. Pored njih koristi se i *inverzna autokorelaciona funkcija* (engl. *inverse autocorrelation function*). Najkraće rečeno ona predstavlja autokorelacionu funkciju ARMA modela u kome su polinomi  $\phi(B)$  i  $\theta(B)$  zamenili mesta. Znači, ako diferencirana serija  $W_t$  predstavlja ARMA( $p, q$ ) proces:  $\phi(B)W_t = \theta(B)\varepsilon_t$ , tada ćemo odgovarajući model ARMA( $q, p$ ) procesa nazvati *dualnim* ili *inverznim* modelom prvobitnog ARMA( $p, q$ ) modela. Ako je na primer polazni model AR( $p$ ) model sa autokorelacionim koeficijentima koji lagano odumiru ka nuli, tada će dualni model biti MA( $p$ ) model čiji će autokorelacioni koeficijenti posle  $p$ -te docnje biti jednaki nuli. Očigledno je da se inverzna autokorelaciona funkcija ponaša slično parcijalnoj autokorelacionoj funkciji, pa se na isti način koristi prilikom utvrđivanja reda procesa. Zbog toga se ova funkcija može smatrati konkurentom parcijalnoj autokorelacionoj funkciji u postupku identifikacije reda AR procesa. Na žalost, ocenjivanje inverzne autokorelacione funkcije nije jednostavan posao. Jedan metod ocenjivanja ove funkcije zasnovan je na

aproksimaciji vremenske serije AR procesom dovoljno visokog reda. Nakon ocene koeficijenata tog AR modela koristimo izraz (7.23) za ocenu inverznih autokorelacionih koeficijenata. Inverzni autokorelacioni koeficijent na  $k$ -toj docnji za  $AR(p)$  proces dat je izrazom:

$$\rho_k^{(I)} = \begin{cases} \frac{-\phi_k + \sum_{j=1}^{p-k} \phi_j \phi_{j+k}}{1 + \sum_{j=1}^p \phi_j^2} & k \leq p \\ 0, & k > p \end{cases}. \quad (7.23)$$

Testiranje statističke značajnosti inverznih autokorelacionih koeficijenata sprovodi se po istom postupku kao u slučaju običnih autokorelacionih koeficijenata. Znači da se može koristiti na primer 95% interval poverenja jednak  $\pm 1.96/\sqrt{n}$ , za proveru značajnosti individualnih inverznih autokorelacionih koeficijenata. Pored inverzne autokorelacione funkcije za dualni model se definiše i parcijalna inverzna autokorelaciona funkcija. Njeno ponašanje slično je ponašanju obične autokorelacione funkcije. Međutim, rede se koristi zbog teškoća pri njenom ocenjivanju.

**Primer 7.9** Identifikovati odgovarajući red ARMA procesa korišćenjem inverzne autokorelacione funkcije za vremensku seriju broja završenih stanova.

Mada se inverzna autokorelaciona funkcija definiše i izračunava za stacionarnu vremensku seriju, mi ćemo je oceniti za originalnu vremensku seriju broja završenih stanova, a takođe za njenu prvu i drugu diferencu. Tako ćemo na osnovu ocenjenih inverznih autokorelacionih funkcija ukazati na posledice nedovoljnog ili preteranog diferenciranja vremenske serije na identifikaciju odgovarajućeg reda procesa. Korišćenjem programa *RATS 3.0* ocenili smo inverznu autokorelacionu funkciju serije broja završenih stanova, pa je prezentiramo u Tabeli 7.8.

**Tabela 7.8** Inverzna autokorelaciona funkcija broja završenih stanova

Seri je	Dužina docnje									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Originalna serija	-0.87	0.05	-0.13	0.12	-0.11	0.13	0.03	-0.04	0.02	0.01
Prva diferenca	0.02	0.03	-0.18	-0.12	-0.20	-0.01	-0.11	-0.03	0.09	0.10
Druga diferenca	0.66	0.44	0.18	0.13	-0.04	0.06	-0.04	-0.03	0.01	0.01

Za ovu seriju u Primeru 7.7 utvrdili smo na osnovu grafika i korelograma da se može predstaviti  $AR(1)$  modelom kod koga je koeficijent  $\phi_1$  blizak jedinici. Na osnovu toga sledi da inverznom procesu odgovara  $MA(1)$  model. Zbog nestacionarnosti  $AR(1)$  modela prvobitnog procesa očekujemo da će  $MA(1)$  model inverznog procesa biti

neinvertibilan. Štaviše, zbog velike vrednost prvog inverznog autokorelacionog koeficijenta originalne vremenske serije:  $\hat{\rho}_1^{(1)} = -0.87$ , koja izlazi van intervala  $\pm 0.5$ , imamo "neprijatnu" situaciju da koeficijent  $\theta_1$  kod MA(1) modela nije čak ni realan (videti Odeljak 4.7.1).

Ukoliko smo pak seriju dvostruko diferencirali (jedanput više nego što je potrebno) dobićemo da su prva dva inverzna autokorelaciona koeficijenta statistički značajno različita od nule. Statistička značajnost ovih koeficijenata sugerise nam da seriji odgovara AR(2) model. Time ćemo kod prekomerno diferencirane serije identifikovati složeniji, manje ekonomičan model nego što je to stvarno potrebno. ■

Dakle, možemo u opštem slučaju reći da ukoliko je serija nestacionarna, ocenjena inverzna autokorelaciona funkcija imaće sve karakteristike autokorelacione funkcije neinvertibilnog procesa pokretnih proseka. Takode, ako je serija prekomerno diferencirana ocenjena inverzna autokorelaciona funkcija imaće sve karakteristike autokorelacione funkcije nestacionarnog procesa. Abraham (Abraham) i Ledolter (Lidolter) (1984) su pokazali da je uzoračka inverzna autokorelaciona funkcija, kao sredstvo za određivanja reda autoregresionog procesa, inferiornija u odnosu na parcijalnu autokorelacionu funkciju.

### 7.3.6 Ostali metodi određivanja reda procesa

Pored korišćenja obične, parcijalne i inverzne autokorelacione funkcije kao i kriterijuma za određivanje reda ARMA procesa u literaturi su predloženi i drugi postupci. Tako su Tsay (Cei) i Tiao (Tao) (1984) predložili postupak zasnovan na tzv. *proširenoj uzoračkoj autokorelacionoj funkciji* (engl. *extended sample autocorrelation function*). Osnovna ideja njihovog pristupa je u dobijanju konzistentnih ocena autoregresione komponente ARMA( $p, q$ ) modela, koja se zatim eliminiše iz podataka formiranjem transformisane serije. Zatim se utvrdi red MA komponente za transformisanu seriju na osnovu njene autokorelacione funkcije. Drugi pristup sugerišu Beguin (Bigun), Gourieroux (Gurijeru) i Montfort (Monfor) (1980) i poznat je pod nazivom *metod ugla* ili *corner metod* (engl. *corner method*). U bliskoj vezi sa ovim metodom je i metod *S- i R- površi* (engl. *S- i R- arrays*) autora Graya (Grej), Kelleya (Keli) i McIntirea (Mekintajer) (1978). Oba metoda su zasnovana na determinantama matrica čiji su elementi autokorelacioni koeficijenti. Vrednosti determinanti formiraju zatim dvodimenzionu šemu na osnovu koje određujemo red ARMA procesa. Svi navedeni metodi su računski dosta zahtevni, a istovremeno su im statističke osobine nedovoljno poznate. Retke uporedne studije ovih metoda (Koreisha i Yoshimoto (1991)) ukazuju na relativno slaba svojstva ova tri metoda u odnosu na kriterijume određivanja reda procesa koje smo izložili u Odeljku 7.3.4. Ovaj tvrdnja posebno važi u slučaju kratkih vremenskih serija kada raspoložemo do najviše 50 opservacija.



## 7.4 OCENJIVANJE KOEFICIJENATA MODELA

U prvoj etapi Box-Jenkinsovog iterativnog postupka identifikovali smo prethodni ARIMA model, odnosno odredili vrednosti  $p$ ,  $d$  i  $q$ . Zadatak druge etape jeste ocena sredine  $\mu = E(X_t)$ , varijanse  $\sigma^2 = E(\varepsilon_t^2)$  i koeficijenta  $\phi' = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p]$ ,  $\theta' = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q]$  u modelu:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)(X_t - \mu) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)\varepsilon_t, \quad (7.24)$$

gde je  $X_t$ ,  $t=1, 2, \dots, n$ , zabeležena kao stacionarna serija ili je to postala nakon odgovarajuće transformacije, a  $\varepsilon_t$  su nezavisne identično raspoređene slučajne promenljive sa normalnim rasporedom  $N(0, \sigma^2)$ .

U ovom poglavlju diskutovaćemo primenu metoda momenata, nelinearnih najmanjih kvadrata i najveće verodostojnosti u oceni modela (7.24).

### 7.4.1 Metod momenata

Metod momenata se često u literaturi iz vremenskih serija naziva i metod za dobijanje početnih ocena koeficijenta. Zasnovan je na izjednačavanju odgovarajućih teorijskih momenata koji su funkcija nepoznatih koeficijenta modela sa odgovarajućim realizovanim vrednostima uzoračkih momenata. Dobijeni sistem jednačina se zatim rešava po ocenjenim vrednostima nepoznatih koeficijenta modela. Napoznatiji primer primene metoda momenata jeste ocena sredine populacije  $\mu$ , uzoračkom sredinom  $\bar{X}$ . Istu ocenu koristimo i u analizi vremenskih serija za ocenu sredine stacionarnog procesa.

Razmotrimo prvo primenu metode momenata u oceni koeficijenta AR modela. U slučaju AR(1) modela na osnovu diferencne jednačine (4.41) imamo vezu  $\rho_1 = \phi_1$ . Prema metodu momenata  $\rho_1$  se izjednačava sa  $r_1$ , uzoračkim autokorelacionim koeficijentom na prvoj doznji, pa je ocena koeficijenta  $\phi_1$ :

$$\hat{\phi}_1 = r_1. \quad (7.25)$$

U slučaju AR(2) modela veza između koeficijenta  $\phi_1$  i  $\phi_2$  i momenata data je na osnovu izraza (4.57):  $\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1$  i  $\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2$ . Prema metodu momenata  $\rho_1$  se izjednačava sa  $r_1$ , a  $\rho_2$  sa  $r_2$  pa dobijamo  $r_1 = \phi_1 + \phi_2 r_1$  i  $r_2 = \phi_1 r_1 + \phi_2$ . Odavde se rešavanjem dobijaju ocene:

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1(1 - r_2)}{1 - r_1^2} \quad (7.26)$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2}. \quad (7.27)$$

U slučaju opšteg AR( $p$ ) modela veza između autokorelacionih koeficijenata  $\rho_k$  i koeficijenata modela  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  data je Yule-Walkerovim jednačinama (4.64). Prema metodi momenata  $\rho_k$  zamenjujemo sa  $r_k$ , uzoračim autokorelacionim koeficijentom na  $k$ -toj doznji. Da bismo dobili ocene  $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p$  rešavamo dobijene Yule-Walkerove jednačine.

Preostaje nam samo da ocenimo varijansu procesa belog šuma. U te svrhe na osnovu izraza (4.63) za ocenu varijanse AR( $p$ ) procesa dobijamo

$$\hat{\sigma}^2 = S^2(1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2 - \dots - \hat{\phi}_p r_p), \quad (7.28)$$

gde smo sa  $S^2$  označili uzoračku varijansu procesa  $\{X_t\}$  kao nepristrasnu ocenu nepoznate varijanse  $\gamma_0$ . Kako je za AR(1) model  $\hat{\phi}_1 = r_1$  iz (7.28) dobijamo  $\hat{\sigma}^2 = S^2(1 - r_1^2)$ .

Primena metode momenata za ocenu koeficijenata MA modela nije ni približno tako jednostavna kao u slučaju ocene AR modela. Da bismo pokazali sa kakvim se teškoćama suočavamo prilikom ocenjivanja MA modela poslužićemo se jednostavnim primerom. Za MA(1) proces prema izrazu (4.75) je  $\rho_1 = -\theta_1 / (1 + \theta_1^2)$ . Prema metodu momenata  $\rho_1$  zamenjujemo sa  $r_1$ , pa zatim dobijenu jednačinu

$$r_1 \theta_1^2 + \theta_1 + r_1 = 0 \quad (7.29)$$

rešavamo po  $\theta_1$ . Očito je da je u pitanju kvadratna jednačina čija su oba korena realna ako je  $|r_1| < 0.5$ . Međutim, samo jedan od njih zadovoljava uslov invertibilnosti, pa je ocena nepoznatog koeficijenta MA(1) modela po metodu momenata:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4r_1^2}}{2r_1}. \quad (7.30)$$

Ako je  $r_1 = \pm 0.5$  postoji jedinstveno realno rešenje jednačine (7.29) jednako  $\pm 1$ , ali koje očito nije invertibilno. Mada je u populaciji  $|\rho_1| < 0.5$ , moguće je da uzorački koeficijent bude van tog intervala, tj. da je  $|r_1| > 0.5$ . Tada ne postoji realno rešenje jednačine (7.29), pa metodom momenata nedobijamo ocenu od  $\theta_1$ . U tom slučaju dovodimo u sumnju specifikaciju MA(1) modela za posmatranu vremensku seriju.

Ocena sredine MA(1) procesa predstavlja sredina opservacija vremenske serije, a ocena varijanse procesa belog šuma je

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S^2}{1 + \hat{\theta}_1^2}. \quad (7.31)$$

Primena metode momenata na MA( $q$ ) modele, gde je  $q > 1$ , višestruko se usložnjava. U izrazu (4.83) kojim uspostavljamo vezu između koeficijenata MA( $q$ ) procesa i autokorelacionih koeficijenata zamenjujemo vrednosti  $\rho_k$  sa  $r_1$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ . Tako dobijamo  $q$  jednačina sa  $q$  nepoznatih koeficijenata. S obzirom da je dobijeni sistem jednačina nelinearan po koeficijentima, do njegovog rešenja dolazimo koristeći algoritme za numeričku optimizaciju. Kao i u slučaju ocenjivanja MA(1) modela i ovde se javljaju višestruka rešenja od kojih je samo jedno invertibilno. Iz navedenih razloga primena metoda momenata ne preporučuje se za ocenu MA modela.

Naposletku, na primeru ARMA(1,1) modela ilustrovaćemo primenu metoda momenata pri ocenjivanju ARMA modela. Prema izrazu (4.121) autokorelaciona funkcija ovog procesa je

$$\rho_k = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2} \phi_1^{k-1}. \quad (7.32)$$

Kako je  $\phi_1 = \rho_2 / \rho_1$ , možemo prvo oceniti  $\phi_1$ :  $\hat{\phi}_1 = r_2 / r_1$ , a zatim rešiti jednačinu:

$$r_1 = \frac{(\hat{\phi}_1 - \theta_1)(1 - \hat{\phi}_1\theta_1)}{1 - 2\hat{\phi}_1\theta_1 + \theta_1^2}, \quad (7.33)$$

da bismo dobili ocenu  $\hat{\theta}_1$ . Slično postupku kod MA(1) modela i ovde rešavamo kvadratnu jednačinu (7.33) po nepoznatom koeficijentu  $\theta_1$ , da bismo zadržali samo invertibilno rešenje. Kao i kod AR i MA procesa ocena sredine ARMA(1,1) procesa data je sredinom opservacija stacionarne vremenske serije, a ocena varijanse procesa belog šuma je

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1 - \hat{\phi}_1^2}{1 - 2\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_1^2} S^2. \quad (7.34)$$

Ocene metodom momenata obično se koriste kao početne ocene koeficijenata u iterativnom numeričkom postupku koji je u osnovi metoda nelinearnih najmanjih kvadrata i metoda najveće verodostojnosti.

## 7.4.2 Metod nelinearnih najmanjih kvadrata

Zbog teškoća sa kojima se suočavamo u primeni metoda momenata kod ARMA modela sa MA članovima, razmatramo i druge metode ocenjivanja. Prvi alternativni metod ocenjivanja koji se nameće jeste metod običnih najmanjih kvadrata.

Primena ovog metoda u slučaju AR modela je direktna. Jednostavno se vrednosti vremenske serije s docnjom posmatraju kao regresori u klasičnom regresionom modelu.

Od ranije je poznato<sup>6</sup> da ako su ispunjene pretpostavke o nekorelisanosti grešaka modela i njihove nezavisnosti od regresora, tada primenom metoda običnih najmanjih kvadrata u klasičnom regresionom modelu dobijamo nepristrasne i konzistentne ocene. Međutim, kod ARMA modela vremenskih serija to nije slučaj. Da bismo to pokazali posmatrajmo AR(1) model:  $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \xi_t$ , kod koga primenom metoda običnih najmanjih kvadrata dobijamo sledeću ocenu nepoznatog koeficijenta:

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum_{t=2}^n X_t X_{t-1}}{\sum_{t=2}^n X_{t-1}^2} = \frac{\sum_{t=2}^n (\phi_1 X_{t-1} + \xi_t) X_{t-1}}{\sum_{t=2}^n X_{t-1}^2} = \phi_1 + \frac{\sum_{t=2}^n \xi_t X_{t-1}}{\sum_{t=2}^n X_{t-1}^2}. \quad (7.35)$$

Neka je serija grešaka  $\xi_t = \varepsilon_t$ , odnosno radi se o procesu belog šuma. Tada je očekivana vrednost ocene date izrazom (7.35) jednaka nepoznatom koeficijentu  $\phi_1$ . Znači, ako serija grešaka predstavlja proces belog šuma tada je ocena običnih najmanjih kvadrata u AR modelu nepristrasna ocena nepoznatog koeficijenta. Štaviše, ova ocena je ekvivalentna oceni prvog autokorelacionog koeficijenta  $\hat{\rho}_1$ , za koju smo rekli da predstavlja konzistentnu ocenu populacionog autokorelacionog koeficijenta  $\rho_1$ , pa je stoga i ocena  $\hat{\phi}_1$  konzistentna ocena od  $\phi_1$ .

Međutim, ako serija  $\xi_t$  nije proces belog šuma, nego sledi na primer MA(1) proces:  $\xi_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ , tada polazni AR(1) model možemo drugačije napisati kao ARMA(1,1) model:  $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ . Ispitajmo da li je ocena običnih najmanjih kvadrata nepoznatog koeficijenta  $\phi_1$ , data izrazom (7.35) i dalje nepristrasna. Očigledno je očekivana vrednost proizvoda  $X_{t-1}$  i  $\xi_t$  u brojiocu poslednjeg razlomka u izrazu (7.35)  $E(X_{t-1} \xi_t) = -\theta_1 \sigma^2 \neq 0$ . Prema tome, pored toga što je napuštena pretpostavka o nekorelisanosti serije grešaka, jer serija  $\xi_t$  ne predstavlja proces belog šuma, imamo i da je serija grešaka modela korelisan za "regresorom" u modelu. Ova osobina modela vremenske serije protivureči pretpostavci klasičnog regresionog modela, pa stoga ocena koeficijenta  $\phi_1$  nije niti nepristrasna, a nije ni konzistentna.

Sumirajući izloženo u vezi primene metoda običnih najmanjih kvadrata na modele vremenskih serija možemo reći da ovaj metod daje nepristrasne i konzistentne ocene ako se radi o AR modelima. Međutim, u svim drugim slučajevima, odnosno kada imamo MA ili mešoviti ARMA model, tada ovaj metod daje pristrasne i nekonzistentne ocene nepoznatih koeficijenata. Zato se u ocenjivanju modela vremenskih serija umesto metoda običnih najmanjih kvadrata koristi metod nelinearnih najmanjih kvadrata.

Da bismo ilustrovali problem ocenjivanja MA modela metodom najmanjih kvadrata poslužićemo se jednostavnim MA(1) modelom:  $X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ . Na prvi pogled nije

<sup>6</sup> Videti na primer: Jovičić (1981, ss. 33-43).

jasno kako se ovaj model može oceniti metodom najmanjih kvadrata. Međutim, ako na osnovu ranije uspostavljene dualne veze između MA i AR modela, napišemo njegovu AR reprezentaciju:  $X_t = -\theta_1 X_{t-1} - \theta_1^2 X_{t-2} - \dots + \varepsilon_t$ , tada postaje očigledan postupak primene metode najmanjih kvadrata, zanemarujući za čas prisustvo beskonačnog broja "regresora" u takvom modelu. Istovremeno, postaje jasno da je polazni MA(1) model iskazan u AR obliku nelinearan po koeficijentu  $\theta_1$ .

Ocenu nepoznatog koeficijenta  $\theta_1$  predstavlja ona vrednost koeficijenta  $\theta_1$  koja minimizira funkciju uslovne sume kvadrata (engl. *conditional sum of squares function*):  $S(\theta_1) = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2$ , gde smo sa  $\varepsilon_t$  označili seriju reziduala MA(1) modela iskazanog u AR obliku. Ovi reziduali su funkcija nepoznatog koeficijenta, tj.  $\varepsilon_t = \varepsilon_t(\theta_1)$ . Čak i kod jednostavnih modela kakav je MA(1) model, zbog nelinearnosti modela za ocenjivanje uslovna suma kvadrata se ne može analitički minimizirati, nego se moramo koristiti metodama numeričke optimizacije.

Za datu vremensku seriju  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i konkretnu vrednost koeficijenta  $\theta_1$  možemo izračunati vrednost uslovne sume kvadrata. Izrazimo MA(1) model u sledećem obliku:  $\varepsilon_t = X_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ . Polazeći od početne vrednosti  $\varepsilon_0$ , na primer  $\varepsilon_0 = 0$ , na osnovu ovog izraza možemo rekurzivno izračunati vrednost reziduala  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ , a time i uslovnu sumu kvadrata. Ova suma kvadrata je uslovljena početnom vrednošću  $\varepsilon_0 = 0$  i izabranom vrednošću koeficijenta  $\theta_1$ . Navedeni postupak izračunavanja uslovne sume kvadrata možemo ponoviti za neku drugu određenu vrednost koeficijenta  $\theta_1$ . Tako kod jednostavnih modela kao što je ovaj, do ocene koeficijenta možemo doći pretraživanjem parametarskog prostora  $\theta_1 \in (-1, +1)$ , odnosno izračunavanjem sume kvadrata reziduala za određene vrednosti koeficijenta i izborom one vrednosti koja minimizira sumu kvadrata reziduala. Podsećamo da se u svim ovim slučajevima javlja problem izbora početne vrednosti  $\varepsilon_0$ . Njega smo rešavali tako što smo umesto  $\varepsilon_0$  stavljali očekivanu vrednost greške koja je jednaka nuli.

Za ocenjivanje koeficijenata opšteg MA( $q$ ) ili mešovitog ARMA( $p, q$ ) modela sugerise se primena jednog od algoritama numeričke optimizacije, kao što je Gauss-Newtonov algoritam. Ilustrirajmo primenu ovog algoritma na primeru MA(1) modela. Suština ovog pristupa je u aproksimaciji funkcije  $\varepsilon_t = \varepsilon_t(\theta_1)$  linearnom funkcijom nepoznatog koeficijenta  $\theta_1$  korišćenjem Taylorovog razvoja funkcije oko početne ocene, recimo  $\theta_1^*$ . Znači da funkciju  $\varepsilon_t(\theta_1)$  pišemo u obliku

$$\varepsilon_t(\theta_1) \approx \varepsilon_t(\theta_1^*) + (\theta_1 - \theta_1^*) \frac{d\varepsilon_t(\theta_1^*)}{d\theta_1}. \quad (7.36)$$

Za MA(1) model koji koristimo kao ilustraciju, vrednost izvoda funkcije po nepoznatom koeficijentu možemo izraziti rekurzivno, diferencirajući izraz:  $\varepsilon_t = X_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ , tako da je

$$\frac{d\varepsilon_t(\theta_1)}{d\theta_1} = \frac{\theta_1 d\varepsilon_{t-1}(\theta_1)}{d\theta_1} + \varepsilon_{t-1}(\theta_1), \quad (7.37)$$

sa početnom vrednošću  $d\varepsilon_0(\theta_1)/d\theta_1$ . Pošto je aproksimacija (7.36) linearna po nepoznatom koeficijentu, suma kvadrata računata na osnovu nje može se analitički minimizirati da bi se dobila nova ocena od  $\theta_1$ . Ovaj iterativni postupak se nastavlja, uz zamenu vrednosti  $\theta_1^*$  novom ocenom, a završava kada razlika između ocena ili sume kvadrata reziduala u dve uzastopne iteracije bude dovoljno mala.

Ocena opšteg MA( $q$ ) ili mešovitog ARMA( $p, q$ ) modela zahteva primenu višedimenzionog Gauss-Newtonovog algoritma. Dva su elementa zajednička kod svih modela bez obzira na broj koeficijenata koji se ocenjuju metodom nelinearnih najmanjih kvadrata. Prvi element tiče se izbora početnih vrednosti koeficijenata da bi se započeo numerički iterativni postupak Gauss-Newtonovog tipa. Ove početne vrednosti, kao što je ranije istaknuto, možemo odrediti korišćenjem metoda momenta.

Drugi element odnosi se na tretman početne vrednosti grešaka kod MA modela i početne vrednosti grešaka i opservacija vremenske serije kod ARMA modela. Da bi se izračunala uslovna suma kvadrata kod MA modela, istaknuto je da se koristi očekivana vrednost grešaka u početnom periodu. Na primeru ARMA(1,1) modela ukažimo na dodatne zahteve u pogledu početnih uslova koji se javljaju kod ovih modela. Osnovni zadatak ostaje neizmenjen. Naime, na osnovu funkcije  $\varepsilon_t = \varepsilon_t(\phi_1, \theta_1)$  želimo minimizirati uslovnu sumu kvadrata:  $S(\phi_1, \theta_1) = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2$ . Slično kao kod MA(1) modela, ARMA(1,1) model pišemo u obliku:  $\varepsilon_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ . Na osnovu opservacija date vremenske serije možemo za izabrane vrednosti  $\phi_1$  i  $\theta_1$  izračunati rezidualne, a zatim traženu vrednost sume kvadrata. Međutim, da bismo to mogli uraditi potrebno je da rešimo problem početne vrednosti  $\varepsilon_0$  i  $X_0$ . Što se prvog dela problema tiče, njega rešavamo kao i kod MA(1) modela, tako što vrednost greške izjednačavamo sa njenom očekivanom vrednošću. Za nultu opservaciju vremenske serije  $X_0$  uzimamo da je jednaka nuli, a ako je u model uključena i konstanta onda sredini svih opservacija. Pri tome se pretpostavlja da je ovaj izbor početnih vrednosti od marginalnog uticaja na konačnu ocenu koeficijenata.

### 7.4.3 Metod najveće verodostojnosti

Najčešće korišćeni metod ocenjivanja koeficijenata ARMA modela, posebno kada raspolažemo relativno kratkim vremenskim serijama, jeste metod najveće verodostojnosti. Prva prednost metode najveće verodostojnosti je upravo u tome što koristi svu raspoloživu informaciju sadržanu u vremenskoj seriji, a ne samo prva dva momenta kao u slučaju metode momenata. Druga prednost ove metode je u tome što se mogu koristiti mnogi poznati asimptotski rezultati koji važe pod relativno opštim uslovima.

Da bismo izložili ovaj metod i ukazali na probleme u njegovoj primeni, definisaćemo združenu funkciju gustine verovatnoće vremenske serije. U tom cilju posmatrajmo stacionarni i invertibilni ARMA( $p, q$ ) model:

$$X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \dots + \phi_p(X_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}. \quad (7.38)$$

Za elemente procesa belog šuma  $\{\varepsilon_t\}$  pretpostavljamo da su međusobom nezavisni i da je  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ . Združena funkcija gustine verovatnoće od  $\varepsilon' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  je

$$P(\varepsilon | \phi, \mu, \theta, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2\right], \quad (7.39)$$

gde je  $\phi' = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$  i  $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$ . Ako ARMA( $p, q$ ) model napišemo u obliku:

$$\varepsilon_t = \theta_1\varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q} + (X_t - \mu) - \phi_1(X_{t-1} - \mu) - \dots - \phi_p(X_{t-p} - \mu), \quad (7.40)$$

tada možemo napisati združenu funkciju gustine verovatnoće od  $\mathbf{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Ona je ekvivalentna funkciji verodostojnosti koeficijenata  $(\phi, \mu, \theta, \sigma^2)$  i prema Newboldu (1974) je možemo napisati u obliku:

$$L(\phi, \mu, \theta, \sigma^2 | \mathbf{X}) = g_1(\phi, \mu, \theta, \sigma^2) \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} S(\phi, \mu, \theta)\right], \quad (7.41)$$

gde je  $g_1$  funkcija nepoznatih koeficijenata, a

$$S(\phi, \mu, \theta) = \sum_{t=1-p-q}^n E(u_t | \omega)^2 \quad (7.42)$$

predstavlja *bezuslovnu sumu kvadrata* (engl. *unconditional sum of squares*). Funkcija  $L$  naziva se *bezuslova funkcija verodostojnosti* (engl. *unconditional likelihood function*). Ovde je  $\omega = (\mathbf{X}, \phi, \mu, \theta, \sigma^2)$ , pa je  $E(u_t | \omega)$  uslovna očekivana vrednost od  $u_t$  za date opservacije vremenske serije i nepoznate koeficijente modela. Proces  $\{u_t\}$  je

$$u_t = \begin{cases} \varepsilon_t & t = 1, 2, \dots, n \\ g_2(\mathbf{X}^*, \varepsilon^*) & t \leq 0 \end{cases}, \quad (7.43)$$

gde smo sa  $g_2$  označili linearnu funkcija početnih vrednosti  $\mathbf{X}^* = (X_{1-p}, \dots, X_{-1}, X_0)$  i  $\varepsilon^* = (\varepsilon_{1-q}, \dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0)$ , koje su potrebne za izračunavanje  $\varepsilon$ . Funkcije  $g_1$  i  $g_2$  su specifične za svaki ARMA model, a sama funkcija verodostojnosti je izvedena za neke posebne slučajeve (Abraham i Ledolter (1983)).

Maksimiziranjem funkcije (7.41) dobijamo bezuslovne ocena najveće verodostojnosti nepoznatih koeficijenata. Međutim, u opštem se slučaju direktno analitičko rešenje ne može odrediti. Zato se koriste brojni algoritmi čijim korišćenjem dobijamo numerički

dovoljno tačna aproksimativna rešenja. Ali, čak i u tim slučajevima prisustvo funkcije  $g_1$  otežava maksimiziranje funkcije verodostojnosti. S druge strane, potrebno je odrediti u početnom periodu uslovnu očekivanu vrednost u izrazu (7.42), što sa svoje strane zahteva određivanje grešaka modela i opservacija vremenske serije u početnom periodu. U tom smislu učinjeno je nekoliko aproksimacija osnovnog pristupa bezuslovne najveće verodostojnosti, a takođe je definisano nekoliko postupaka kojima se na različit način tretira problem grešaka i opservacija u početnom periodu. Obično se zanemaruje funkcija  $g_1$  i maksimizira izraz  $\exp[-1/2\sigma^2 S(\phi, \mu, \theta)]$ , ili što je ekvivalentno, minimizira  $S(\phi, \mu, \theta)$ , čime dolazimo do ocena po metodu najmanjih kvadrata. Ova aproksimacija daje zadovoljavajuće rezultate osim u slučajevima da je vrednost koeficijenata bliska granicama invertibilnosti.

Dva su načina određivanja uslovne očekivane vrednosti u izrazu (7.42). Prema prvom, nepoznate vrednosti vremenske serije u početnom periodu zamenjujemo sredinom raspoloživih opservacija vremenske serije, a početne vrednosti grešaka njihovim očekivanim vrednostima koje su jednake nuli. Ovaj pristup smo koristili kod metoda nelinearnih najmanjih kvadrata. Tako dobijenu sumu kvadrata nazvali smo *uslovna suma kvadrata*. Njenim minimiziranjem dobili smo ocene koeficijenata poznate pod imenom *ocene po metodu uslovnih najmanjih kvadrata*.

Drugi način tretiranja početnih vrednosti predložili su Box i Jenkins (1976). Njihov pristup zasnovan je na prognoziranju početnih opservacija vremenske serije na osnovu samog modela, da bi se potom izračunale greške u početnom periodu. Naime, na osnovu početnih ocena koeficijenata modela, model koristimo za *prognoziranje unazad* (engl. *backforecasting* ili kraće *backcasting*). Tako određenim početnim opservacijama i greškama definišemo tzv. *bezuslovnu sumu kvadrata*, a njenim minimiziranjem dobijamo ocene poznate pod imenom *ocene po metodu bezuslovnih najmanjih kvadrata*. Znači da su bezuslovne ocene najveće verodostojnosti ekvivalentne bezuslovnim ocenama najmanjih kvadrata. Bez obzira na način tretiranja početnih vrednosti, na osnovu izraza (7.42) možemo izračunati sumu kvadrata reziduala, a potom dati ocenu varijanse procesa belog šuma deleći dobijenu sumu kvadrata reziduala odgovarajućim brojem stepeni slobode.

**Primer 7.10** Za sledeće godišnje vremenske serije SR Jugoslavije: nezaposlenost (serija S4), realni društveni proizvod (serija S5), vrednost osnovnih sredstava privrede društvenog sektora (serija S7) i ukupan broj završenih stanova (serija S8), identifikovani su prethodni ARIMA modeli u Primerima 7.6-7.9. Oceniti identifikovane modele.

Korišćenjem programa *RATS 3.0* dobili smo sledeće ocene ARIMA modela za četiri vremenske serije.

*Nezaposlenost* (serija S4). Ocena dva predložena modela dala je sledeće rezultate:



$$(1 - \underset{(0.197)}{0.7365} B + \underset{(0.195)}{0.3385} B^2)(1 - B)X_t = \underset{(5124.29)}{22072.62} + \varepsilon_t, \hat{\sigma} = 15686, \quad (7.13')$$

$$(1 - \underset{(0.196)}{0.0652} B + \underset{(0.196)}{0.3532} B^2)(1 - B)X_t = \varepsilon_t, \hat{\sigma} = 17738, \quad (7.14')$$

gde vrednosti u zagradama ispod ocene koeficijenata predstavljaju standardne greške tih ocena. Na osnovu prezentiranih rezultata očigledno je da drugi model ima znatno veću standardnu grešku ocene od prvog, a s druge strane koeficijent  $\phi_1$  nije statistički značajno različit od nule. Prema tim kriterijumima drugi model je inferiorniji u odnosu na prvi model. Oba koeficijenta u AR polinomu kod prvog modela kao i konstanta statistički su značajno različita od nule na nivou značajnosti od 5%. Ponovna ocena drugog modela bez koeficijenta  $\phi_1$  nije dovela do značajnije izmeni u odnosu na polazni model. On je ostao i dalje inferiorniji u odnosu na prvi model.

**Društveni proizvod** (serija S5). Ocena tri predložena modela dala je sledeće rezultate:

$$(1 - \underset{(0.170)}{0.2667} B - \underset{(0.192)}{0.6901} B^2)(1 - B)X_t = \underset{(1007.9)}{-116.801} + \varepsilon_t, \hat{\sigma} = 44.39 \quad (7.15')$$

$$(1 - \underset{(0.137)}{0.2277} B - \underset{(0.139)}{0.6375} B^2)(1 - B)X_t = \varepsilon_t, \hat{\sigma} = 43.86 \quad (7.15'')$$

$$(1 - \underset{(0.112)}{0.7060} B)(1 - B)^2 X_t = \varepsilon_t, \hat{\sigma} = 43.67 \quad (7.16')$$

Očigledno da konstanta u prvom modelu nije statistički značajno različita od nule, pa je druga formulacija modela za vremensku seriju društvenog proizvoda odgovarajuća. Dva koeficijenta u modelu (7.15'') statistički su značajno različita od nule. Treći model ima manju standardnu grešku ocene od drugog modela, visoko značajnu ocenu koeficijenta, pa je sa stanovišta navedenih statističkih kriterijuma i principa ekonomičnosti u prednosti pred drugim modelom.

**Osnovna sredstva** (serija S7). Ocena dva predložena modela dala je sledeće rezultate:

$$(1 - \underset{(0.102)}{0.7474} B)(1 - B)X_t = \underset{(15.72)}{96.6139} + \varepsilon_t, \hat{\sigma} = 24.36 \quad (7.17')$$

$$(1 + \underset{(0.159)}{0.2652} B)(1 - B)^2 X_t = \varepsilon_t, \hat{\sigma} = 25.15. \quad (7.18')$$

Prema izloženim rezultatima oba modela imaju visoko statistički značajne koeficijente, ali prvi model ima manju standardnu grešku ocene, pa je prema kriterijumu minimalne standardne greške ocene u prednosti pred drugim modelom.

*Završeni stanovi* (serija S8). Ocena predloženog modela dala je sledeći rezultat:

$$(1 - 0.9991B)X_t = \varepsilon_t, \hat{\sigma} = 5176.78.$$

Koeficijent je blizak jedinici što sugeriše da je originalnu seriju potrebno diferencirati radi postizanja stacionarnosti, odnosno da ova serija predstavlja proces slučajnog hoda bez konstante.

Korišćenjem kriterijuma za izbor modela za seriju prvih diferenci završenih stanova predložen je model ARMA(1,1). Ocenimo predloženi model bez obzira na sugestiju korelograma prvih diferenci (Slika 7.5(d)) koji ukazuje na to da je u pitanju proces belog šuma.

Interesantno je izložiti rezultate dobijene korišćenjem sva tri programska paketa (*RATS 3.0*, *Statgraphics 4.2* i *Micro TSP 6.0*), s obzirom na to da je specifikovan neodgovarajući model. U takvom slučaju korišćeni programi daju znatno različite rezultate, što nam sugeriše da nešto sa specifikacijom modela nije u redu. Korišćenjem programa *RATS 3.0* dobijen je ocenjeni model:

$$(1 + \underset{(0.089)}{1.0618B})(1 - B)X_t = (1 - \underset{(0.257)}{1.3499B})\varepsilon_t, \hat{\sigma} = 4446.66.$$

Nažalost, Gauss-Newtonov algoritam koji se koristi u ovom programu ni posle 20 iteracija nije konvergirao ka konačnoj oceni. Prikazane ocene su iz te poslednje 20. iteracije. Ocene koeficijenata sugerišu da je model nestacionaran i neinvertibilan, a koeficijenti su statistički značajni.

Korišćenjem programa *Statgraphics 4.2* dobijen je ocenjeni model:

$$(1 - \underset{(3.168)}{0.0367B})(1 - B)X_t = (1 + \underset{(3.145)}{0.0325B})\varepsilon_t, \hat{\sigma} = 5240.39.$$

Program *Statgraphics 4.2* koristi osnovni Marquardtov algoritam nelinearnih najmanjih kvadrata. Pri ocenjivanju modela nismo koristili opciju ocenjivanja unazad. Na osnovu ocenjenog modela uočavamo da su koeficijenti neprecizno ocenjeni i kao takvi nisu statistički značajno različiti od nule. Čak i da je model preciznije ocenjen dobijene ocene kod AR i MA polinoma su približno jednake međusobom. Ovo je u suprotnosti sa pretpostavkom ARMA modela kojom se zahteva da AR i MA polinomi nemaju zajedničkih korena. Znači da bi se podelom ocenjenog modela zajedničkim polinomom, gornji model sveo na model procesa slučajnog hoda.

Korišćenjem programa *Micro TSP 6.0* dobijen je ocenjeni model:

$$(1 + \underset{(0.432)}{0.7535B})(1 - B)X_t = (1 - \underset{(0.448)}{0.9356B})\varepsilon_t, \hat{\sigma} = 5028.03.$$

Za program *Micro TSP 6.0* nije u dokumentaciji naveden algoritam koji se koristi pri ocenjivanju. Nakon 10 iteracija dobijen je ocenjeni model koji ispunjava uslov stacionarnosti i invertibilnosti. Ocene su statistički značajne. Za AR i MA polinom se ne može reći da imaju zajednički koren, što bi u suprotnom slučaju svelo ocenjeni model na model procesa slučajnog hoda.

Zaključujemo na osnovu izloženih rezultata za ARIMA model vremenske serije završenih stanova da se u slučaju loše specifikacije modela mogu javiti problemi pri njegovom ocenjivanju: nepreciznost ocena i neispunjenje uslova stacionarnosti i invertibilnosti. ■

Na kraju ovog poglavlja posvećenog ocenjivanju koeficijenata ARMA modela ukažimo na neke osobine dobijenih ocena. Pokazano je da se modifikacijom standardne teorije najveće verodostojnosti mogu ispitati asimptotske osobine dobijenih ocena koeficijenata ARMA modela<sup>7</sup>. Za velike uzorke, ocene najveće verodostojnosti i ocene najmanjih kvadrata (uslovan i bezuslovan metod) aproksimativno su nepristrasne i imaju normalan raspored. Za karakteristične slučajeve ARMA modela navedimo varijanse i korelacije među ocenama koeficijenata:

$$\text{AR}(1): \text{Var}(\hat{\phi}_1) \approx \frac{1-\phi_1^2}{n}, \quad (7.44)$$

$$\text{AR}(2): \text{Var}(\hat{\phi}_1) \approx \text{Var}(\hat{\phi}_2) \approx \frac{1-\phi_2^2}{n}. \quad \text{Corr}(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) \approx -\frac{\phi_1}{1-\phi_2} = -\rho_1, \quad (7.45)$$

$$\text{MA}(1): \text{Var}(\hat{\theta}_1) \approx \frac{1-\theta_1^2}{n}, \quad (7.46)$$

$$\text{MA}(2): \text{Var}(\hat{\theta}_1) \approx \text{Var}(\hat{\theta}_2) \approx \frac{1-\theta_2^2}{n}, \quad \text{Corr}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \approx -\frac{\theta_1}{1-\theta_2}, \quad (7.47)$$

$$\begin{aligned} \text{ARMA}(1,1): \text{Var}(\hat{\phi}_1) &\approx \frac{1-\phi_1^2}{n} \left( \frac{1-\phi_1\theta_1}{\phi_1-\theta_1} \right)^2, \quad \text{Var}(\hat{\theta}_1) \approx \frac{1-\theta_1^2}{n} \left( \frac{1-\phi_1\theta_1}{\phi_1-\theta_1} \right)^2 \\ \text{Corr}(\hat{\phi}_1, \hat{\theta}_1) &\approx \frac{\sqrt{(1-\phi_1^2)(1-\theta_1^2)}}{1-\phi_1\theta_1}. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Kada se vrednost koeficijenta  $\phi_1$  približava granicama stacionarnosti varijansa ocene koeficijenta kod AR(1) modela se smanjuje. Interesantno je istaći da i pored toga što je AR(1) model specijalan slučaj AR(2) modela, ocena koeficijenata  $\phi_1$  biće nepreciznija ako seriji prilagodavamo AR(2) model, a ustvari je  $\phi_2 = 0$ . Sličan komentar može se

<sup>7</sup> Videti na primer: Box i Jenkins (1976, ss. 278-284).

dati u slučaju kada vršimo prilagođavanje MA(2) modela seriji za koju je tačan MA(1) model. U slučaju ARMA(1,1) modela kada su koeficijenti  $\phi_1$  i  $\theta_1$  približno jednaki međusobno, varijansa ocene oba koeficijenta može uzeti veoma velike vrednosti. Naposletku, u slučaju AR(2), MA(2) i ARMA(1,1) modela ocene koeficijenata mogu biti visoko korelisane čak i u velikim uzorcima. Svi navedeni pokazatelji dodatno ukazuju na teškoće izgradnje adekvatnog ARIMA modela.

Uporedna analiza različitih metoda ocenjivanja (Ansley (Enzli) i Newbold (1980)) sugeriše da u malim uzorcima prednost treba dati metodi najveće verodostojnosti, posebno kada se vrednost koeficijenata modela približavaju granicama invertibilnosti. Ako vrednost koeficijenata nije bliska granicama invertibilnosti tada metod uslovnih najmanjih kvadrata i najveće verodostojnosti daju slične rezultate, odnosno metodi su podjednako kvalitetni. Za finalnu ocenu koeficijenata ne preporučuje se korišćenje metoda momenata i bezuslovnih najmanjih kvadrata. Kod ocenjivanja varijanse procesa belog šuma metod uslovnih najmanjih kvadrata pokazuje tendenciju precenjivanja, a metod bezuslovnih najmanjih kvadrata podcenjivanja prave vrednosti.

## 7.5 PROVERA ADEKVATNOSTI MODELA

Kao što je ranije istaknuto gradnja modela vremenske serije predstavlja jedan iterativan proces. Započinjemo ga identifikacijom modela i ocenom koeficijenata. Zatim sledi provera adekvatnosti modela, faza u kojoj se proverava da li su ispunjene pretpostavke modela. Osnovna pretpostavka jeste da je  $\{\varepsilon_t\}$  proces belog šuma. To znači da su  $\varepsilon_t$  nekorelisane slučajne greške sa sredinom nula i konstantnom varijansom. U cilju utvrđivanja neadekvatnosti izabranog modela vremenske serije, na osnovu ocenjenog modela pažljivo analiziramo dobijenu seriju reziduala  $\hat{\varepsilon}_t$ , tj. ocene procesa belog šuma  $\varepsilon_t$ .

Histogram standardizovanih reziduala ( $\hat{\varepsilon}_t / \hat{\sigma}$ ) može poslužiti za prvu proveru normalne raspoređenosti reziduala. Zatim se na osnovu dobijenog histograma korišćenjem  $\chi^2$ -testa može testirati hipoteza da su standardizovani reziduali raspoređeni po normalnom standardizovanom rasporedu. Takođe, na osnovu grafika reziduala može se utvrditi da li se odstupilo od pretpostavljene konstantnosti reziduala.

Proveru da ocenjeni reziduali predstavljaju proces belog šuma možemo bazirati na izračunatoj uzoračkoj, običnoj ili parcijalnoj autokorelacionoj funkciji reziduala. Provera se sastoji u testiranju statističke značajnosti svakog pojedinačnog koeficijenta. Naposletku ispitivanje adekvatnosti modela vrši se ocenom opštijeg modela i proverom njegovih osobina u odnosu na izabrani model.

### 7.5.1 Portmanteau test

Na osnovu ocenjene uzoračke, obične i parcijalne autokorelacione funkcije testiramo hipotezu o vrednosti odgovarajućih autokorelacionih koeficijenata. Ako je tačna hipoteza

da serija reziduala predstavlja proces belog šuma njeni autokorelacioni koeficijenti na svim dočnjama trebalo bi da budu jednaki nuli. Statistički postupak je baziran na izračunatim autokorelacionim koeficijentima i njihovoj standardnoj grešci koja je prema najgrubljoj aproksimaciji jednaka  $1/\sqrt{n}$ .

Pored testiranja statističke značajnosti individualnih autokorelacionih koeficijenata, za testiranje hipoteze da su svi autokorelacioni koeficijenti reziduala istovremeno jednaki nuli, odnosno da ocenjeni reziduali slede proces belog šuma, definisana je i statistika testa koja uzima u obzir veličinu svih autokorelacionih koeficijenata reziduala. Box i Pierce (Pirs) (1970) su predložili statistiku

$$Q = n \sum_{k=1}^K \hat{\rho}_k^2 \quad (7.49)$$

kojom testiramo nultu hipotezu da su svi autokorelacioni koeficijenti jednaki nuli, tj.  $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_K = 0$ , protiv alternativne hipoteze da je bar jedan autokorelacioni koeficijent različit od nule. Oni su pokazali, da ako je ocenjen korektan model  $ARMA(p, q)$ , tada za veliko  $n$ ,  $Q$  ima aproksimativno  $\chi^2$ -raspored sa  $K - p - q$  stepeni slobode. Prilagodavanje pogrešno specifikovanog modela podacima uzrokuje povećanje statistike  $Q$ . Tako će opšti ili, kako ga još nazivaju, *portmanteau* test odbaciti  $ARMA(p, q)$  model ako ocenjena vrednost  $Q$  statistike prevazilazi odgovarajuću kritičnu vrednost  $\chi^2$ -rasporeda sa  $K - p - q$  stepeni slobode. Ukoliko u modelu imamo i konstantu tada se ovaj broj stepeni slobode umanjuje za jedan. Maksimalan broj autokorelacionih koeficijenata  $K$ , bira se tako da  $\psi_j$ -ponderi budu zanemarljivi za  $j > K$ . U praktičnoj primeni to znači da se preporučuje izbor  $K = \sqrt{n}$ .

Asimptotski  $\chi^2$ -raspored  $Q$  statistike zasnovan je na graničnoj teoremi kada  $n \rightarrow \infty$ . Međutim, Ljung (Ljung) i Box (1978) su pokazali da čak i za  $n = 100$ , aproksimacija  $\chi^2$ -rasporeda nije zadovoljavajuća. Rezultat toga je da češće prihvatamo kao korektan model i onaj koji to nije, nego što nam nominalan nivo značajnosti sugeriše. Stoga su predložili modifikaciju  $Q$  statistike da bi njen raspored pod nultom hipotezom bio bliži  $\chi^2$ -rasporedu. Ova *modifikovana Box-Pierceova statistika* (ili *Ljung-Boxova statistika*) je

$$Q^* = n(n+2) \sum_{k=1}^K \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}. \quad (7.50)$$

Kako je  $(n+2)/(n-k) > 1$  imamo da je  $Q < Q^*$ , što delimično objašnjava zašto originalna  $Q$  statistika teži da previdi neadekvatne modele.

**Primer 7.11** Proveriti adekvatnost ocenjenih modela iz Primera 7.10 testiranjem značajnosti pojedinačnih autokorelacionih i parcijalnih autokorelacionih koeficijenata kao i korišćenjem Box-Pierceove statistike.

*Društveni proizvod* (serija S5). U Tabeli 7.9 dati su autokorelacioni i parcijalni autokorelacioni koeficijenti serije reziduala ARIMA(2,1,0) modela čija je ocenjena forma data izrazom (7.15"). Na osnovu serije reziduala izračunata je vrednost  $Q$  i  $Q^*$  statistika koje su takođe prikazane u tabeli.

**Tabela 7.9** Autokorelacioni i parcijalna autokorelacioni koeficijenti ARIMA(2,1,0) modela serije društvenog proizvoda

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{\rho}_k$	-0.05	-0.07	0.10	-0.12	0.08	-0.03	0.15	-0.01	0.03	0.14
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.05	-0.07	0.09	-0.11	0.08	-0.05	0.19	-0.04	0.09	0.09
$Q$	0.09	0.26	0.63	1.14	1.35	1.38	2.19	2.20	2.22	2.96
$Q^*$	0.10	0.29	0.71	1.31	1.57	1.60	2.66	2.67	2.70	3.78

Kako je broj opservacija  $n=37$ , to 95% interval poverenja autokorelacionih koeficijenata je  $\pm 0.32$ . Upoređivanjem autokorelacionih koeficijenata iz Tabele 7.9 sa granica intervala poverenja zaključujemo da ni jedan od autokorelacionih i parcijalnih autokorelacionih koeficijenata nije statistički značajno različit od nule. Dakle, prema kriterijumu statističke značajnosti pojedinačnih koeficijenata sugerise nam se da je model ARIMA(2,1,0) odgovarajući model za vremensku seriju društvenog proizvoda.

Do istog zaključka dolazimo korišćenjem Box-Pierceove statistike. Kako je broj ocenjenih koeficijenata jednak 2, to je za  $K=10$  i nivo značajnosti  $\alpha=0.05$  kritična vrednost statistike testa:  $\chi_{K-p-q;\alpha}^2 = \chi_{8;0.05}^2 = 15.507$ . Očito je da je izračunata vrednost  $Q$  i  $Q^*$  statistike manja u poređenju sa kritičnom vrednošću, što na nivou značajnosti od 5% ukazuje na adekvatnost ocenjenog modela. Uključivanje većeg broja autokorelacionih koeficijenata serije reziduala ocenjenog modela u izraze (7.49) i (7.50) ne menja naš zaključak. Tako je  $Q_{18} = 9.18$ , što je na nivou značajnosti od 5% manje od odgovarajuće kritične vrednosti koja iznosi:  $\chi_{18;0.05}^2 = 28.869$ .

*Nezaposlenost* (serija S4). Za model (7.13') vrednost  $Q_{10}$  statistike je 3.91, a  $Q_{10}^* = 5.46$ . Na nivou značajnosti  $\alpha=0.05$  kritična vrednost testa je  $\chi_{7;0.05}^2 = 14.067$ . Kako je uzračunata vrednost manja od kritične ne odbacuje se hipoteza da je za seriju prvih diferenci broja nezaposlenih model ARIMA(2,1,0) sa konstantom adekvatan model. Drugim rečima ne odbacujemo hipotezu da je serija reziduala tog modela proces belog šuma.

*Osnovna sredstva* (serija S7). Ocena modela ARIMA(1,1,0) sa konstantom data je izrazom (7.17'). *Portmanteau* test dao je sledeće vrednosti:  $Q_{10} = 4.68$ ,  $Q_{10}^* = 5.62$ , a kritična vrednost testa je  $\chi_{8;0.05}^2 = 15.507$ , pa se za seriju prvih diferenci vrednosti osnovnih sredstava ne odbacuje hipoteza da je model ARIMA(1,1,0) sa konstantom adekvatan. ■

## 7.5.2 Dodavanje novih koeficijenata

Dodavanje novih koeficijenata, odnosno *proširivanje prvobitnog modela* (engl. *overfitting*) predstavlja jedno od sredstava za proveru adekvatnosti modela. Nakon što smo specifikovali i ocenili model za koji predpostavljamo da predstavlja adekvatan model naše vremenske serije, prilagođavamo opštiji model, odnosno model koji sadrži originalni model kao svoj specijalan slučaj. Neka smo na primer, za našu vremensku seriju identifikovali MA(2) model. Ovaj model ćemo proširiti dodajući novi koeficijent, tj. prilagođićemo podacima MA(3) model. Adekvatnost MA(2) modela potvrdiće se ako: a) ocena dodatog koeficijenta  $\theta_3$  nije statistički značajno različita od nule, i b) ocene koeficijenata  $\theta_1$  i  $\theta_2$  ne menjaju se značajno u odnosu na njihove prvobitne vrednosti.

Pri uopštavanju ma kog ARMA( $p, q$ ) modela mora se voditi računa i o problemu prisustva *zajedničkih faktora* (engl. *common factors*). Ova pojava dovodi do nemogućnosti identifikovanja modela, a s druge strane, ukoliko se previdi, unosi dodatne probleme kod ocenjivanja modela. Da bi se upoznali sa ovim problemom poslužićemo se sledećim primerom.

Posmatrajmo ARMA(1,1) model:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}. \quad (7.51)$$

Ako u ovom modelu stavimo  $t = t-1$  dobićemo:

$$X_{t-1} = \phi_1 X_{t-2} + \varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2}. \quad (7.52)$$

Pomnožimo izraz (7.52) proizvoljnom konstantom  $c$  i oduzmimo ga od izraza (7.51). Nakon sređivanja dobićemo

$$X_t - (c + \phi_1)X_{t-1} + c\phi_1 X_{t-2} = \varepsilon_t - (c + \theta_1)\varepsilon_{t-1} + c\theta_1 \varepsilon_{t-2}, \quad (7.53)$$

što znači da je dobijen ARMA(2,2) model. Međutim, uočiti da je

$$(1 - \phi_1 B)(1 - cB) = 1 - (c + \phi_1)B + c\phi_1 B^2, \quad (7.54)$$

odnosno da je

$$(1 - \theta_1 B)(1 - cB) = 1 - (c + \theta_1)B + c\theta_1 B^2. \quad (7.55)$$

To znači da su AR i MA polinomi u ARMA(2,2) modelu dobijeni na osnovu odgovarajućih polinoma originalnog ARMA(1,1) modela tako što smo ih pomnožili

zajedničkim faktorom  $(1-cB)$ . Mada vremenskoj seriji odgovara ARMA(2,2) model koeficijenti tog modela nisu jednoznačno određeni pošto je  $c$  proizvoljno. Ako je tačan model ARMA(1,1), a mi smo ocenili ARMA(2,2) model, ocene koeficijenata znatno će varirati. Nalazimo se u paradoksalnoj situaciji da čak i ne znamo šta u stvari ocenjujemo. Ilustracija ovog problema data je u Primeru 7.10, kada smo ocenjivali ARMA(1,1) model za seriju prvih diferenci broja završenih stanova, mada posmatrana serija broja završenih stanova predstavlja proces slučajnog hoda bez konstante.

**Primer 7.12** Za seriju broja nezaposlenih (serija S4) identifikovan je i ocenjen model ARIMA(2,1,0) sa konstantom. Proveru njegove adekvatnosti možemo obaviti tako što ćemo proširiti model. Prvo ćemo proširiti model dodajući još jedan AR član, a zatim ćemo proširiti prvobitni model dodajući MA član. Prema izmetim sugestijama sve proširene modele ocenili smo korišćenjem programa *RATS 3.0*, a dobijene rezultate prikazali u Tabeli 7.10.

**Tabela 7.10** Provera adekvatnosti ARIMA(2,1,0) modela proširenjem polazanog modela

Model	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\theta_0$	$\theta_1$	$\hat{\sigma}$	$Q_{10}$	$Q_{10}^*$
ARIMA(2,1,0)	0.7365 (0.197)	-0.3385 (0.195)		22073 (5124)		15686	3.91	5.46
ARIMA(3,1,0)	0.7481 (0.213)	-0.3992 (0.255)	0.0417 (0.214)	23172 (5325)		16017	2.46	3.46
ARIMA(2,1,1)	0.6335 (0.599)	-0.2792 (0.386)		22019 (5464)	0.1214 (0.62)	16026	3.68	5.17

U zagradama ispod ocene koeficijenata date su standardne greške tih ocena. Dodati koeficijenti u proširenim modelima svojom statističkom neznačajnošću sugerišu adekvatnost polaznog ARIMA(2,1,0) modela. Preostali pokazatelji iz Tabele 7.10, kao što su standardna greška ocene i Box-Pierceova statistika, takode sugerišu adekvatnost polaznog modela. Mada je Box-Pierceova statistika niža kod proširenih modela ona ni u polaznom modelu nije statistički značajna na uobičajenim nivoima značajnosti.

Ukažimo na probleme koji se javljaju kada se prvobitni model proširuje tako da se dodaje MA član. Mada taj dodati koeficijent nije statistički značajan njegovim uključivanjem AR koeficijenti u odnosu na prvobitno ocenjeni model manji su za 14 i 18% respektivno. Istovremeno se otvara problem preciznosti njihovog ocenjivanja. ■

U opštem slučaju, ma koji ARMA model će zadovoljiti opštiji ARMA model gde su AR i MA karakteristični polinomi dobijeni množenjem originalnih polinoma istim proizvoljno izabranim polinomom. Da bi se eliminisao ovaj problem kod definisanja



ARMA modela pretpostavili smo da polinomi  $\phi(B)$  i  $\theta(B)$  ne sadrže zajedničke faktore. Očigledno je da koeficijenti u tom opštijem modelu nisu jednoznačno definisani, što vodi ka ozbiljnom problemu pri njegovom ocenjivanju. Stoga se kod uvođenja dodatnih koeficijenata, odnosno prilikom proširivanja modela preporučuje da se pridržavamo sledećih uputstava:

1. **Posebnu pažnju posvetiti početnoj specifikaciji modela.** Ako ima dovoljno elemenata koji ukazuju na to da jednostavniji model predstavlja dobro izabrani model, proveriti to pre nego što se pokuša sa složenijim modelom.
2. **Ne povećavati red AR i MA polinoma istovremeno.** Kada se dodaju novi koeficijenti, odnosno proširuje postojeći model, ne povećavati red AR i MA polinoma modela istovremeno. Ako je na primer u početnoj fazi identifikovan AR(1) model proširiti ga tako da se prvo oceni AR(2) model, a tek potom proveriti da li je možda mešoviti ARMA(1,1) model adekvatniji. Voditi pri tome računa o pojavi zajedničkih faktora.
3. **Proširiti model u pravcu koji sugerise analiza reziduala.** Autokorelaciona funkcija reziduala ocenjenog modela može ukazati na neadekvatnost modela, a istovremeno pomoći u fazi proširivanja modela, odnosno dodavanja novih koeficijenata. Na primer, ako nakon prilagođavanja podacima MA(1) modela u rezidualima ostane korelacija na drugoj docnji, pokušati sa MA(2), a ne sa ARMA(1,1) modelom.

## Zadaci

- 7.1 Na osnovu date vremenske serije od  $n=100$  opservacija odrediti red diferenciranja korišćenjem: (a) obične i parcijalne autokorelacione funkcije, (b) kriterijuma minimalne uzoračke varijanse diferencirane serije i (c) testova jediničnog korena.

1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
11.03	16.41	18.06	17.04	20.47	24.25	29.76	34.56	37.63	39.22
11.28	14.99	17.11	18.61	21.91	22.84	29.66	36.77	37.85	40.80
12.78	18.46	17.52	17.83	20.91	23.84	31.97	35.73	36.75	38.13
12.00	15.43	17.10	19.84	22.67	25.96	30.96	36.65	36.85	40.18
10.88	19.19	17.17	19.68	20.68	26.15	33.93	36.98	37.83	38.78
13.26	18.00	16.09	19.22	22.78	26.36	33.17	36.76	37.06	39.27
14.03	17.41	17.14	20.26	21.79	25.67	35.23	36.39	37.52	39.75
15.26	17.43	16.48	18.49	21.35	26.88	33.91	37.69	37.79	39.69
15.58	18.89	17.14	18.91	23.00	28.77	35.42	37.36	37.82	40.20
14.12	19.33	18.26	19.92	21.64	28.32	37.32	39.11	38.76	40.02

- 7.2 Na osnovu date vremenske serije od  $n=100$  opservacija odrediti red diferenciranja korišćenjem: (a) obične i parcijalne autokorelacione funkcije, (b) kriterijuma minimalne uzoračke varijanse diferencirane serije i (c) testova jediničnog korena.

1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
24.63	27.96	35.71	38.77	42.86	52.18	57.67	61.28	67.42	72.29
26.31	30.17	38.93	36.99	43.01	52.74	57.30	60.95	66.45	74.29
25.62	31.30	36.27	38.27	46.39	53.30	58.80	61.27	66.88	74.19
25.43	29.90	38.80	39.46	45.65	54.66	61.48	61.58	67.55	76.01
26.93	32.52	36.66	39.72	48.89	54.56	61.67	61.77	67.35	75.65
27.46	33.17	38.62	40.13	48.33	54.34	63.03	62.86	66.81	76.24
26.69	33.22	37.57	40.78	48.85	53.65	63.92	63.37	67.96	77.70
28.04	34.73	38.60	40.59	50.44	56.09	61.65	63.32	69.62	76.94
28.12	35.15	38.45	41.69	49.41	54.12	63.10	65.66	69.09	76.31
29.20	37.82	38.11	41.16	51.95	55.16	61.18	64.61	72.38	77.67

7.3 Identifikovati odgovarajući model vremenske serije, odnosno red diferenciranja i red procesa. U tu svrhu koristiti korelogram uzoračke autokorelacione funkcije. Uporediti uzoračke korelograme sa teorijskim korelogramima ARIMA modela koji su izloženi u 4. i 5. Glavi.

(a)  $n = 144$

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_k$	-0.48	-0.00	0.05	-0.15	0.07	0.00	0.02	0.06	-0.04	-0.09

(b)  $n = 100$

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_k$	-0.48	-0.00	0.05	-0.15	0.07	0.00	0.02	0.06	-0.04	-0.09

(c)  $n = 100$

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_k$	-0.22	-0.30	0.03	0.08	-0.00	-0.14	-0.11	0.11	0.02	0.13

(d)  $n = 250$ ,  $W_t = (1-B)X_t$ ,  $Z_t = (1-B)^2 X_t$ ,  $\bar{W} = 0.845$ ,  $S_W^2 = 1.54$

Seriya	$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X_t$	$r_k$	0.99	0.98	0.97	0.95	0.94	0.93	0.92	0.91	0.89	0.88
$W_t$	$r_k$	0.45	-0.02	-0.01	-0.04	0.03	0.10	0.06	-0.01	-0.05	-0.07
$Z_t$	$r_k$	-0.08	-0.42	0.02	-0.08	-0.01	0.11	0.02	-0.02	-0.03	-0.02

(e)  $n = 250$ ,  $W_t = (1-B)X_t$ ,  $Z_t = (1-B)^2 X_t$ ,  $\bar{W} = 0.046$ ,  $S_W^2 = 1.76$

Seriya	$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X_t$	$r_k$	0.85	0.90	0.79	0.81	0.75	0.73	0.70	0.68	0.66	0.64
$W_t$	$r_k$	-0.71	0.51	-0.39	0.25	-0.14	0.09	-0.06	0.06	-0.04	-0.01
$Z_t$	$r_k$	-0.85	0.62	-0.45	0.30	-0.19	0.11	-0.08	0.06	-0.04	-0.01

7.4 Identifikovati odgovarajući model vremenske serije na osnovu datih uzoračkih običnih i parcijalnih autokorelacionih funkcija.

(a)  $n = 100$

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_k$	0.24	-0.17	0.35	0.34	-0.13	-0.07	0.21	0.05	-0.17	0.06
$\hat{\phi}_{kk}$	0.24	-0.24	0.51	0.01	-0.09	-0.05	0.03	0.01	-0.07	0.11

(b)  $n = 121$

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_k$	0.49	-0.10	-0.27	-0.06	0.15	0.07	-0.09	-0.12	-0.03	0.10
$\hat{\phi}_{kk}$	0.49	-0.46	0.05	0.11	0.04	-0.14	0.03	-0.02	-0.00	0.08

(c)  $n = 169$

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_k$	-0.68	0.44	-0.38	0.27	-0.09	0.12	-0.10	0.09	-0.07	-0.05
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.68	-0.04	-0.18	-0.10	0.15	0.22	0.11	0.12	0.07	-0.26

7.5 Identifikovati odgovarajući model vremenske serije, odnosno red diferenciranja i red procesa. U tu svrhu koristiti običan i parcijalni korelogram.

(a)  $n = 250$ ,  $W_t = (1-B)X_t$ ,  $Z_t = (1-B)^2 X_t$ ,  $\bar{W} = 4.187$ ,  $S_W^2 = 3$

Seriya	$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X_t$	$r_k$	0.99	0.98	0.97	0.95	0.94	0.93	0.92	0.91	0.89	0.88
	$\hat{\phi}_{kk}$	0.99	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01
$W_t$	$r_k$	0.33	-0.53	-0.53	0.06	0.45	0.23	-0.20	-0.28	-0.10	0.11
	$\hat{\phi}_{kk}$	0.33	-0.71	0.01	-0.04	0.12	-0.04	0.06	-0.00	-0.17	0.01
$Z_t$	$r_k$	0.17	-0.63	-0.47	0.14	0.46	0.15	-0.24	-0.19	-0.03	0.09
	$\hat{\phi}_{kk}$	0.17	-0.68	-0.34	-0.32	-0.09	-0.16	-0.05	0.08	-0.13	-0.08

(b)  $n = 196$ ,  $W_t = (1 - B)X_t$ ,  $Z_t = (1 - B)^2 X_t$ ,  $\bar{W} = 2.876$ ,  $S_W^2 = 1.66$

Seriya	$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X_t$	$r_k$	0.98	0.97	0.95	0.94	0.92	0.91	0.89	0.88	0.86	0.84
	$\hat{\phi}_{kk}$	0.98	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01
$W_t$	$r_k$	-0.08	0.26	0.21	-0.03	-0.12	-0.10	-0.13	-0.07	0.02	0.13
	$\hat{\phi}_{kk}$	-0.08	0.25	0.26	-0.06	-0.29	-0.22	-0.05	0.14	0.22	-0.12
$Z_t$	$r_k$	-0.66	0.18	0.09	-0.07	-0.05	0.03	-0.05	-0.01	0.11	-0.16
	$\hat{\phi}_{kk}$	-0.66	-0.44	-0.07	0.13	-0.00	-0.18	-0.30	-0.32	0.04	0.07

- 7.6 Za datu vremensku seriju od  $n = 100$  opservacija identifikovati odgovarajući ARIMA model korišćenjem: (a) obične i parcijalne autokorelacione funkcije i (b) kriterijuma za izbor reda procesa:  $FPE$ ,  $BIC$ ,  $AIC$  i  $HQ$ . Da li su saglasni rezultati dobijeni pod (a) i (b)?

1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
1.71	-0.63	-1.96	0.85	0.87	-1.71	0.61	-0.27	2.10	0.86
-3.06	-0.64	-1.83	2.09	0.76	-1.62	2.78	-0.57	0.59	1.22
-3.42	0.44	1.05	0.50	0.11	-0.60	1.34	-0.32	-3.38	0.54
-1.17	0.68	3.01	-0.07	-1.47	-2.19	0.21	2.17	-2.80	-0.24
-0.15	-2.22	0.66	-1.90	0.42	-0.85	-0.10	4.08	0.75	-1.63
1.04	-1.84	-0.61	-2.36	1.66	2.25	-2.01	1.86	3.12	-1.03
1.24	1.06	-0.88	-0.68	0.85	1.22	-1.42	-0.59	2.94	0.91
1.51	3.67	-0.89	0.66	0.10	-0.64	-0.29	-0.92	-0.46	1.64
0.38	2.04	-1.77	0.23	0.34	-4.27	-1.06	-0.01	-1.33	0.88
-0.18	-2.09	-2.69	-0.16	-1.59	-2.11	-0.42	0.77	-0.84	-0.37

- 7.7 Simulirati 250 opservacija iz ARMA(1,1) modela sa  $\phi_1 = 0.8$  i  $\theta_1 = 0.5$ . Na osnovu dobijene vremenske serije identifikovati odgovarajući ARIMA model korišćenjem: (a) obične i parcijalne autokorelacione funkcije i (b) kriterijuma za izbor reda procesa:  $FPE$ ,  $BIC$ ,  $AIC$  i  $HQ$ . Da li su saglasni rezultati dobijeni pod (a) i (b)?
- 7.8 Za vremensku seriju iz Zadatka 7.1 identifikovati red ARIMA procesa korišćenjem: (a) obične i parcijalne autokorelacione funkcije i (b) kriterijuma za izbor reda procesa:  $FPE$ ,  $BIC$ ,  $AIC$  i  $HQ$ . Da li su saglasni rezultati dobijeni pod (a) i (b)?
- 7.9 Za vremensku seriju iz Zadatka 7.2 identifikovati red ARIMA procesa korišćenjem: (a) obične i parcijalne autokorelacione funkcije i (b) kriterijuma za izbor reda procesa:  $FPE$ ,  $BIC$ ,  $AIC$  i  $HQ$ . Da li su saglasni rezultati dobijeni pod (a) i (b)?

- 7.10 Date su opservacije vremenske serije: 2, 5, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 4, 2. Izračunati uslovnu sumu kvadrata  $S(\theta_1, \theta_2)$  za MA(2) proces kod koga je  $\theta_1 = -0.8$  i  $\theta_2 = -0.6$ .  
(Rešenje:  $S(\theta_1, \theta_2) = 29$ ).
- 7.11 Date su opservacije vremenske serije: 2, 5, 4, 2, 2, 1, 2, 3, 4, 5. Izračunati uslovnu sumu kvadrata  $S(\phi_1, \theta_1)$  za ARMA(1,1) proces kod koga je  $\phi_1 = 0.7$  i  $\theta_1 = -0.4$ .  
(Rešenje:  $S(\phi_1, \theta_1) = 18.868$ ).
- 7.12 Identifikovan je model vremenske serije i ocenjeni su autokorelacioni koeficijenti odgovarajuće diferencirane serije:
- |               |                            |
|---------------|----------------------------|
| ARIMA(1,1,0): | $r_1 = 0.55$               |
| ARIMA(0,1,1): | $r_1 = -0.43$              |
| ARIMA(1,0,1): | $r_1 = 0.63, r_2 = 0.57$   |
| ARIMA(0,2,2): | $r_1 = -0.42, r_2 = -0.18$ |
| ARIMA(2,1,0): | $r_1 = 0.68, r_2 = 0.22$   |
- (a) Odrediti prethodne ocene modela. (b) Napisati ocenjene modele korišćenjem operatora docnje.
- 7.13 Za ARIMA(2,1,0) proces iz Zadatka 7.12 sredina i varijansa diferencirane serije je  $\bar{W} = 1.5$  i  $S_w^2 = 1.6$ . Pretpostavimo da vremenska serija sadrži 160 opservacija. (a) Proveriti da li je opravdano uključiti konstantu u model. (b) Napisati ocenjeni model u obliku  $W_t - \phi_1 W_{t-1} - \phi_2 W_{t-2} = \theta_0 + \varepsilon_t$ .
- 7.14 Neka je na osnovu 250 opservacija iz ARMA(1,1) modela dobijene sledeće ocene:  $\hat{\gamma}_0 = 5$ ,  $r_1 = 0.6$ ,  $r_2 = 0.3$ . Naći prethodne ocene za  $\phi_1$ ,  $\theta_1$  i  $\sigma^2$ .  
(Rešenje:  $\hat{\phi}_1 = 0.5$ ,  $\hat{\theta}_1 = -0.1576$ ,  $\hat{\sigma}^2 = 3.1712$ ).
- 7.15 Na osnovu vremenske serije od 100 opservacija izračunato je  $r_1 = 0.5$ ,  $r_2 = -0.4$ ,  $\bar{X} = 10$  i  $\hat{\gamma}_0 = 5$ . Ako pretpostavimo da su opservacije generisane AR(2) procesom sa konstantom odrediti prethodne ocene koeficijenata:  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\theta_0$  i  $\sigma^2$ .  
(Rešenje:  $\hat{\phi}_1 = 0.83$ ,  $\hat{\phi}_2 = -0.774$ ,  $\hat{\theta}_0 = 9.405$ ,  $\hat{\sigma}^2 = 1.369$ ).
- 7.16 Neka je kod MA(1) procesa poznato da je sredina jednaka nuli. Na osnovu serije od tri opservacije:  $X_1 = 0$ ,  $X_2 = -1$  i  $X_3 = \frac{1}{2}$

(a) Pokazati da je ocena po metodu uslovnih najmanjih kvadrata od  $\theta_1$  jednaka 0.5.

(b) Naći ocenu varijanse procesa belog šuma  $\sigma^2$ .

(Uputstvo: U ovom jednostavnom slučaju nije potrebno korišćenje iterativne metode).

7.17 Neka su date opservacije  $X_0 = 10$ ,  $X_1 = 10$ ,  $X_2 = 9$  i  $X_3 = 9.5$ . Ovim podacima želimo prilagoditi ARIMA(0,1,1) model bez konstante. (a) Odrediti ocenu od  $\theta_1$  po metodu uslovnih najmanjih kvadrata. (b) Naći ocenu varijanse procesa belog šuma  $\sigma^2$ .

7.18 Na osnovu vremenske serije od 250 opservacija ocenjen je AR(2) model. Za seriju reziduala tog modela izračunata je autokorelaciona funkcija:

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_k$	0.05	0.09	0.04	-0.02	-0.11	0.06	0.07	-0.02	0.13	0.04

Da li na osnovu autokorelacionih koeficijenata serije reziduala možemo zaključiti o adekvatnosti AR(2) modela?

(Rešenje: 95% interval poverenja  $\rho_k \in (-0.124, 0.124)$ ,  $Q = 13$ ,  $Q^* = 13.5$ ).

7.19 Simulirati 250 opservacija iz ARMA(1,1) modela sa  $\phi_1 = 0.8$  i  $\theta_1 = 0.5$ .

(a) Oceniti AR(1) i MA(1) model na osnovu dobijenih opservacija. Proveriti adekvatnost modela i na osnovu analize reziduala izmeniti prvobitno prilagođen model. (b) Oceniti koeficijente izmenjenog modela i uporediti ih sa pravim vrednostima.

7.20 Oceniti dobijene modele iz Zadatka 7.7 i proveriti njihovu adekvatnost. Da li je potrebno izmeniti ranije identifikovane modele? Ako jeste, identifikovati novi model na osnovu analize reziduala.

7.21 Da bismo ilustrovali problem prisustva zajedničkih faktora na osnovu vremenske serije iz Zadatka 7.19 oceniti model ARMA(2,2). Proveriti njegovu adekvatnost. Dati komentar dobijenih rezultata.

7.22 Za seriju nezaposlenosti (serija S4) u Primeru 7.10 ocenjen je ARIMA(2,1,0) model sa konstantnom. U Primeru 7.11 pokazalo se da je model adekvatan. Da bismo ukazali na posledice pogrešne specifikacije oćenićemo na osnovu ove serije ARIMA(1,1,0) model sa konstantom. Izračunati običnu i parcijalnu autokorelacionu funkciju kao i Box-Pierceovu statistiku. Dati komentar dobijenih rezultata.



## **8** MODELI SEZONSKIH VREMENSKIH SERIJA

U okviru prve dve glave istaknuto je da mnoge vremenske serije sadrže periodične fluktuacije koje se ponavljaju u vremenskim intervalima do godine dana. Takve vremenske serije nazivaju se *sezonskim vremenskim serijama*. Tako vremenska serija prodaje sladoleda ili osvežavajućih pića ima sve karakteristike sezonske vremenske serije, jer se u letnjim mesecima regularno javlja znatno veći obim prodaje nego u ostalim mesecima. Pojava sezonskih fluktuacija važi na primer za serije u turizmu, ali i u proizvodnji, kretanjima zaliha itd. U navedenim slučajevima vreme kao doba godine, odnosno meteorološki fenomen, uslovljava fluktuacije u posmatranim pojavama, a time i u vremenskim serijama kojima pratimo njihova kretanja. Kod serija kao što je na primer prodaja nekih roba, izvesni događaji uslovljavaju njihov sezonski karakter. Poznato je da pred tradicionalne praznike kao što su Božić ili Nova Godina, dolazi do povećanog obima prodaje pojedinih roba (nakita, igračkaka, čestitki i sl.). Ponekad do sezonskih fluktuacija dolazi i usled institucionalnih rešenja koja se primenjuju u privredi. Tako se na primer kod industrijske proizvodnje uočava pojava sezonskog smanjenja proizvodnje upravo u letnjim mesecima kada neka preduzeća odlaze na kolektivne godišnje odmore.

Ako bismo prilikom modeliranja navedenih procesa zanemarili njihov sezonski karakter izostavili bi jednu od značajnih karakteristika. Takav pristup njihovom modeliranju vodio bi ka formiranju neoptimalnog modela. Zato je od interesa direktno modelom vremenske serije obuhvatiti njen sezonski karakter. U 3. Glavi je izložen jedan pristup modeliranju sezonskih vremenskih serija na bazi strukturnih modela vremenskih serija. Pokazano je kako se korišćenjem Holt-Wintersovog postupka i opšteg eksponencijalnog izravnjanja mogu uspešno modelirati sezonske vremenske serije. U ovoj glavi izlažemo drugačiji pristup modeliranju koji je baziran na uopštenju nesezonskih ARIMA modela iz 4. i 5. Glave na klasu sezonskih ARIMA modela. Ovi modeli imaju sličnosti sa nesezonskim modelima, jer kao i oni uzimaju u obzir međuzavisnost uzastopnih opservacija vremenske serije, na primer zavisnost opservacija za uzastopne mesece (kvartale) unutar jedne godine. Međutim, za razliku od nesezonskih modela



sezonski istovremeno uzimaju u obzir i međuzavisnost između opservacija za iste mesece (kvartale) u uzastopnim godinama. U suštini osnovni zadatak modeliranja sezonskih vremenskih serija ostaje isti kao i u slučaju nesezonskih vremenskih serija. Težimo dobijanju ekonomičnog ARIMA modela koji će sa relativno malim brojem dodatih koeficijenata u odnosu na nesezonske modele uspešno modelirati i sezonska kolebanja vremenske serije.

## 8.1 UVOD

Uobičajeni pristup u klasičnoj analizi vremenskih serija zasnovan je na tzv. metodu razlaganja vremenske serije (metod dekompozicije). Osvrt na definiciju i korišćenje ove metode dat je u 1. i 3. Glavi. Ukazali smo na njeno mesto među brojnim metodama analize vremenskih serija kao i na razlike i sličnosti u odnosu na strukturne modele vremenskih serija. Dva su pristupa modeliranju sezonske komponente kod metoda razlaganja. Prema prvom, *regresionom pristupu*, uticaj sezonske komponente se utvrđuje korišćenjem sezonskih veštačkih promenljivih u okviru klasičnog regresionog modela, gde je zavisna promenljiva vremenska serija koju razlažemo na trend, ciklus, sezonu i slučajnu komponentu. Podvarijanta ovog prvog pristupa polazi od pretpostavke da se sezonska komponenta može uspešno modelirati trigonometrijskim funkcijama u tzv. postupku formiranja Fourierove reprezentacije vremenske serije. O ovom postupku biće više reči u narednoj 9. Glavi.

U tradicionalnom pristupu analizi vremenskih serija drugi postupak izdvajanja sezonske komponente iz serije koristi jednu od mnogobrojnih *metoda izravnjanja* (najčešće *metod pokretnih proseka*). Ovim metodama, a posebno eksponencijalnim metodama izravnjanja bavili smo se u okviru 2. i 3. Glave. Osnovna ideja kod ovog pristupa bazirana je na izdvajanju nesezonskog dela vremenske serije korišćenjem simetričnih pokretnih proseka. Kada se utvrdi "osnovni tok" vremenske serije, preostaje nam da ga iz opservacija vremenske serije eliminišemo jednostavnim postupkom oduzimanja kod aditivnog modela, odnosno podele kod multiplikativnog modela, dobijajući na taj način željenu sezonsku komponentu.

Može se reći da je u početnom periodu analize vremenskih serija osnovna namena tako izdvojene sezonske komponente bila u njenom eliminisanju iz vremenske serije. Taj postupak otklanjanja sezonske komponente iz vremenske serije naziva se postupkom *sezonskog izravnjanja* ili *desezoniranja*. Kod regresionog pristupa reziduali ocenjenog modela tretiraju se kao serija "očišćena" uticaja sezonske komponente. Drugi pristup eliminisanju sezonske komponente zasnovan na pokretnim prosecima korišćen je u *metodi X-11*<sup>1</sup>. Ovoj metodi i postupku desezoniranja uopšte, posvećeno je poslednje poglavlje u okviru ove glave.

---

<sup>1</sup> Pod ovim nazivom krije se složeni računski program kojim se obavlja desezoniranje mesečnih i kvartalnih vremenskih serija, a koji je zasnovan na metodu pokretnih proseka.

Zajednički element tradicionalnih postupaka sezonskog izravnjanja jeste da polaze od determinističke prirode sezonske komponente i da pretpostavljaju njenu nezavisnost od ostalih nesezonskih komponenti. Ukoliko se napuste ove pretpostavke, odnosno pođemo od toga da sezonska komponenta ima stohastički karakter sa korelacionom strukturom koja dozvoljava postojanje međuzavisnosti nesezonske i sezonske komponente, tada smo napravili korak u pravcu definisanja sezonskih ARIMA modela.

Definiciju sezonskih ARIMA modela izlažemo u Poglavlju 8.2. Kroz primere jednostavnih, ali karakterističnih sezonskih ARIMA modela upoznajemo se sa osnovnim osobinama cele klase ovih modela. U okviru istog poglavlja razmatramo način konstruisanja i primene testova sezonskog jediničnog korena. Na osnovu rezultata njihove primene moguće je doneti odluku o potrebi sezonskog diferenciranja vremenske serije. Ranije izloženi iterativni postupak Box-Jenkinsove metodologije uz manje izmene primenjujemo na konkretne sezonske vremenske serije. U Poglavlju 8.5 ukazujemo na vezu koja se može uspostaviti između konkretnih ARIMA modela i pojedinih predstavnika klase strukturnih modela vremenskih serija. Naposljetku, kao što je rečeno, u Poglavlju 8.6 bavimo se problemom desezoniranja vremenskih serija, dajući poseban naglasak na korišćenje tzv. *metoda X-11-ARIMA*.

## 8.2 SEZONSKI A R I M A MODELI

Sezonske vremenske serije karakterišu periodične fluktuacije koje se ponavljaju u vremenskim intervalima do godine dana. Najmanji vremenski period u kome se ponovi uočena pojava nazivamo period sezone i označava se sa  $s$ . Ako su u pitanju mesečne vremenske serije, tada je *period sezone* jednak 12, za kvartalne serije  $s=4$ , a za polugodišnje serije  $s=2$ .

S obzirom da se posmatrana pojava sa izvesnim pravilnostima ponavlja posle perioda sezone, očekujemo da će opservacije razdvojene  $s$  vremenskih perioda biti međusobom korelirane. Dakle, pored grafika vremenske serije, kao što je to slučaj sa serijom na Slici 2.4, i korelogram sezonske vremenske serije može biti od pomoći pri utvrđivanju sezonskog karaktera serije. Lagano smanjivanje vrednosti autokorelacionih koeficijenata na sezonskim doznjama ( $s, 2s, 3s, \dots$ ) pokazatelj je *sezonske nestacionarnosti*. Slično postupku eliminisanja nestacionarnosti kod nesezonskih serija korišćenjem operatora diferenciranja  $(1-B)$ , za otklanjanje sezonske nestacionarnosti koristimo operator sezonskog diferenciranja  $(1-B^s)$ . Kombinujući ova dva operatora diferenciranja u opštem slučaju, sezonski ARIMA model za seriju  $X_t$  pišemo u obliku:

$$\phi(B)(1-B)^d(1-B^s)^D X_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (8.1)$$

gde smo operatore nesezonskog i sezonskog diferenciranja primenili  $d$ , odnosno  $D$  puta respektivno. Polinomi  $\phi(B)$  i  $\theta(B)$  definišu se na uobičajen način (videti Poglavlje 4.9). Pri izgradnji sezonskog ARIMA modela primenjuje se iterativni postupak Boxa i Jenkinsa. Međutim, poteškoće sa kojima se suočavamo pri korišćenju modela (8.1) navele su Boxa i Jenkinsa da definišu novu klasu sezonskih ARIMA modela. Prva

od spomenutih teškoća tiče se polinoma  $\phi(B)$  i  $\theta(B)$  od kojih bar jedan mora biti minimalno reda  $s$ , da bi obuhvatio autokorelaciju na sezonskim dočnjama. Na primer, kod mesečnih vremenskih serija to znači da red jednog od polinoma mora biti najmanje 12, pa se može desiti da će model sadržavati isti toliki broj koeficijenata. Uključivanje tolikog broja koeficijenata u model, od kojih svi ne moraju biti različiti od nule, zahteva razmatranje velikog broja modela u fazi njihovog izbora. Druga poteškoća tiče se parcijalne autokorelacione funkcije kao osnovnog sredstva za identifikaciju modela. Kod sezonskih modela tipa (8.1) njena interpretacija je otežana, pa se uglavnom koristi obična autokorelaciona funkcija.

Iz navedenih razloga Box i Jenkins su pristupili definisanju klase tzv. multiplikativnih sezonskih ARIMA modela. Pretpostavimo u opštem slučaju da smo vremensku seriju  $X_t$ , za koju smo na osnovu grafika ili korelograma utvrdili da ima karakteristike sezonske vremenske serije, modelirali korišćenjem nesezonskog ARIMA modela:

$$(1-B)^d \phi_p(B) X_t = \theta_q(B) \eta_t, \quad (8.2)$$

gde su  $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$  i  $\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$  polinomi po operatoru dočnje  $B$ , reda  $p$  i  $q$  respektivno. Zbog sezonskog karaktera serije proces  $\eta_t$  neće predstavljati proces belog šuma. Koeficijenti autokorelacije ovog procesa na sezonskim dočnjama biće različiti od nule. Zato ćemo ovaj proces takođe modelirati ARIMA modelom:

$$(1-B^s)^D \Phi_p(B^s) \eta_t = \Theta_Q(B^s) \varepsilon_t, \quad (8.3)$$

gde su  $\Phi_p(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \dots - \Phi_p B^{ps}$  i  $\Theta_Q(B^s) = 1 - \Theta_1 B^s - \dots - \Theta_Q B^{Qs}$  polinomi po operatoru  $B^s$  reda  $P$  i  $Q$  respektivno. Istovremeno pretpostavljamo da polinomi  $\Phi_p(B^s)$  i  $\Theta_Q(B^s)$  nemaju zajedničkih korena. Ovi polinomi zadovoljavaju standardne uslove stacionarnosti, odnosno invertibilnosti, kojima se zahteva da koreni polinoma budu po modulu veći od jedinice. Kombinujući izraz (8.2) i (8.3) dobićemo Box-Jenkinsov *multiplikativni sezonski ARIMA model*:

$$(1-B)^d (1-B^s)^D \phi_p(B) \Phi_p(B^s) X_t = \theta_q(B) \Theta_Q(B^s) \varepsilon_t. \quad (8.4)$$

Dodavanjem konstante  $\theta_0$  s desne strane izraza (8.4) uvodimo determinističku trend komponentu u model. Uobičajeno je da se u modelu (8.4) polinomi  $\phi_p(B)$  i  $\theta_q(B)$  nazivaju regularnim autoregresionim polinomom i polinomom pokretnog proseka, a  $\Phi_p(B^s)$  i  $\Theta_Q(B^s)$  sezonskim autoregresionim polinomom i polinomom pokretnog proseka. Standardna oznaka multiplikativnih sezonskih ARIMA modela sa periodom sezone  $s$  je  $ARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ . Razmotrimo nekoliko jednostavnih sezonskih modela.

### 8.2.1 Sezonski AR(1) modeli

U izrazu (8.3) stavimo  $P=1$ ,  $D=0$  i  $Q=0$ . Dobićemo sezonski autoregresioni model prvog reda:

$$(1 - \Phi_1 B^s) \eta_t = \varepsilon_t, \quad (8.5)$$

koji označavamo  $SAR(1)_s$ . Uslov stacionarnosti zahteva da je  $|\Phi_1| < 1$ . Kao i kod nesezonskog AR(1) modela i ovde se može pokazati da  $E(\eta_t) = 0$ . Autokovarijaciona funkcija ovog modela se dobija množenjem izraza (8.5) sa  $\eta_{t-k}$ , te određivanjem očekivane vrednosti dobijenog izraza. Može se pokazati da je autokorelaciona funkcija ovog modela:  $\rho_{sk} = \Phi_1^k$ , za  $k=1, 2, \dots$ . Znači da su autokorelacioni koeficijenti ovog modela različiti od nule samo na sezonskim dočnjama. Na primer, kod mesečne vremenske serije je  $s=12$ , pa su autokorelacioni koeficijenti kod  $SAR(1)_{12}$  modela različiti od nule na sledećim dočnjama: 12, 24, 36, ....

### 8.2.2 Sezonski MA(1) modeli

U izrazu (8.3) stavimo ,  $P=1$ ,  $D=0$  i  $Q=0$ . Dobićemo sezonski model pokretnih proseka prvog reda:

$$\eta_t = (1 - \Theta_1 B^s) \varepsilon_t \quad (8.6)$$

koji označavamo  $SMA(1)_s$ . Uslov invertibilnosti zahteva da  $|\Theta_1| < 1$ . Kao i kod nesezonskog MA(1) modela i kod ovog modela  $E(\eta_t) = 0$ . Takođe se može pokazati da je:  $Var(\eta_t) = (1 + \Theta_1^2) \sigma^2$ ,  $Cov(\eta_t, \eta_{t-1}) = 0$  i  $Cov(\eta_t, \eta_{t-s}) = -\Theta_1 \sigma^2$ . Prema tome autokorelaciona funkcija ima vrednost različitu od nule samo na prvoj sezonskoj dočnji. Na primer, kod mesečne vremenske serije imamo da je  $s=12$ , pa je autokorelacioni koeficijent kod  $SMA(1)_{12}$  modela različit od nule samo na 12. dočnji.

### 8.2.3 "Vazduhoplovni" model

Među multiplikativnim sezonskim ARIMA modelima najčešće se koriste sledeći:  $ARIMA(1, d, 0) \times (1, D, 0)_s$ ,  $ARIMA(1, d, 0) \times (0, D, 1)_s$ ,  $ARIMA(0, d, 1) \times (1, D, 0)_s$  i  $ARIMA(0, d, 1) \times (0, D, 1)_s$ , gde  $d$  i  $D$  uzima vrednost 0 ili 1. Na Slici 8.1 prikazan je karakteristični izgled običnog i parcijalnog korelograma za serije prvih i sezonskih diferenci generisanih korišćenjem prva tri navedena modela kod kojih je  $d = D = 1$ .

Kao poslednju ilustraciju klase multiplikativnih sezonskih ARIMA modela navodimo upravo ovaj četvrti model kod koga je  $d = D = 1$ , odnosno radi se o  $ARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_s$  modelu. Model pišemo u obliku:

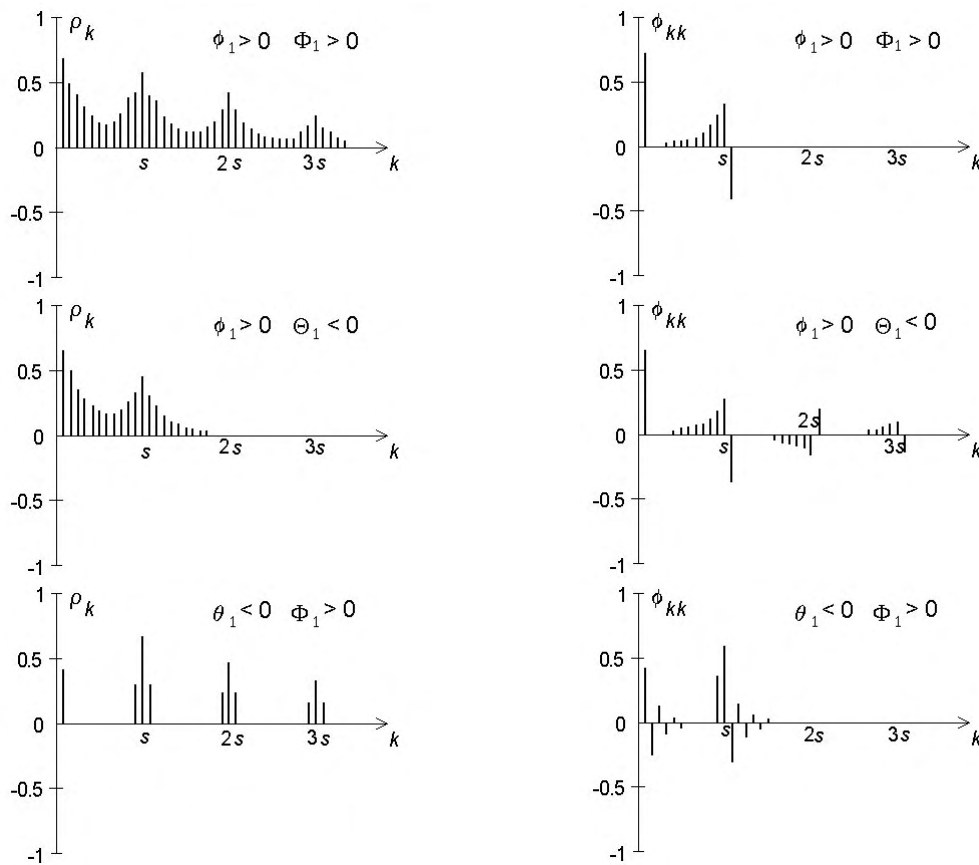
$$(1 - B)(1 - B^s) X_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \Theta_1 B^s) \varepsilon_t. \quad (8.7)$$

Njega su Box i Jenkins koristili za analizi vremenske serije broja prevezenih putnika u vazdušnom saobraćaju, pa stoga se u literaturi naziva "vazduhoplovni" model (engl. *airline model*). Invertibilnost ovog modela zahteva ispunjenje uslova  $|\theta_1| < 1$  i  $|\Theta_1| < 1$ . Ako prve i sezonske diference označimo sa  $W_t$ , tada model (8.7) pišemo u obliku:

$$W_t = (1 - B - B^s - B^{s+1})X_t = (1 - \theta_1 B - \Theta_1 B^s + \theta_1 \Theta_1 B^{s+1})\varepsilon_t. \quad (8.8)$$

Autokovarijansa od  $W_t$  na  $k$ -toj docnji je

$$\gamma_k = E(W_t W_{t-k}) = E[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \Theta_1 \varepsilon_{t-s} + \theta_1 \Theta_1 \varepsilon_{t-s-1}) \times (\varepsilon_{t-k} - \theta_1 \varepsilon_{t-k-1} - \Theta_1 \varepsilon_{t-s-k} + \theta_1 \Theta_1 \varepsilon_{t-s-1-k})], \quad (8.9)$$



Slika 8.1 Obična i parcijalna autokorelaciona funkcija izabranih multiplikativnih sezonskih modela

odakle dobijamo

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= (1 + \theta_1^2)(1 + \Theta_1^2)\sigma^2 \\ \gamma_1 &= -\theta_1(1 + \Theta_1^2)\sigma^2 \\ \gamma_{s-1} &= \theta_1\Theta_1\sigma^2 \\ \gamma_s &= -\Theta_1(1 + \theta_1^2)\sigma^2 \\ \gamma_{s+1} &= \theta_1\Theta_1\sigma^2, \end{aligned} \quad (8.10)$$

a sve ostale autokovarijanse su jednake nuli. Na osnovu autokovarijacione funkcije dobijamo autokorelacione koeficijente:

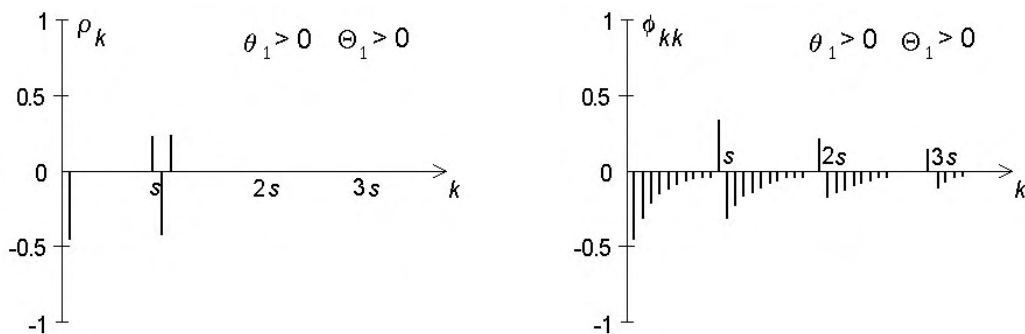
$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}, \\ \rho_{s-1} &= \frac{\theta_1\Theta_1}{(1+\theta_1^2)(1+\Theta_1^2)} = \rho_{s+1}, \\ \rho_s &= \frac{-\Theta_1}{1+\Theta_1^2},\end{aligned}\quad (8.11)$$

a ostali autokorelacioni koeficijenti su jednaki nuli.

Ako je tačna pretpostavka da seriji odgovara "vazduhoplovni" model, tada varijansa ocenjenih uzoračkih autokorelacionih koeficijenata na dobnjama višim od  $s+1$  glasi

$$\text{Var}(\hat{\rho}_k) = \frac{1 + 2(\hat{\rho}_1^2 + \hat{\rho}_{s-1}^2 + \hat{\rho}_s^2 + \hat{\rho}_{s+1}^2)}{n}, \quad k > s+1. \quad (8.12)$$

Korišćenjem ovog rezultata i poznatog izraza autokorelacione funkcije (8.11) u mogućnosti smo da identifikujemo sezonski ARIMA(0,1,1)×(0,1,1)<sub>s</sub> model. Za "vazduhoplovni" model prikazujemo na Slici 8.2 izgled običnog i parcijalnog korelograma za pozitivne vrednosti koeficijenata  $\theta_1$  i  $\Theta_1$ .

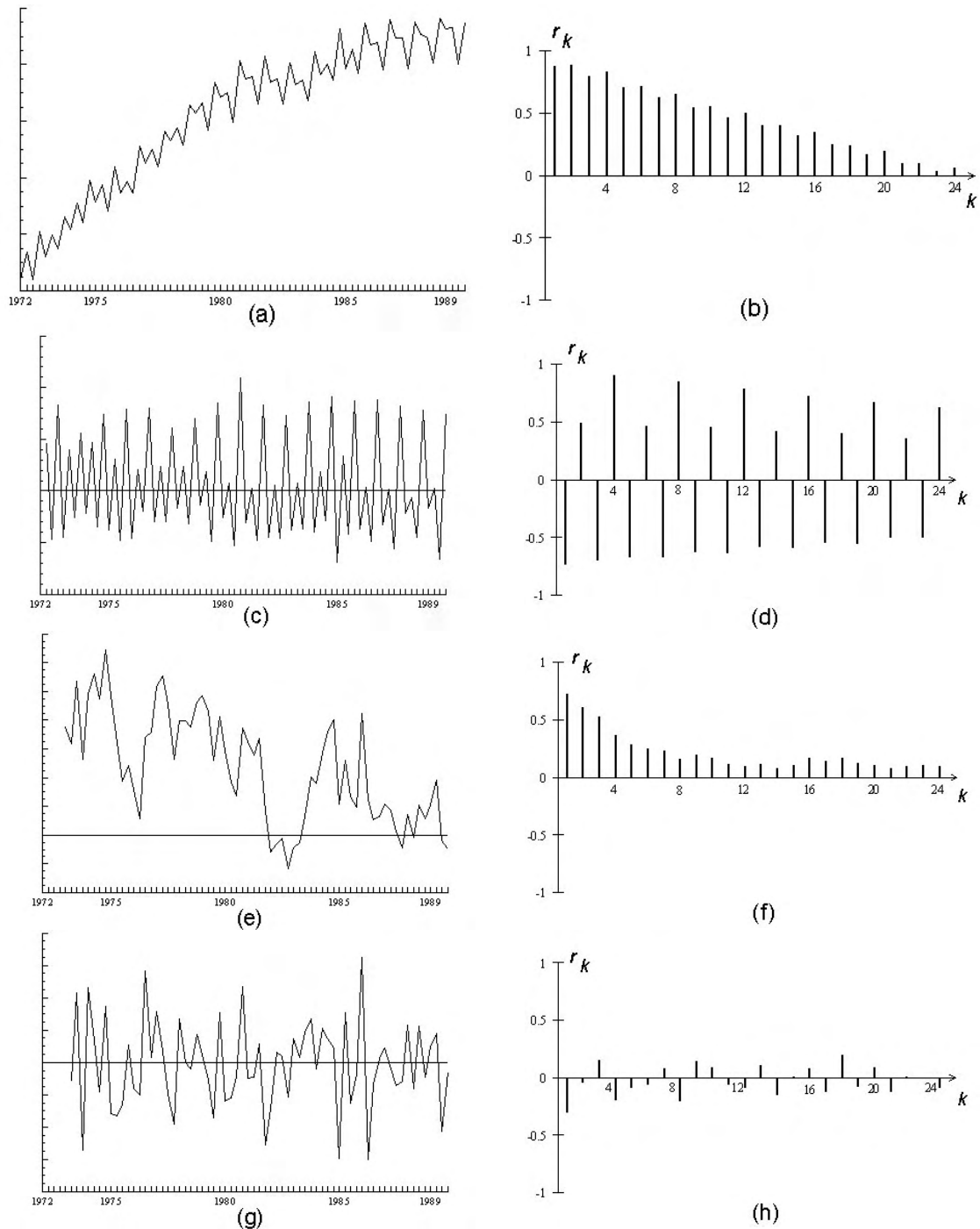


**Slika 8.2** Obična i parcijalna autokorelaciona funkcija "vazduhoplovnog" modela

Autokovarijacione i autokorelacione funkcije ostalih karakterističnih slučajeva sezonskih ARIMA modela mogu se naći kod Box i Jenkinsa (1976, ss. 329-333).

**Primer 8.1** Za kvartalnu vremensku seriju indeksa industrijske proizvodnje u Srbiji (serija S10) identifikovati odgovarajući ARIMA model, oceniti ga i proveriti njegovu adekvatnost.

Sa grafika vremenske serije (Slika 2.4) je očito da je prisutan trend, a varijansa serije je vremenski zavisna. Zbog vremenski zavisne varijanse prethodno smo izvršili logaritamsku transformaciju opservacija vremenske serije. U daljem tekstu seriju logaritama opservacija vremenske serije nazivamo originalna vremenska serija.



**Slika 8.3** Kvartalna industrijska proizvodnja u Srbiji: (a) originalna serija ((b) korelogram originalne serije), (c) prva diferencija ((d) korelogram prve diferencije), (e) sezonska diferencija ((f) korelogram sezonske diferencije) i (g) prva i sezonska diferencija ((h) korelogram prve i sezonske diferencije)

Korišćenjem programa *RATS 3.0* ocenili smo uzoračke obične i parcijalne autokorelacione koeficijente. U Tabeli 8.1 prikazali smo prvih 24 koeficijenata za originalnu seriju, seriju prvih diferencija, seriju sezonskih

diferenci i seriju prvih i sezonskih diferenci. Na Slici 8.3 prikazali smo grafike originalne i diferenciranih serija kao i njihove korelograme.

**Tabela 8.1** Autokorelaciona i parcijalna autokorelaciona funkcija kvartalnog indeksa industrijske proizvodnje u Srbiji (serija S10)

													Varijansa
	<b>Originalna serija</b>												0.07
$r_k : 1-12$	0.88	0.88	0.79	0.83	0.71	0.71	0.63	0.65	0.54	0.55	0.47	0.50	
13-24	0.40	0.40	0.32	0.34	0.24	0.24	0.16	0.19	0.10	0.10	0.03	0.06	
$\hat{\phi}_{kk}$	0.88	0.50	-0.18	0.33	-0.40	0.05	0.05	0.09	-0.21	0.05	-0.00	0.08	
13-24	-0.13	-0.05	-0.00	0.03	-0.11	-0.08	0.03	0.05	-0.06	-0.05	0.05	-0.05	
	<b>Prva diferencija</b>												0.01
$r_k : 1-12$	-0.73	0.49	-0.69	0.90	-0.67	0.46	-0.67	0.85	-0.63	0.45	-0.64	0.78	
13-24	-0.58	0.42	-0.59	0.72	-0.54	0.40	-0.55	0.67	-0.49	0.35	-0.49	0.62	
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.73	-0.09	-0.80	0.43	0.31	0.09	-0.12	0.10	0.06	0.02	0.04	-0.01	
13-24	-0.01	-0.10	0.00	0.01	-0.01	0.05	0.10	0.08	0.14	-0.09	-0.10	0.06	
	<b>Sezonska diferencija</b>												0.00142
$r_k : 1-12$	0.73	0.61	0.52	0.37	0.29	0.25	0.23	0.16	0.19	0.17	0.12	0.09	
13-24	0.11	0.08	0.11	0.17	0.14	0.17	0.13	0.11	0.07	0.09	0.11	0.10	
$\hat{\phi}_{kk}$	0.73	0.17	0.07	-0.16	0.00	0.06	0.09	-0.09	0.12	-0.03	-0.05	-0.05	
13-24	0.11	-0.04	0.11	0.08	-0.04	0.04	-0.13	0.03	-0.02	0.11	0.02	0.02	
	<b>Prva i sezonska diferencija</b>												0.00073
$r_k : 1-12$	-0.30	-0.04	0.15	-0.19	-0.08	-0.06	0.08	-0.20	0.14	0.09	-0.06	-0.08	
13-24	0.11	-0.14	0.01	0.08	-0.12	0.19	-0.07	0.09	-0.12	0.00	0.00	-0.09	
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.30	-0.14	0.10	-0.13	-0.18	-0.21	0.02	-0.22	-0.02	0.02	0.02	-0.22	
13-24	-0.02	-0.18	-0.02	-0.08	-0.11	0.08	-0.05	0.01	-0.15	-0.08	-0.09	-0.07	

Dok sa grafika originalne vremenske serije (Slika 8.3(a)) uočavamo njen sezonski karakter, dotle sa korelograma ove serije (Slika 8.3(b)) to skoro da nije moguće, u čemu nas sprečava prisustvo nesezonskog jediničnog korena ( $d=1$ ). Međutim, grafik i korelogram serije prvih diferenci ubedljivo ukazuju na prisustvo sezonske nestacionarnosti. Na grafiku te serije (Slika 8.3(c)) uočljivi su vrhovi, odnosno dolje koje se svaka četiri kvartala ponavljaju. Sezonska nestacionarnost ove serije iskazuje se preko visoko pozitivnih sporo opadajućih vrednosti autokorelacionih koeficijenata na sezonskim docnjama (4, 8, 12, ...) (Slika 8.3(d)).

Slika 8.3(e) i Slika 8.3(f) pokazuju izgled serije i korelograma kada na originalnu vremensku seriju primenimo samo sezonske diference.

Sa grafika sezonski diferencirane serije uočavamo da serija nema konstantan nivo, što je odlika nestacionarnih serija. Slično sugerije i



korelogram ove serije (Slika 8.3(f)) na kome su statistički značajni autokorelacioni koeficijenti i na višim dočnjama.

Naposletku, na Slici 8.3(g) dat je grafik vremenske serije na koju smo primenili nesezonsko (obi-no) i sezonsko diferenciranje. Serija je o-igledno sa konstantnim nivoom, a na njoj se ne uo-avaju izrazite pravilnosti sezonskog tipa. Njen korelogram (Slika 8.3(h)) pokazuje da smo kombinovanom primenom nesezonskog i sezonskog diferenciranja dobili stacionarnu seriju za koju možemo identifikovati odgovarajući multiplikativni sezonski ARIMA model.

Kako je efektivni broj opservacija na osnovu kojih je ocenjena obi-na i parcijalna autokorelaciona funkcija serije prvih i sezonskih diferenci jednak 67, to je standardna greška ocene koeficijenata jednaka 0.12. Vrednosti iz Tabele 8.1 za prvu i sezonsku diferencu (poslednja četvrtina tabele) sugerišu da se autokorelacioni koeficijenti na 1., 4. i 8. dočnji mogu uzeti kao značajni (istini za volju ne na nivou značajnosti od 5%, ali mogu na nešto nižem nivou). Na osnovu ovakvog izgleda korelograma predlažemo "vazduhoplovni" model za seriju kvartalne industrijske proizvodnje u Srbiji. Međutim, napominjemo, da ako bismo pažljivije analizirali korelogram dovela bi se u sumnju predložena specifikacija. Naime, prema Slici 8.2, odnosno izrazu (8.11) sledi da kod "vazduhoplovnog" modela autokorelacioni koeficijenti oko sezonske dočnje treba da budu istog znaka. Kod nas to o-ito nije slu-aj što se prve sezonske dočnje ti-e, jer su koeficijenti na 3. i 5. dočnji suprotnog znaka. Ovaj uslov je ispunjen na drugoj sezonskoj dočnji. Mada značajnost autokorelacionog koeficijenta na 8. dočnji sugeriše možda nešto op{tiji model, po}i }emo od spomenutog "vazduhoplovnog" modela, a u fazi ispitivanja adekvatnosti proverimo opravdanost njegovog pro{irenja.

Nakon identifikacije modela nastavljamo iterativni postupak Box-Jenkinsa ocenjivanjem koeficijenata izabranog modela. Kako je multiplikativni sezonski ARIMA model poseban slu-aj op{teg ARIMA modela (sa ograni-enjem na parametre), to je postupak ocenjivanja ovog modela istovetan ranije izlo`enom postupku ocenjivanja u Poglavlju 7.4. Ocena predlo`enog  $ARIMA(0,1,1) \times (0,1,1)_4$  modela kori{enjem programa *RATS* 3.0 dala je slede}i rezultat:

$$(1 - B)(1 - B^4)X_t = (1 - \underset{(0.117)}{0.3726}B)(1 - \underset{(0.118)}{0.4244}B^4)\varepsilon_t, \hat{\sigma} = 0.0248.$$

Oba ocenjena koeficijenta visoko su statistički značajna. Radi provere adekvatnosti ocenjenog modela izra-unali smo vrednost autokorelacionih koeficijenata serije reziduala kao i modifikovane Box-Pierceove statistike i prikazali ih u Tabeli 8.2.

**Tabela 8.2** Autokorelaciona funkcija reziduala i modifikovana Box-Pierceova statistika ocenjenog modela (prva iteracija)

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_k$	0.00	-0.08	0.06	0.07	-0.16	-0.12	-0.01	-0.17	0.06	0.04	-0.06	-0.15
$Q^*$	0.00	0.43	0.68	1.08	2.99	4.15	4.16	6.54	6.80	6.96	7.27	9.10

Vrednost modifikovane Box-Pierceove statistike ne ukazuje nam na neadekvatnost izabranog modela, s obzirom da je kritična vrednost testa na nivou značajnosti 5%,  $Q_{12-2;0.05}^* = 18.31$ . Međutim, u seriji reziduala ostaje prisutna autokoreliranost na 8. doznji, što nas upućuje da prvobitno identifikovan model u narednoj iteraciji proširimo još jednim sezonskim MA članom. Ocena tako proširenog modela dala je sledeći rezultat:

$$(1 - B)(1 - B^4)X_t = (1 - \underset{(0.120)}{0.3515}B)(1 - \underset{(0.128)}{0.3617}B^4 - \underset{(0.132)}{0.2213}B^8)\varepsilon_t, \hat{\sigma} = 0.0244.$$

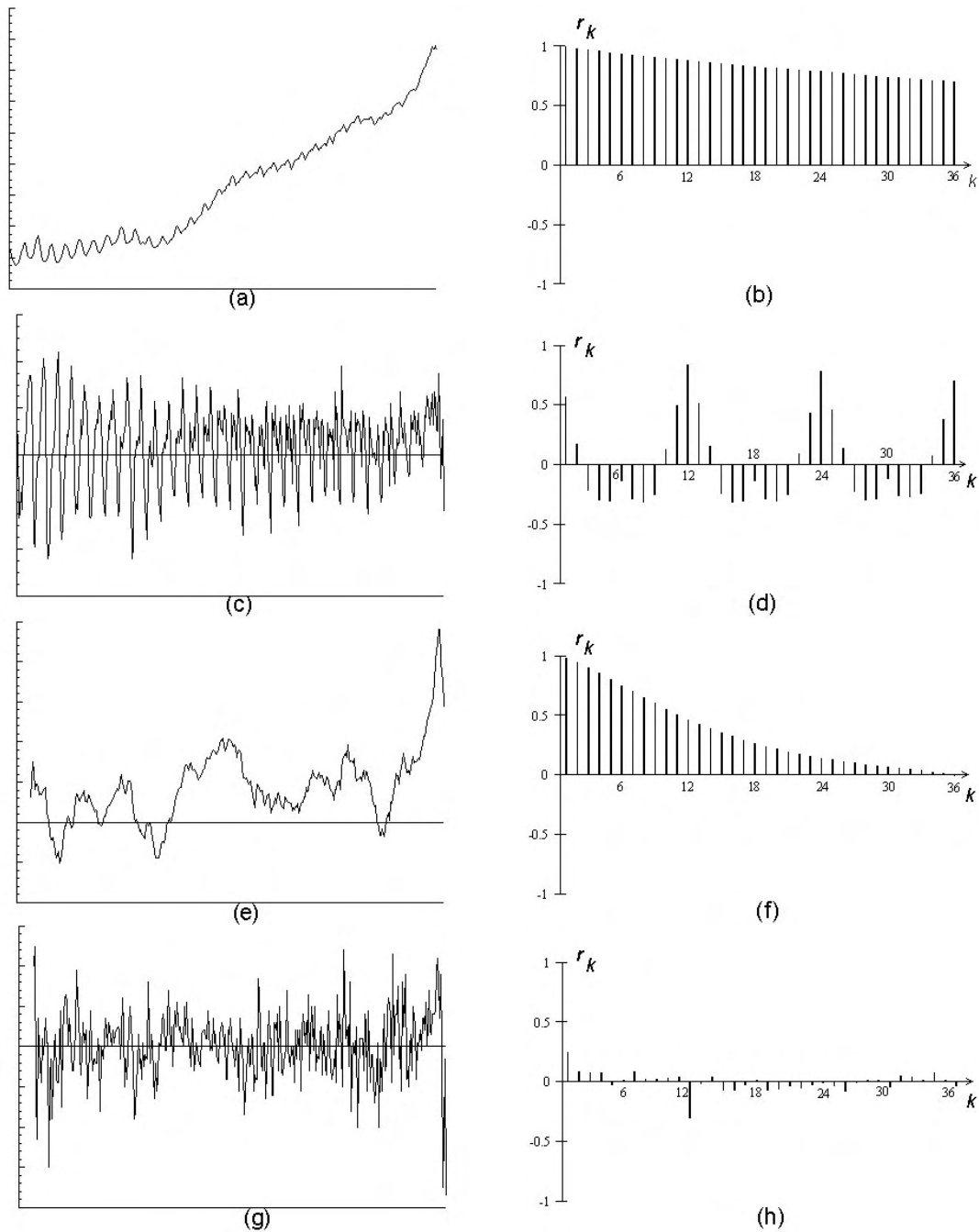
Ocene koeficijenata  $\theta_1$  i  $\Theta_1$  nisu se značajnije promenile. Što se dodatog koeficijenta tiče vrednost njegove  $t$ -statistike iznosi što ukazuje da je taj koeficijent statistički značajan na nivou značajnosti od 10%. Istovremeno je došlo do izvesnog smanjenja standardne greške ocene modela. Kao i u prethodnoj iteraciji proveru adekvatnosti modela zasnivamo na autokorelacionoj funkciji serije reziduala i modifikovanoj Box-Pierceovoj statistici. Tako vrednost modifikovane Box-Pierceove statistike ne ukazuje na neadekvatnost izabranog modela, s obzirom da je kritična vrednost testa na nivou značajnosti 5%,  $Q_{12-3;0.05}^* = 16.92$ . Vrednost autokorelacionih koeficijenata serije reziduala ne ukazuje na njihovu statističku značajnost na uobičajenim nivoima značajnosti. Sledi da je za kvartalnu industrijsku proizvodnju u Srbiji ARIMA(0,1,1) × (0,1,2)<sub>4</sub> model adekvatan.

**Tabela 8.3** Autokorelaciona funkcija reziduala i modifikovana Box-Pierceova statistika ocenjenog modela (druga iteracija)

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_k$	-0.00	-0.08	0.02	-0.01	-0.16	-0.14	-0.02	-0.01	0.07	0.08	-0.05	-0.09
$Q^*$	0.00	0.42	0.45	0.45	2.45	3.99	4.03	4.04	4.44	4.96	5.20	5.90

Međutim, konačna potvrda valjanosti izabranog modela je zasnovana na kvalitetu prognoza njime generisanih. Prognoziranje na osnovu ovog ocenjenog modela i drugih sezonskih modela pozabavićemo se u Odeljku 8.2.5. ■

**Primer 8.2** Za mesečnu vremensku seriju broja nezaposlenih u bivšoj Jugoslaviji (serija S16) identifikovati odgovarajući ARIMA model, oceniti ga i proveriti njegovu adekvatnost.



**Slika 8.4** Mesečna nezaposlenost u bivšoj Jugoslaviji: (a) originalna serija ((b) korelogram originalne serije), (c) prva diferencija ((d) korelogram prve diferencije), (e) sezonska diferencija ((f) korelogram sezonske diferencije) i (g) prva i sezonska diferencija ((h) korelogram prve i sezonske diferencije)

Sa grafika vremenske serije (Slika 8.4(a)) je očito da je u seriji prisutan trend. Pokazalo se da seriju nije bilo potrebno transformisati u cilju stabilizovanja varijanse, pa smo u daljem tekstu analizu bazirali na netransformisanoj seriji broja nezaposlenih.

Korišćenjem programa *RATS 3.0* ocenili smo uzoračke, obične i parcijalne autokorelacione koeficijente. U Tabeli 8.4 prikazali smo prvih 36 koeficijenata za originalnu seriju, seriju prvih diferenci, seriju sezonskih diferenci i seriju prvih i sezonskih diferenci. Na Slici 8.4 prikazali smo grafike originalne i diferenciranih serija kao i njihove korelograme.

**Tabela 8.4** Autokorelaciona i parcijalna autokorelaciona funkcija mesečnog broja nezaposlenih u bivšoj Jugoslaviji (serija S16)

	<b>Originalna serija</b>												<b>Varijansa</b>	
													143,240	
$r_k : 1-12$	0.99	0.98	0.97	0.96	0.94	0.93	0.92	0.91	0.90	0.90	0.89	0.88		
13-24	0.87	0.86	0.85	0.84	0.83	0.83	0.82	0.81	0.80	0.80	0.79	0.79		
25-36	0.78	0.77	0.76	0.75	0.75	0.74	0.73	0.72	0.72	0.71	0.71	0.70		
$\hat{\phi}_{kk}$	0.99	-0.08	-0.02	0.00	0.00	0.02	0.03	0.02	0.03	0.03	0.01	-0.03		
13-24	-0.05	-0.03	0.00	0.03	0.03	0.02	0.01	0.02	0.01	0.02	-0.00	-0.02		
25-36	-0.04	-0.02	-0.01	0.17	0.01	0.01	0.06	0.00	0.00	0.01	-0.01	-0.02		
	<b>Prva diferencija</b>													284.26
$r_k : 1-12$	0.56	0.17	-0.22	-0.29	-0.30	-0.14	-0.29	-0.31	-0.25	0.13	0.49	0.84		
13-24	0.51	0.15	-0.25	-0.31	-0.30	-0.13	-0.29	-0.30	-0.25	0.09	0.43	0.78		
25-36	0.46	0.13	-0.23	-0.30	-0.29	-0.12	-0.26	-0.27	-0.24	0.07	0.38	0.70		
$\hat{\phi}_{kk}$	0.56	-0.21	-0.33	0.03	-0.14	0.04	-0.50	-0.13	0.02	0.29	0.37	0.53		
13-24	-0.24	-0.08	-0.16	-0.01	0.04	0.05	-0.11	0.06	0.01	-0.04	-0.01	0.20		
25-36	-0.18	0.04	0.07	0.01	0.02	-0.03	0.00	0.08	-0.03	-0.03	-0.07	0.09		
	<b>Sezonska diferencija</b>												2,063.2	
$r_k : 1-12$	0.98	0.94	0.90	0.86	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	0.46		
13-24	0.42	0.39	0.35	0.32	0.29	0.26	0.24	0.21	0.19	0.17	0.16	0.14		
25-36	0.12	0.11	0.10	0.09	0.07	0.06	0.06	0.05	0.03	0.02	0.01	-0.01		
$\hat{\phi}_{kk}$	0.98	-0.29	-0.00	-0.14	-0.14	0.07	-0.01	-0.07	0.04	-0.03	-0.01	-0.04		
13-24	0.22	-0.15	-0.03	0.03	-0.03	0.02	-0.03	0.02	0.01	0.02	0.03	-0.09		
25-36	0.08	-0.06	0.03	-0.03	0.01	-0.01	0.03	-0.08	0.02	-0.04	-0.08	-0.01		
	<b>Prva i sezonska diferencija</b>													69.89
$r_k : 1-12$	0.25	0.08	0.08	0.07	-0.03	0.01	0.08	0.02	0.02	0.03	0.04	-0.30		
13-24	-0.02	0.04	-0.08	-0.07	-0.02	0.01	-0.07	-0.07	-0.04	-0.05	-0.03	-0.00		
25-36	-0.04	-0.08	-0.01	0.01	0.01	-0.04	0.05	0.03	0.01	0.07	0.01	-0.03		
$\hat{\phi}_{kk}$	0.25	0.02	0.05	0.04	-0.07	0.03	0.08	-0.02	0.02	0.01	0.02	-0.34		
13-24	0.15	0.03	-0.09	-0.00	-0.04	0.04	-0.03	-0.06	0.01	-0.03	0.06	-0.15		
25-36	0.04	-0.23	-0.04	0.04	-0.01	-0.01	0.05	-0.04	0.03	0.05	-0.01	-0.10		

Sa grafika originalne vremenske serije (Slika 8.4(a)) uočavamo njen sezonski karakter. Međutim, sezona je manje stabilna i nije u toj meri izražena kao kod kvartalne industrijske proizvodnje u Srbiji. Sa korelograma ove serije (Slika 8.4(b)) nije moguće uočiti da serija ima sezonske karakteristike, jer korelogramom dominira izraženi trend. Grafik i korelogram serije prvih diferenci jasno ukazuje na prisustvo sezonske nestacionarnosti. Na grafiku te serije (Slika 8.4(c)) uočljivi su vrhovi, odnosno dolje koje se svakih dvanaest meseci ponavljaju. Sezonska nestacionarnost ove serije iskazuje se preko visokih pozitivnih vrednosti autokorelacionih koeficijenata na sezonskim dočnjama (12, 24, 36, ...) koji se lagano smanjuju (Slika 8.4(d)).

Primena samo sezonskih diferenci na originalnu seriju rezultira u Slici 8.4(e) i Slici 8.4(f). Očito se za dobijenu seriju ne može pretpostaviti da je stacionarna, jer fluktuiraju oko promenljivog nivoa. To potvrđuje i lagano opadajuća vrednost autokorelacionih koeficijenata na njenom korelogramu.

Tek primenom nesezonskog i sezonskog diferenciranja postićemo stacionarnost serije broja nezaposlenih u bivšoj Jugoslaviji kao što je to vidljivo na osnovu grafika vremenske serije (Slika 8.4(g)) i njenog korelograma (Slika 8.4(h)). Korišćenjem kriterijuma minimalne uzoračke varijanse diferencirane serije dolazimo do istog zaključka da tek kombinovanom primenom nesezonskog i sezonskog diferenciranja dobijamo seriju sa najmanjom varijansom. Na osnovu dobijene serije pristupamo identifikaciji multiplikativnog sezonskog ARIMA modela.

Pošto je za efektivni broj opservacija 358, standardna greška ocene autokorelacionih koeficijenata jednaka je 0.05. Posmatranjem vrednosti koeficijenata na nesezonskim dočnjama iz Tabele 8.4 (poslednja četvrtina), uočavamo značajnost prvog autokorelacionog koeficijenta i to na nivou značajnosti od 5%. Što se sezonskih dočnji tiče statistički je značajan samo koeficijent  $\rho_{12}$  dok su ostali jednaki nuli. Među parcijalnim autokorelacionim koeficijentima statistički su značajni koeficijenti na 12, 24 i 36 dočnji i to sa negativnim predznakom. Prema svemu izloženom za mesečnu seriju broja nezaposlenih sugerišemo ARIMA(0,1,1)×(0,1,1)<sub>12</sub> model. Sa izabranim modelom otpočinjemo drugu etapu Box-Jenkinsovog iterativnog postupka, tj. etapu njegovog ocenjivanja.

Korišćenjem programa *RATS 3.0* ocenili smo predloženi model i dobili sledeći ocenjeni model

$$(1 - B)(1 - B^{12})X_t = (1 + \underset{(0.0519)}{0.3356 B})(1 - \underset{(0.0487)}{0.5537 B^{12}})\varepsilon_t, \hat{\sigma} = 7.326.$$

Oba ocenjena koeficijenta visoko su statistički značajna. Radi provere adekvatnosti ocenjenog modela izračunali smo vrednost autokorelacionih koeficijenata serije reziduala i prikazali ih u Tabeli 8.5. Proveru adekvatnosti modela bazirali smo i na modifikovanoj Box-Pierceovoj statistici. Na osnovu prvih 24 autokorelaciona koeficijenta vrednost ove statistike iznosi  $Q_{24;0.05}^* = 32.8$ . Korišćenjem tablica  $\chi^2$  – rasporeda (Tabela B3 u Dodatku B) odredili smo kritičnu vrednost testa koja iznosi  $Q_{24-2;0.05}^* = 33.92$ . Realizovana vrednost statistike testa bliska je kritičnoj vrednosti. Mada se ne odbacuje hipoteza da serija reziduala predstavlja proces belog šuma, ipak ostaje izvesna sumnja u adekvatnost ocenjenog modela. Tu sumnju pojačava statistički značajan autokorelacioni koeficijent na drugoj dočnji za seriju reziduala dat sa ostalim koeficijentima u Tabeli 8.5.

**Tabela 8.5** Autokorelaciona funkcija reziduala ocenjenog modela (prva iteracija)

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_k$	0.04	0.12	0.01	0.10	-0.01	0.05	0.09	-0.01	-0.01	0.00	0.15	0.01
$k$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$r_k$	0.07	0.05	-0.10	-0.02	-0.02	0.05	-0.03	-0.04	-0.03	-0.02	0.04	0.00

U drugoj iteraciji izmenimo na prvobitno specificovan model tako što ćemo dodati MA –lan na drugoj nesezonskoj dočnji, odnosno prošireni model je  $ARIMA(0,1,2) \times (0,1,1)_{12}$  model. Njegovim ocenjivanjem dobijamo sledeći rezultat:

$$(1 - B)(1 - B^{12})X_t = (1 + \underset{(0.0519)}{0.3847}B + \underset{(0.0544)}{0.1223}B^2)(1 - \underset{(0.0479)}{0.5713}B^{12})\varepsilon_t, \hat{\sigma} = 7.277$$

Vrednost koeficijenata  $\theta_1$  i  $\Theta_1$  u proširenom modelu neznatno je promenjena u odnosu na vrednosti u prvobitno specificovanom modelu. S druge strane dodati MA –lan, odnosno odgovarajući koeficijent  $\theta_2$  je statistički značajan na nivou značajnosti od 5%. Standardna greška ocene modela je neznatno niža u proširenom u odnosu na prvobitni model (greška je smanjena za nešto manje od 1%).

Radi provere adekvatnosti modela računamo vrednost modifikovane Box-Pierceove statistike  $Q_{24}^* = 27.8$ . S obzirom da je vrednost izračunate statistike manja od kritične vrednosti ( $Q_{24-3;0.05}^* = 32.67$ ), to na nivou značajnosti od 5% zaključujemo da je  $ARIMA(0,1,2) \times (0,1,1)_{12}$  model adekvatan model za mesečnu seriju broja nezaposlenih u bivšoj Jugoslaviji.

**Tabela 8.6** Autokorelaciona funkcija reziduala ocenjenog modela (druga iteracija)

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_k$	-0.00	0.01	0.04	0.09	-0.03	0.04	0.09	-0.01	-0.04	-0.00	0.16	0.00
$k$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$r_k$	0.07	0.06	-0.11	-0.03	-0.01	0.06	-0.02	-0.05	-0.03	-0.01	0.04	0.01

Ovaj zaključak podržava i analiza reziduala na osnovu autokorelacione funkcije. Ni jedan od autokorelacionih koeficijenata nije statistički značajno različit od nule, osim koeficijenta na 11. doznji. Kako se pri oceni većeg broja koeficijenata može desiti da se pokaže statistički značajnim i koeficijent koji to nije u populaciji (na nivou značajnosti od 5% pri oceni 24 koeficijenta to se može desiti bar kod jednog koeficijenta), to ćemo ovaj koeficijent na 11. doznji jednostavno zanemariti. ■

Kada je reč o sezonskim ARIMA modelima do sada smo razmatrali tzv. multiplikativne ARIMA modele. Postavlja se pitanje da li nemultiplikativni model možda adekvatnije reprezentuje posmatrani proces. Ako za primer multiplikativnog modela uzmemo "vazduhoplovni" model  $\Delta \Delta_s X_t = (1 - \theta_1 B - \Theta_1 B^s + \theta_1 \Theta_1 B^{s+1}) \varepsilon_t$ , tada ćemo njegovu adekvatnost u odnosu na nemultiplikativni model  $\Delta \Delta_s X_t = (1 - \theta_2 B - \theta_3 B^s + \theta_4 B^{s+1}) \varepsilon_t$ , proveriti testirajući ograničenje na koeficijente ovog potonjeg modela. Ukoliko se korišćenjem testa količnika verodostojnosti ne može odbaciti nelinearno ograničenje:  $\theta_4 + \theta_2 \theta_3$ , zaključujemo o adekvatnosti multiplikativne forme modele.

### 8.3 TESTOVI SEZONSKIH JEDINIČNIH KORENA

Analogno pojmu determinističkog i stohastičkog trenda kod nesezonskih serija (Odeljak 5.2.1) u analizi sezonskih vremenskih serija uvodimo pojam determinističke i stohastičke sezone. Deterministička sezona se jednostavno modelira korišćenjem modela

$$X_t = \beta_1 D_{1t} + \beta_2 D_{2t} + \dots + \beta_s D_{st} + \varepsilon_t, \quad (8.13)$$

gde su  $D_{jt}$ ,  $j=1,2,\dots,s$ , sezonske veštačke promenljive koje uzimaju vrednost 1 u  $j$ -tom periodu, a 0 inače. Koeficijenti  $\beta_j$  mere efekte  $j$ -tog perioda na vremensku seriju. S obzirom da su  $\beta$  koeficijenti konstanti, modelom (8.13) se pretpostavlja stabilan uticaj sezone u celom periodu. Posmatrajmo izraz (8.13) kao klasičan regresioni model. Ako ga ocenimo metodom najmanjih kvadrata, dobićemo ocene koeficijenata, a rezidualne modele tretiraćemo kao seriju iz koje je eliminisana deterministička sezona.

Najjednostavniji oblik *stohastičke sezone* dat je izrazom:

$$X_t = X_{t-s} + \varepsilon_t. \quad (8.14)$$

Prema izrazu (8.14) sledi da je serija sezonskih diferenci stacionarna serija. Za razliku od determinističke sezone kod stohastičke dozvoljavamo mogućnost da uticaj sezone tokom vremena varira na slučajan način.

Pri razmatranju uticaja slučajnih šokova na seriju sa determinističkim i stohastičkim trendom konstatovali smo da šokovi kod serije sa prvim tipom trenda nemaju uticaja na dugi rok, a kod serije sa stohastičkim trendom ostavljaju trajne posledice. Slične efekte beležimo kod serija sa determinističkom i stohastičkom sezonom. Tako će pozitivan ili negativan slučajni šok uticati ne samo na porast ili pad vrednosti  $X_t$ , nego i na porast ili pad vrednosti  $X_{t+s}, X_{t+2s}, \dots$ . Istovremeno ovaj slučajni šok na dugi rok neće ostaviti trajne posledice na vremensku seriju sa determinističkom sezonom.

Podsećamo, da ukoliko se kod nesezonske vremenske serije stacionarnost postiže primenom operatora prvog diferenciranja  $d$  puta, tada za seriju kažemo da je  $d$ -tog reda integrisanosti što označavamo  $X_t \sim I(d)$ . Pojam integrisanosti direktno proširujemo na vremenske serije sa sezonskim karakteristikama na sledeći način. Za seriju  $X_t$  kažemo da je *sezonski integrisana reda*  $(d, D)$ , što označavamo  $X_t \sim I(d, D)$ , ako se običnim diferenciranjem  $d$  puta i sezonskim diferenciranjem  $D$  puta dobija serija koja ima stacionarnu i invertibilnu ARMA reprezentaciju. Tako se u izrazu (8.14) umesto procesa belog šuma  $\varepsilon_t$  u opštem slučaju javlja navedena ARMA reprezentacija.

U postupku testiranja sezonske integrisanosti vremenske serije, odnosno prisustva sezonskih jediničnih korena, polazimo od pretpostavke da posmatrana serija sadrži kako stohastičku, tako i determinističku sezonsku komponentu. Kod prvobitno definisanih testova sezonskih jediničnih korena nije razvijen postupak diskriminacije između dva tipa sezone. Jedino se zahteva da determinističku sezonu otklonimo pre nego što se pristupi testiranju sezonske integrisanosti. Znači da se na osnovu vremenske serije  $X_t$  oceni model (8.13), a reziduali ocenjenog modela koriste u narednom koraku postupka testiranja. U daljem tekstu ćemo pretpostaviti da je serija  $X_t$  na navedeni način "očišćena" od prisustva determinističke sezone.

Direktno uopštenje Dickey-Fullerovog testa, radi provere prisustva sezonskih jediničnih korena, zasnovano je na modelu

$$\Delta_s X_t = \alpha X_{t-s} + \varepsilon_t. \quad (8.15)$$

*Dickey-Fullerov test sezonske integrisanosti (DFSI test)* baziran je na " $t$ -odnos" ocene koeficijenta  $\alpha$  u modelu (8.15). Testira se nulta hipoteza  $H_0: X_t \sim I(0,1)$  protiv alternativne hipoteze  $H_1: X_t \sim I(0,0)$ . Ukoliko je " $t$ -odnos" statistički značajno negativan, tada se ne prihvata nulta hipoteza, odnosno test sugeriše da nema potrebe vremensku seriju sezonski diferencirati. Valjanost *DFSI* testa zavisi od toga da li se može usvojiti pretpostavka da reziduali ocenjenog modela (8.15) predstavljaju proces belog šuma. Često ova pretpostavka nije ispunjena, pa se u takvom slučaju koristi tzv.



prošireni Dickey-Fullerov test sezonske integrisanosti (*ADFSI* test) koji je zasnovan na "t-odnos" ocene koeficijenta  $\alpha$  u regresionom modelu:

$$\Delta_s X_t = \alpha X_{t-s} + \sum_{i=1}^p \lambda_i \Delta_s X_{t-i} + \varepsilon_t. \quad (8.16)$$

Kritične vrednosti *DFSI* i *ADFSI* testa date su u Tabeli B9 (Dodatak B) za  $s = 2, 4, 12$ . Napominjemo da su oba testa mehanička modifikacija nesezonskih *DF* i *ADF* testa, pa se stoga koriste kao gruba aproksimacija testova sezonske integrisanosti vremenske serije.

Potpuno uopštenje proširenog Dickey-Fullerovog testa dali su Dickey, Hasza (Haza) i Fuller (1984) uz kasniju izmenu koja je učinjena u radu Osborn (Ozborn) i dr. (1988). *Dickey-Hasza-Fullerov test* (*DHF* test) zasnovan je na "t-odnos" ocene koeficijenta  $\alpha$  u regresionom modelu:

$$\Delta_s X_t = \alpha Z_{t-s} + \sum_{i=1}^p \lambda_i \Delta_s X_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (8.17)$$

pri čemu se do vrednosti promenljive  $Z_{t-s}$  dolazi na sledeći način. Ocene po metodu najmanjih kvadrata koeficijenata  $\delta_i$  u regresiji  $\Delta_s X_t$  na sopstvene prošle vrednosti:

$$\Delta_s X_t = \sum_{i=1}^p \delta_i \Delta_s X_{t-i} + \xi_t, \quad (8.18)$$

tj. koeficijente  $\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \dots, \hat{\delta}_p$ , koristimo da bismo konstruisali promenljivu  $Z_t$ . To činimo korišćenjem izraza:

$$Z_t = X_t - \sum_{i=1}^p \hat{\delta}_i X_{t-i} = (1 - \hat{\delta}_1 B - \hat{\delta}_2 B^2 - \dots - \hat{\delta}_p B^p) X_t. \quad (8.19)$$

Naposletku, formiranjem promenljive  $Z_t$  s docnjom od  $s$  perioda dobijamo promenljivu  $Z_{t-s}$  koju direktno koristimo kao jedan od regresora u modelu (8.17). Primetimo da je u radu Dickey, Hasza i Fullera (1984) zavisna promenljiva u modelu (8.17)  $\Delta_s Z_t$ , a ne  $\Delta_s X_t$  kao što mi koristimo. Ovu izmenu uvode Osborn i dr. (1988) sugerišući da je statistika testa invarijantna na ovu promenu. S druge strane kada je polinom  $(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_p B^p)$  nepoznat, prednost ove izmene je u tome što ukazuje na pojavu precenjivanja vrednosti  $p$  ukoliko do nje dođe. Kritične vrednosti *DHF* testa iste su kao *DFSI* i *ADFSI* testova i date su u Tabeli B9 (Dodatak B).

Ukoliko smo u postupku primene *ADFSI* testa zaključili da ne treba odbaciti nultu hipotezu  $H_0: X_t \sim I(0,1)$ , tada testiramo novu nultu hipotezu  $H_0: X_t \sim I(1,1)$  protiv alternativne hipoteze  $H_1: X_t \sim I(0,1)$ . Osnovu testa za testiranje navedene hipoteze predstavlja "t-odnos" ocene koeficijenta  $\alpha$  u regresionom modelu:

$$\Delta\Delta_s X_t = \alpha\Delta_s X_{t-1} + \sum_{i=1}^p \lambda_i \Delta\Delta_s X_{t-i} + \varepsilon_t. \quad (8.20)$$

Ukoliko se  $H_0: X_t \sim I(1,1)$  ne odbaci ova postaje nova alternativna hipoteza, a nulta hipoteza sada glasi  $H_0: X_t \sim I(2,1)$ . Postupak testiranja se nastavlja dalje sve dok se ne odbaci nulta hipoteza, pri čemu će u modelu (8.20) sve promenljive u svakom narednom koraku biti još po jednom obično diferencirane. Uočiti da se konstruisana promenljiva  $Z_t$  u modelu za *DHF* test koristi samo za testiranje reda sezonskog diferenciranja.

Naposletku, za kvartalne podatke Hylleberg (Hajleberg), Engle (Engl), Granger i Yoo (Ju) (1990) definisali su postupak, tzv. *HEGY test*, za utvrđivanje tipa sezone (determinističke i stohastičke) u vremenskoj seriji kao i prisustva nesezonskog i sezonskog jediničnog korena. Oni su pošli od razlaganja polinoma:

$$(1 - B^4) = (1 - B)(1 + B)(1 + B^2) = (1 - B)(1 + B)(1 - iB)(1 + iB), \quad i = \sqrt{-1} \quad (8.21)$$

što znači da imamo jedinične korene 1,  $-1$ ,  $i$  i  $-i$  od kojih prvi odgovara trendu, tj. to je običan jedinični koren, a preostali koreni sezonskoj komponenti od  $1/2$  ciklusa po kvartalu ili 2 ciklusa po godini, odnosno  $1/4$  ciklusa po kvartalu ili jedan ciklus po godini. Na osnovu kvartalnih podataka koren  $-i$  nije moguće razlikovati od korena  $i$ , što inače predstavlja suštinu pojave tzv. lažnog predstavljanja (videti Odeljak 9.3.5). Zato se ovaj koren takođe interpretira kao koren koji pripada godišnjem ciklusu. Osnovu *HEGY* testa predstavlja u najopštijem slučaju regresioni model:

$$\Delta_4 X_t = \beta_0 + \beta t + \sum_{i=1}^3 \beta_i D_{it} + \sum_{i=1}^4 \pi_i Z_{i,t-1} + \sum_{i=1}^p \lambda_i \Delta_s X_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (8.22)$$

gde su promenljive  $Z_{i,t}$ :

$$\begin{aligned} Z_{1t} &= (1 + B)(1 + B^2)X_t = (1 + B + B^2 + B^3)X_t = X_t + X_{t-1} + X_{t-2} + X_{t-3}, \\ Z_{2t} &= -(1 - B)(1 + B^2)X_t = -(1 - B + B^2 - B^3)X_t = -X_t + X_{t-1} - X_{t-2} + X_{t-3}, \\ Z_{3t} &= -(1 - B)(1 + B)X_t = -(1 - B^2)X_t = -X_t + X_{t-2}, \\ Z_{4t} &= -B(1 - B)(1 + B)X_t = -(B - B^3)X_t = -X_{t-1} + X_{t-3} = Z_{3,t-1}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Za razliku od prethodno izloženih testova *HEGY* test omogućava diskriminaciju između dva modela sezone: determinističke i stohastičke, a takođe pruža dopunske informacije o strukturi sezonske komponente u vremenskoj seriji. Ukazujemo na još jednu razliku koja se javlja u operacionalizaciji *HEGY* testa u odnosu na ostale testove. Naime, dok je kod *DFSI*, *ADFSI* i *DHF* testova u prethodnoj regresiji na osnovu modela (8.13) eliminisana deterministička sezona, dotle je kod *HEGY* testa u model za ocenjivanje moguće uključiti sledeće determinističke komponente: konstantu, linearni trend i sezonske veštačke promenljive. U zavisnosti od toga koje su determinističke

komponente uključene u model za ocenjivanje koristimo odgovarajuće tablice kritičnih vrednosti.

Da bismo izložili postupak primene *HEGY* testa podimo od najjednostavnije forme modela (8.22) iz koga je izostavljena deterministička komponenta (konstanta, trend, i sezonske veštačke promenljive). Formiranjem "*t*-odnosa" ocene  $\pi_i$  koeficijenata testiramo prisustvo određene sezonske komponente. Tako na primer, ako se prihvati nulta hipoteza da je  $\pi_1 = 0$  (drugim rečima tačna je nulta hipoteza  $H_0 : X_t \sim I(1,0)$ ), tada serija sadrži običan jedinični koren. Prema tome, radi postizanja stacionarnosti serije potrebno je primeniti operator običnog (prvog) diferenciranja. Ako se prihvata hipoteza da je  $\pi_2 = 0$ , tada serija sadrži sezonski jedinični koren koji odgovara sezonskoj komponenti od  $1/2$  ciklusa po kvartalu. Formiranjem "*F*-odnosa" proveravamo da su koeficijenti  $\pi_3$  i  $\pi_4$  istovremeno statistički značajni. Na taj način testiramo hipotezu da serija sadrži sezonski jedinični koren koji odgovara sezonskoj komponenti sa jednogodišnjim ciklusom. Serija neće sadržati sezonske jedinične korene ako je  $\pi_2$  i bar jedan od koeficijenata  $\pi_3$  ili  $\pi_4$  različit od nule. Znači, da bismo testirali hipotezu da je serija stacionarna, pa da stoga ne sadrži jedinične korene, moramo utvrditi da su svi koeficijenti  $\pi_i$  statistički značajno različiti od nule.

Pri testiranju hipoteze da su koeficijenti  $\pi_3$  i  $\pi_4$  jednaki nuli, postoje alternativni pristup izloženom kod koga smo koristili "*F*-odnos". On polazi od računanja "*t*-odnosa" za testiranje nulte hipoteze  $\pi_4 = 0$ , protiv alternativne hipoteze da je  $\pi_4 \neq 0$ . Ako se prihvata nulta hipoteza, postupak testiranja se nastavlja dalje računanjem "*t*-odnosa" za testiranje nulte hipoteze  $\pi_3 = 0$ , protiv alternativne hipoteze  $\pi_3 < 0$ . Za sva četiri "*t*-odnosa" kao i za "*F*-odnos" date su kritične vrednosti u Tabeli B10 (Dodatak B). Tabela sadrži kritične vrednosti ovih statistika za sve relevantne kombinacije determinističkih komponenti. Pored navedenog modela koji ne sadrži determinističke komponente, razlikujemo modele sa konstantom, konstantom i sezonskim veštačkim promenljivama, konstantom i trendom i naposljetku model sa konstantom, trendom i sezonskim veštačkim promenljivama.

**Primer 8.3** Za vremenske serije: kvartalna industrijska proizvodnja u Srbiji (serija S10) i mesečna nezaposlenost u bivšoj Jugoslaviji (serija S16) proveriti red sezonske integrisanosti korišćenjem testova sezonskih jediničnih korena.

Korišćenjem programa *RATS 3.0* prema izloženom postupku testiranja prisustva sezonskih jediničnih korena dobili smo rezultate koje prezentiramo u Tabeli 8.7.

Tabela 8.7 Rezultati testova sezonskih jediničnih korena

Kvartalna industrijska proizvodnja u Srbiji (serija S10)					
Dickey-Fullerov test sezonske integrisanosti	$t = -4.47$		$Q_{24} = 782.67$		
Prošireni Dickey-Fullerov test sezonske integrisanosti	$t = -1.49$		$Q_{24} = 19.04$		
Dickey-Hasza-Fullerov test sezonske integrisanosti	$t = -2.63$		$Q_{24} = 15.31$		
Prošireni Dickey-Fullerov test integrisanosti	$t = -1.71$		$Q_{21} = 21.01$		
Deterministička komponenta	Hylleberg-Engle-Granger-Yoo test				
	"t": $\pi_1$	"t": $\pi_2$	"t": $\pi_3$	"t": $\pi_4$	"F": $\pi_3 \cap \pi_4$
-	1.34	-0.48	0.20	-0.82	0.36
konstanta	-3.36	-0.43	0.28	-0.70	0.29
konstanta, sezona	-3.02	-2.16	-2.26	-0.99	3.06
konstanta, trend	-1.19	-0.43	0.28	-0.70	0.28
konstanta, sezona, trend	-1.10	-2.14	-2.24	-0.98	3.00
Mesečna nezaposlenost u bivšoj Jugoslaviji (serija S16)					
Dickey-Fullerov test sezonske integrisanosti	$t = 6.02$		$Q_{57} = 6107$		
Prošireni Dickey-Fullerov test sezonske integrisanosti	$t = 0.66$		$Q_{57} = 81.23$		
Dickey-Hasza-Fullerov test sezonske integrisanosti	$t = -3.93$		$Q_{57} = 68.65$		
Prošireni Dickey-Fullerov test integrisanosti	$t = -1.02$		$Q_{54} = 21.01$		

Kod serije kvartalne industrijske proizvodnje u Srbiji *DFSI* test na nivou značajnosti od 5% sugerše da treba odbaciti hipotezu  $H_0: X_t \sim I(0,1)$ . Međutim, visoka vrednost  $Q$ -statistike ( $Q_{24} = 782.67$ ) ukazuje na autokoreliranost serije reziduala ocenjenog model, pa time dovodi u sumnju i opravdanost primene *DFSI* testa. Uključivanjem vrednosti zavisne promenljive s docnjom u model (8.16) izračunata vrednost statistike *ADFSI* testa iznosu  $-1.49$ . Kako je ova izračunata vrednost veća od kritične vrednosti, koja na nivou značajnosti od 5% iznosi oko  $-4.11$ , zaključujemo da ne treba odbaciti nultu hipotezu o postojanju sezonskog jediničnog korena u ovoj seriji, tj.  $X_t \sim I(0,1)$ . Isti zaključak sledi i na osnovu primene *DHF* testa. Kod njega je izračunata vrednost statistike testa jednaka  $-2.63$ , a kritična vrednost je ista kao kod *ADFSI* testa, tj. iznosi  $-4.11$ .

Na osnovu modela (8.20) testiramo nultu hipotezu da  $X_t \sim I(1,1)$  protiv alternativne hipoteze da  $X_t \sim I(0,1)$ . *ADF* test odgovarajućim " $t$ -odnosom" u iznosu od  $-1.71$  ukazuje na nivou značajnosti od 5% na prisustvo običnog jediničnog korena u seriji kvartalne industrijske proizvodnje u Srbiji. Kritična vrednost ovog testa prema vrednostima iz Tabele B6 iznosi  $-1.95$ . Do istih zaključaka dolazimo i za seriju mesečne nezaposlenosti u bivšoj Jugoslaviji. Rezultati *ADFSI* i *DHF* testa

sugerišu potrebu sezonskog diferenciranja serije, a primena *ADF* testa na osnovu modela (8.20) i običnog diferenciranja. Prema tome, rezultati testova sezonskih jediničnih korena opravdali su naš postupak modeliranja vremenskih serija u Primerima 8.1 i 8.2, kada smo na osnovu korelograma zaključili da treba serije obično i sezonski diferencirati.

Za kvartalnu vremensku seriju industrijske proizvodnje u Srbiji (serija S10) ispitali smo potrebu običnog i sezonskog diferenciranja korišćenjem *HEGY* testa. Rezultati ovog testa iz Tabele 8.7 potvrđuju naš nalaz na osnovu drugih testova sezonskih jediničnih korena. Naime, "*t*-odnos" za koeficijente  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  i  $\pi_4$  kao i "*F*-odnos" za koeficijente  $(\pi_3, \pi_4)$  sugeriše da ne treba odbaciti hipotezu o nesezonskom jediničnom korenu ( $\pi_1 = 0$ ), odnosno postojanju polugodišnjeg ( $\pi_2 = 0$ ) i godišnjeg ciklusa ( $\pi_3 = \pi_4 = 0$ ) bez obzira na specifikaciju determinističke komponente. Izvesna sumnja u ovaj zaključak ostaje u slučaju rezultata testa nesezonskog jediničnog korena kada smo u model za ocenjivanje uključili konstantu, odnosno konstantu i sezonske veštačke promenljive. Prema tome, zaključujemo da je u vremenskoj seriji kvartalna industrijska proizvodnja u Srbiji prisutna stohastička, a ne deterministička sezona. Seriju je prema rezultatima *HEGY* testa potrebno obično i sezonski diferencirati da bi se postigla njena stacionarnost. ■

*HEGY* test se definiše i za mesečne vremenske serije. Slično razlagaju polinoma  $(1 - B^4)$  kod kvartalnih serija, kod mesečnih serija razlažemo polinom  $(1 - B^{12})$ , tj.

$$(1 - B^{12}) = (1 + B)(1 - \sqrt{3}B + B^2)(1 - B + B^2)(1 + B^2)(1 + B + B^2) \times (1 + \sqrt{3}B + B^2)(1 - B). \quad (8.24)$$

Svaki od navedenih faktora u gornjem izrazu odgovara sinusoidi sa 6, 5, 4, 3, 2, 1 ciklusa po godini respektivno. Poslednji faktor  $(1 - B)$  odgovara trend komponenti, tj. ukazuje na prisustvo običnog jediničnog korena, kada se zahteva obično diferenciranje (diferenciranje prvog reda). Odgovarajući "*t*-odnosi" i "*F*-odnosi" se potom konstruišu slično kao kod *HEGY* testa za kvartalne vremenske serije.

Modifikacije navedenih testova kao i definicije novih testova sezonskih jediničnih korena date su kod Hasza i Fullera (1982) i Osborna i dr. (1988). Slabost ovih testova je slična slabosti testova običnih jediničnih korena. Obe klase testova imaju malu jačinu u malim uzorcima, a posebno kada koeficijenti uzimaju vrednosti bliske jedinici.

## 8.4 PROGNOZIRANJE SEZONSKIM A R I M A MODELIMA

Kako sezonski ARIMA modeli predstavljaju specijalne slučajeve ARIMA modela to je i postupak formiranja prognoza identičan postupku izloženom u 6. Glavi. Prognoze na osnovu sezonskih ARIMA modela formiraćemo korišćenjem diferencne forme

modela. Ilustrirajmo postupak prognoziranja na primerima karakterističnih sezonskih modela.

Ako napišimo sezonski AR model prvog reda ( $SAR(1)_s$  model) dat izrazom (8.5) u obliku diferencne jednačine

$$X_t = \Phi_1 X_{t-s} + \varepsilon_t, \quad (8.25)$$

direktno ćemo dobiti jednačinu prognoze. Prognoza formirana u periodu  $n$  za  $h$  perioda unapred data je izrazom:

$$\hat{X}_n(h) = \Phi_1 \hat{X}_n(h-s). \quad (8.26)$$

Rekurzivno zamenjujući  $\hat{X}_n(h-s)$  unazad, dobićemo

$$\hat{X}_n(h) = \Phi_1^{k+1} X_{n+r-s+1}, \quad (8.27)$$

gde je  $k$  ceo deo količnika  $(h-1)/s$ , a  $r/s$  je ostatak od  $(h-1)/s$  nakon odbitka celog dela, tj.  $k$ . Tako na primer, ako je poslednja raspoloživa opservacija za septembar mesec 1994. godine, tada je prognoza u prvom narednom mesecu, tj. oktobru 1994. godine jednaka proizvodu koeficijenta  $\Phi_1$  i opservacije za oktobar 1993. godine, prognoza za novembar 1994. godine jednaka je proizvodu koeficijenta  $\Phi_1$  i opservacije za novembar 1993. godine (pošto je  $s=12$ , a  $h=1$  (za oktobar) i  $h=2$  (za novembar), to je  $k=0$ , a  $r=0$  i  $1$  za oktobar i novembar mesec respektivno). Prognoza za oktobar 1995. godine jednaka je proizvodu koeficijenta  $\Phi_1^2$  i poslednje raspoloživog oktobarskog podatka, tj. podatka za oktobar 1993. godine.

Pored brojne ocene buduće vrednosti vremenske serije formiramo i njenu intervalnu ocenu. Da bismo došli do nje potrebno je prethodno izračunati varijansu greške prognoze. Na osnovu vrednosti  $\psi$  – pondera, a prema izrazu (6.12) dobijamo vrednost varijanse greške prognoze. Kako je vrednost  $\psi$  – pondera:

$$\psi_j = \begin{cases} \Phi_1^{j/s} & j = 0, s, 2s, \dots \\ 0, & \text{i n a č e} \end{cases}, \quad (8.28)$$

to je varijansa greške prognoze

$$Var[e_n(h)] = \frac{1 - \Phi_1^{2k+2}}{1 - \Phi_1^2} \sigma^2, \quad (8.29)$$

gde je  $h = sk + r + 1$ .

Slično možemo odrediti jednačinu prognoze za sezonski MA model prvog reda. Diferencna forma modela (8.6) glasi:

$$X_t = \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-s} + \theta_0, \quad (8.30)$$

gde smo uključili konstantu  $\theta_0$ . Na osnovu (8.30) funkcija prognoze je

$$\begin{aligned}\hat{X}_n(h) &= -\Theta_1 \varepsilon_{n-s+h} + \theta_0, \quad h = 1, 2, \dots, s, \\ \hat{X}_n(h) &= \theta_0, \quad h > s.\end{aligned}\quad (8.31)$$

Znači da za horizonte prognoziranja veće od perioda sezone prognozirana vrednost je jednaka sredini procesa.

Preostaje nam da na osnovu  $\psi$ -pondera ovog procesa odredimo varijansu greške prognoze. Kako je kod SMA(1)<sub>s</sub> modela:  $\psi_s = -\Theta_1$  i  $\psi_j = 0$ , inače, to je varijansa greške prognoze:

$$\text{Var}[e_n(h)] = \begin{cases} \sigma^2, & 1 \leq h \leq s \\ (1 + \Theta_1^2)\sigma^2, & h > s \end{cases}. \quad (8.32)$$

Naposletku, izložimo postupak formiranja prognoze za "vazduhoplovni" model, tj. ARIMA(0,1,1) × (0,1,1)<sub>s</sub> model. Odredimo prvo funkciju prognoze ovog modela. Na osnovu diferencne forme modela (8.8) gde smo stavili  $t = n + h$  dobijamo

$$\begin{aligned}X_{n+h} &= X_{n+h-1} + X_{n+h-s} - X_{n+h-s-1} + \\ &+ \varepsilon_{n+h} - \theta_1 \varepsilon_{n+h-1} - \Theta_1 \varepsilon_{n+h-s} + \theta_1 \Theta_1 \varepsilon_{n+h-s-1}.\end{aligned}\quad (8.33)$$

Ako potražimo uslovnu očekivanu vrednost izraza (8.33) u periodu  $n$ , dobićemo funkcija prognoze:

$$\begin{aligned}\hat{X}_n(h) &= \hat{X}_n(h-1) + \hat{X}_n(h-s) - \hat{X}_n(h-s-1) + E(\varepsilon_{n+h} | X_n, X_{n-1}, \dots) - \\ &- \theta_1 E(\varepsilon_{n+h-1} | X_n, X_{n-1}, \dots) - \Theta_1 E(\varepsilon_{n+h-s} | X_n, X_{n-1}, \dots) + \\ &+ \theta_1 \Theta_1 E(\varepsilon_{n+h-s-1} | X_n, X_{n-1}, \dots)\end{aligned}\quad (8.34)$$

gde je

$$\hat{X}_n(j) = \begin{cases} E(X_{n+j} | X_n, X_{n-1}, \dots), & j > 0 \\ X_{n+j}, & j \leq 0 \end{cases}, \quad (8.35)$$

$$E(\varepsilon_{n+j} | X_n, X_{n-1}, \dots) = \begin{cases} 0, & j > 0 \\ \hat{\varepsilon}_{n+j}, & j \leq 0 \end{cases}. \quad (8.36)$$

Prema izrazu (8.35) prognoze u prošlom periodu (kada je  $j \leq 0$ ) zamenjujemo stvarnim vrednostima opservacija, a u budućem periodu (kada je  $j > 0$ ) zamenjujemo prethodno formiranim prognozama. Slično imamo prema izrazu (8.36) da uslovnu očekivanu vrednost grešaka u prošlom periodu zamenjujemo rezidualima  $\hat{\varepsilon}_{n+j}$  ocenjenog modela, a u budućem periodu nulom.

Prema tome, funkcija prognoze "vazduhoplovnog" modela za horizont prognoziranja  $h > s + 1$  prema izrazu (8.34) pišemo u obliku

$$\hat{X}_n(h) = \hat{X}_n(h-1) + \hat{X}_n(h-s) - \hat{X}_n(h-s-1), \text{ za } h > s+1. \quad (8.37)$$

Ova funkcija predstavlja istovremeno i tzv. moguću funkciju prognoze (videti Poglavlje 6.5) "vazduhoplovnog" modela.

Da bismo odredili varijansu greške prognoze potrebno je izračunati vrednost  $\psi$ -pondera. Međutim, kako je model nestacionaran, to ćemo do ovih pondera doći posredno, tako što ćemo prvo odrediti  $\pi$ -pondere, a potom na osnovu veze  $\psi$ -pondera i  $\pi$ -pondera (izraz (6.19)) zahtevane  $\psi$ -pondere.

Izrazimo "vazduhoplovni" model u AR formi:

$$\pi(B)X_t = \varepsilon_t, \quad (8.38)$$

gde je

$$\pi(B) = (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) = \frac{(1-B)(1-B^s)}{(1-\theta_1 B)(1-\Theta_1 B^s)}, \quad (8.39)$$

pa "vazduhoplovni" model pišemo u obliku

$$(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots)(1 - \theta_1 B - \Theta_1 B^s + \theta_1 \Theta_1 B^{s+1}) = (1 - B - B^s + B^{s+1}). \quad (8.40)$$

Izjednačavajući koeficijente uz  $B^j$  dobijamo  $\pi$ -pondere:

$$\begin{aligned} \pi_j &= \theta_1^{j-1}(1 - \theta_1), \quad 1 \leq j \leq s-1, \\ \pi_s &= \theta_1^{s-1}(1 - \theta_1) + (1 - \Theta_1), \\ \pi_{s+1} &= \theta_1^s(1 - \theta_1) + (1 - \theta_1)(1 - \Theta_1), \\ \pi_j &= \theta_1 \pi_{j-1} + \Theta_1 \pi_{j-s} - \theta_1 \Theta_1 \pi_{j-s-1}, \quad j \geq s+2. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Naposletku, na osnovu izraza (6.19) određujemo vrednosti  $\psi$ -pondera:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_2 = \dots = \psi_{s-1} = 1 - \theta_1, \\ \psi_s &= 2 - \theta_1 - \Theta_1, \\ \psi_{s+1} &= \psi_{s+2} = \dots = \psi_{2s-1} = (1 - \theta_1)(1 - \Theta_1), \\ \psi_{2s} &= (1 - \theta_1)(2 - \Theta_1) + (1 - \Theta_1), \\ \psi_{2s+1} &= \psi_{2s+2} = \dots = \psi_{3s-1} = (1 - \theta_1)(3 - 2\Theta_1), \\ \psi_{3s} &= (1 - \theta_1)(3 - 2\Theta_1) + (1 - \Theta_1), \end{aligned} \quad (8.42)$$

odnosno u opštem slučaju dobijamo

$$\begin{aligned} \psi_{rs+1} &= \psi_{rs+2} = \dots = \psi_{(r+1)s-1} = (1 - \theta_1)(r + 1 - r\Theta_1), \\ \psi_{(r+1)s} &= (1 - \theta_1)(r + 1 - r\Theta_1) + (1 - \Theta_1). \end{aligned} \quad (8.43)$$



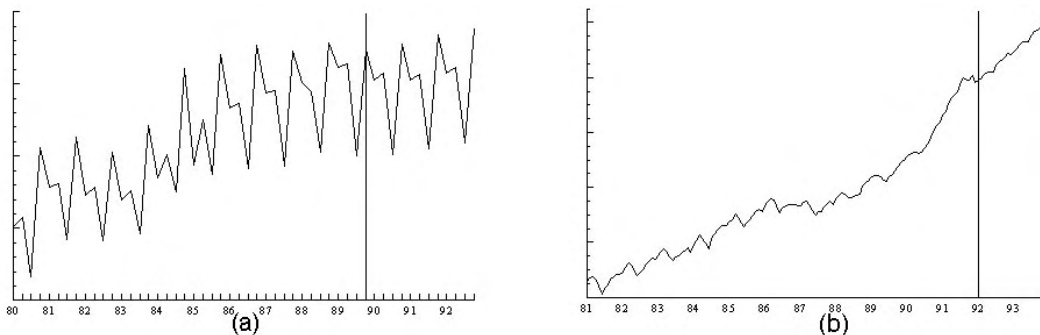
Na osnovu izračunatih vrednosti  $\psi$  – pondera, korišćenjem izraza (6.12) određujemo vrednost varijanse greške prognoze "vazduhoplovnog" modela. Naposljetku, interval poverenja prognoze računamo na osnovu izraza (6.13).

U naredna dva primera ilustrovaćemo formiranje prognoze na osnovu ocenjenih ARIMA modela. U prvom primeru polazimo od modela čije smo koeficijente ocenili koristeći sve raspoložive opservacije, a prognozu formiramo za period van uzorka. Koristimo samo grafički prikaz da bi ukazali na kretanje prognoziranje serije u odnosu na raspoložive opservacije na osnovu kojih smo ocenili modele.

U drugom primeru detaljno se prikazuje postupak formiranja i analiza kvaliteta prognoza dva modela koja smo ocenili za seriju kvartalne industrijske proizvodnje u Srbiji (serija S10). U ovom primeru ostavili smo opservacije iz poslednje dve godine (8 kvartala) radi provere kvaliteta prognoze dva alternativna modela.

**Primer 8.4** Na osnovu ocenjenih modela iz Primera 8.1 i 8.2 formirati prognozu za 12 kvartala unapred za seriju kvartalne industrijske proizvodnje u Srbiji (serija S10) počevši od poslednjeg kvartala 1989. godine i za 24 meseca unapred za seriju mesečne nezaposlenosti u bivšoj Jugoslaviji (serija S16) počevši od poslednjeg meseca 1991. godine.

Korišćenjem programa *RATS 3.0* formirali smo traženu prognozu za dve serije na osnovu ranije ocenjenih modela. Za seriju kvartalne industrijske proizvodnje u Srbiji (serija S10) ocenjen je  $ARIMA(0,1,1) \times (0,1,2)_4$  model. Na osnovu tog modela, počevši od poslednjeg kvartala 1989. godine formiramo prognozu za 12 kvartala unapred. Na Slici 8.5(a) prikazane su stvarne vrednosti vremenske serije za period od prvog kvartala 1980. godine do četvrtog kvartala 1989. godine, a prognozirane vrednosti od prvog kvartala 1990. godine do četvrtog kvartala 1992. godine.



**Slika 8.5** Prognoze na osnovu ocenjenih ARIMA modela: (a) kvartalna industrijska proizvodnja u Srbiji i (b) mesečna nezaposlenost u bivšoj Jugoslaviji

Za seriju mesečne nezaposlenosti u bivšoj Jugoslaviji (serija S16) ocenjen je  $ARIMA(0,1,2) \times (0,1,1)_{12}$  model. Na osnovu tog modela, počevši od

poslednjeg meseca 1991. godine formiramo prognozu za 24 meseca unapred. Na Slici 8.5(b) prikazane su stvarne vrednosti vremenske serije za period od prvog meseca 1981. godine do 12. meseca 1991. godine, a prognozirane vrednosti od prvog meseca 1992. godine do 12. meseca 1993. godine.

Na Slici 8.5 vertikalne linije razdvajaju stvarne vrednosti opservacija od prognoziranih vrednosti. Kod serije kvartalne industrijske proizvodnje u Srbiji prvi kvartal 1990. godine predstavlja prvi period za koji formiramo prognozu, a kod serije mesečne nezaposlenosti to je januar 1992. godine. ■

**Primer 8.5** Za seriju kvartalne industrijske proizvodnje u Srbiji (serija S10) ponovo oceniti dva modela iz Primera 8.1, na osnovu opservacija u periodu od drugog kvartala 1973. do poslednjeg kvartala 1987. godine. Opservacije iz poslednje dve godine (1988 i 1989. godine) ostaviti za analizu kvaliteta prognoziranja. Na osnovu ocenjenih modela formirati prognozu za 8 kvartala unapred počevši od poslednjeg kvartala 1987. godine.

Prvo smo korišćenjem programa *RATS 3.0* ponovo ocenili dva modela iz Primera 8.1 na osnovu opservacija iz perioda 1973/II-1987/IV:

$$\Delta\Delta_4 X_t = (1 - 0.3467B)(1 - 0.5438B^4)\varepsilon_t, \hat{\sigma} = 0.02527, Q_{21} = 12.25$$

$$\Delta\Delta_4 X_t = (1 - 0.3167B)(1 - 0.3713B^4 - 0.2687B^8)\varepsilon_t, \hat{\sigma} = 0.02458, \\ Q_{21} = 9.15$$

Poređenjem vrednosti koeficijenata u modelu koji je ocenjen na osnovu svih raspoloživih opservacija (Primer 8.1) i gornjih ocena (ocene su dobijene bez korišćenja poslednjih osam opservacija) može se konstatovati njihova relativna stabilnost.

Redni broj opservacije iz 1987/IV je 59. Upravo smo, počevši od tog perioda, formirali prognoze sa maksimalnom dužinom horizonta prognoziranja jednako 8. Kako prvi ARIMA model predstavlja "vazduhoplovni" model, prema izrazu (8.34) jednačinu prognoze tog ARIMA modela pišemo u obliku

$$\hat{X}_{59}(h) = \hat{X}_{59}(h-1) + \hat{X}_{59}(h-4) - \hat{X}_{59}(h-5) + \\ + E(\varepsilon_{59+h} | X_{59}, X_{58}, \dots) - 0.3467E(\varepsilon_{59+h-1} | X_{59}, X_{58}, \dots) - \\ - 0.5438E(\varepsilon_{59+h-4} | X_{59}, X_{58}, \dots) + 0.1885E(\varepsilon_{59+h-5} | X_{59}, X_{58}, \dots).$$

Na primer, za  $h=1$  prognoza za prvi kvartal 1988. godine je

$$\hat{X}_{59}(1) = X_{59} + X_{56} - X_{55} - 0.3467\hat{\varepsilon}_{59} - 0.5438\hat{\varepsilon}_{56} + 0.1885\hat{\varepsilon}_{55}.$$

Za  $h = 2$  prognoza za drugi kvartal 1988. godine je

$$\hat{X}_{59}(2) = \hat{X}_{59}(1) + X_{57} - X_{56} + 0.1885\hat{\varepsilon}_{56}.$$

Nastavljajući na isti način postupak izračunavanja, za  $h = 5$ , prognoza za prvi kvartal 1989. godine je

$$\hat{X}_{59}(5) = \hat{X}_{59}(4) + \hat{X}_{59}(1) - X_{59} + 0.1885\hat{\varepsilon}_{59}.$$

Naposletku za  $h = 6$ , dobijamo sledeći izraz za prognozu, a slična forma važi i za naredne vrednosti  $h$ :

$$\hat{X}_{59}(6) = \hat{X}_{59}(5) + \hat{X}_{59}(2) - \hat{X}_{59}(1).$$

Za drugi model jednačina prognoze je

$$\begin{aligned} \hat{X}_{59}(h) = & \hat{X}_{59}(h-1) + \hat{X}_{59}(h-4) - \hat{X}_{59}(h-5) + \\ & + E(\varepsilon_{59+h} | X_{59}, X_{58}, \dots) - 0.3167E(\varepsilon_{59+h-1} | X_{59}, X_{58}, \dots) - \\ & - 0.3713E(\varepsilon_{59+h-4} | X_{59}, X_{58}, \dots) - 0.2687E(\varepsilon_{59+h-8} | X_{59}, X_{58}, \dots) + \\ & - 0.1176E(\varepsilon_{59+h-5} | X_{59}, X_{58}, \dots) + 0.0851E(\varepsilon_{59+h-9} | X_{59}, X_{58}, \dots). \end{aligned}$$

Prognozirane vrednosti za drugi model na osnovu ove jednačine formiramo na isti način kao što je to detaljno urađeno sa prvim modelom. Kako je serija kvartalne industrijske proizvodnje u Srbiji prethodno logaritmovana, to smo nakon formiranja prognoze (brojne i intervalne ocene) na osnovu dva modela, dobijene vrednosti izrazili u originalnim jedinicama mere. Za oba modela prognozirane vrednosti za period 1988/I-1989/IV zajedno sa vrednostima reziduala modela prikazali smo u Tabeli 8.8. U donjem delu tabele dati su i pokazatelji kvaliteta prognoze (za definiciju videti Poglavlje 1.3). Na Slici 8.6 prikazali smo sledeće podatke iz Tabele 8.8: stvarnu vrednost industrijske proizvodnje i njenu prognozu (brojna ocena kao i vrednost donje i gornje granice 95% intervala prognoze) na osnovu dva modela. Nešto niže je detaljno objašnjen postupak izračunavanja varijanse greške prognoze i intervalne ocene za ova dva ARIMA modela.

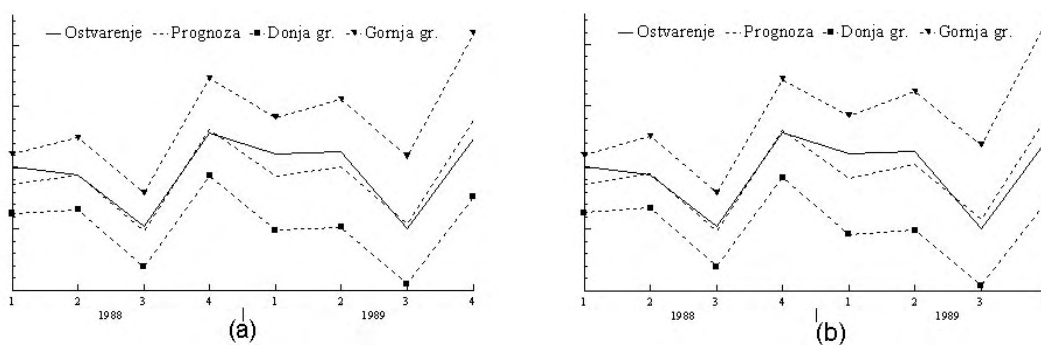
Prezentirani rezultati ukazuju na to da oba modela relativno uspešno prognoziraju buduće vrednosti industrijske proizvodnje. To se sa grafika na Slici 8.6 može jasno sagledati. Za oba modela u Primeru 8.1 je konstatovano da su adekvatna. Na istom mestu je sugerisano da konačan sud o valjanosti modela donosimo na osnovu njegove sposobnosti da

formira prognoze sa malom greškom. Zato smo preduzeli dalju analizu kvaliteta prognoze ova dva modela. Dobijena je pozitivna vrednost sredine reziduala oba modela. Ovaj podatak nam ukazuje da modeli podcenjuju stvarne vrednosti industrijske proizvodnje. Pri tome prvi model to čini u većoj meri u odnosu na drugi.

Tabela 8.8 Stvarna, prognozirana vrednost i reziduali dva modela

Korak prognoze	Stvarna vrednost	ARIMA(0,1,1)x(0,1,1) <sub>4</sub> model				ARIMA(0,1,1)x(0,1,2) <sub>4</sub> model				
		Prognoza	95% interval prognoze		Reziduali modela	Prognoza	95% interval prognoze		Reziduali modela	
			leva g.	desna g.			leva g.	desna g.		
1	100.20	97.29	92.58	102.23	2.91	97.27	92.69	102.07	2.93	
2	98.87	98.86	93.18	104.88	0.01	99.09	93.48	105.05	-0.23	
3	90.47	89.66	83.82	95.92	0.80	89.74	83.92	95.96	0.73	
4	105.73	106.37	98.70	114.63	-0.64	106.08	98.45	114.30	-0.35	
5	102.30	98.61	89.87	108.20	3.69	98.35	89.18	108.46	3.95	
6	102.73	100.20	90.30	111.19	2.53	100.50	89.89	112.37	2.23	
7	90.10	90.88	81.07	101.88	-0.78	91.58	80.91	103.64	-1.48	
8	104.70	107.81	95.28	121.99	0.00	108.52	94.83	124.19	-3.82	
<b>Sredina reziduala modela</b>					0.678	<b>0.497</b>				
<b>Srednja kvadratna greška prognoze</b>					4.987	<b>5.834</b>				
<b>Srednja apsolutna greška prognoze</b>					1.810	<b>1.964</b>				

Od pokazatelja tačnosti prognoze naveli smo srednje kvadratne greške prognoze (računate na osnovu izraza (1.5)) i srednje apsolutne greške prognoze (računate na osnovu izraza (1.6)). Prema ovim pokazateljima prednost treba dati prvom modelu u odnosu na drugi. Naime, oba su pokazatelja kod njega niža u odnosu na odgovarajuće pokazatelje drugog modela.



Slika 8.6 Prognoze kvartalne industrijske proizvodnje u Srbiji: (a) ARIMA(0,1,1)x(0,1,1)<sub>4</sub> model i (b) ARIMA(0,1,1)x(0,1,2)<sub>4</sub> model

Medutim, interesantno je istaći da drugi model ima uži interval prognoze za horizont prognoze do 4 perioda, a za horizont prognoze duži od 4 perioda prvi model ima užu interval prognoze. Dakle, korišćenjem

pokazatelja tačnosti prognoze kao kriterijuma izbora alternativnih modela opredelili bi se za prvi  $ARIMA(0,1,1) \times (0,1,1)_4$  model ukoliko je duži horizont prognoze, a za kraći horizont prognoze prednost se daje  $ARIMA(0,1,1) \times (0,1,2)_4$  modelu.

Nakon formiranja prognoze odredićemo prvo vrednosti  $\pi$ -pondera, a potom i  $\psi$ -pondera koji figurišu u izrazu za varijansu greške prognoze. Za "vazduhoplovni" model prema izrazu (8.41) izračunavamo vrednosti  $\pi$ -pondera, a na osnovu izraza (8.42) i (8.43) vrednosti  $\psi$ -pondera. Izračunate vrednosti prikazali smo u Tabeli 8.9.

**Tabela 8.9** Vrednosti pondera dva modela

Korak prognoze	ARIMA(0,1,1)x(0,1,1) <sub>4</sub> model		ARIMA(0,1,1)x(0,1,2) <sub>4</sub> model	
	$\pi$ – ponderi	$\psi$ – ponderi	$\pi$ – ponderi	$\psi$ – ponderi
1	0.65	0.65	0.68	0.68
2	0.23	0.65	0.22	0.68
3	0.08	0.65	0.07	0.68
4	0.48	1.11	0.65	1.31
5	0.00	0.95	-0.42	1.11
6	-0.10	0.95	-0.13	1.11
7	-0.03	0.95	-0.04	1.11
8	0.24	1.41	-0.05	1.47

Slično postupku izračunavanja vrednosti  $\pi$ -pondera kod "vazduhoplovnog modela" koji je definisan izrazima (8.38)-(8.40), određujemo i vrednosti  $\pi$ -pondera za drugi ARIMA model. Prema predloženom postupku dobijamo opšte izraze za  $\psi$ -pondere:

$$\pi_j = \theta_1^{j-1}(1 - \theta_1), \quad 1 \leq j \leq 3,$$

$$\pi_4 = \theta_1^3(1 - \theta_1) + (1 - \Theta_1),$$

$$\pi_5 = \theta_1^4(1 - \theta_1) + (1 - \theta_1)(1 - \Theta_1),$$

$$\pi_j = \theta_1 \pi_{j-1} + \Theta_1 \pi_{j-4} - \theta_1 \Theta_1 \pi_{j-5}, \quad j = 6, 7,$$

$$\pi_8 = \theta_1 \pi_7 + \Theta_1 \pi_4 - \theta_1 \Theta_1 \pi_3 - \Theta_2,$$

$$\pi_9 = \theta_1 \pi_8 + \Theta_1 \pi_5 - \theta_1 \Theta_1 \pi_4 + \Theta_2 \pi_1 + \theta_1 \Theta_1,$$

$$\pi_j = \theta_1 \pi_{j-1} + \Theta_1 \pi_{j-4} - \theta_1 \Theta_1 \pi_{j-5} + \Theta_2 \pi_{j-8} - \theta_1 \Theta_1 \pi_{j-9}, \quad j \geq 10.$$

Na osnovu gornjih  $\pi$ -pondera, a korišćenjem izraza (6.19) izračunavamo vrednosti  $\psi$ -pondera. Izračunate vrednosti smo prezentirali u Tabeli 8.9. Varijansa greške prognoze računa se prema poznatom izrazu (6.12). Tako je za  $h=1$  varijansa greške prognoze prvog modela:

$$\text{Var}[e_{59}(1)] = \hat{\sigma}^2 = 0.02527,$$

za  $h = 2$

$$\text{Var}[e_{59}(2)] = \hat{\sigma}^2(1 + \psi_1^2) = 0.02527(1 + 0.65^2) = 0.03595,$$

za  $h = 3$

$$\text{Var}[e_{59}(3)] = \hat{\sigma}^2(1 + \psi_1^2 + \psi_2^2) = 0.02527(1 + 0.65^2 + 0.65^2) = 0.04662$$

Ostale vrednosti varijanse greške prognoze određuju se na sličan način. Na osnovu formirane prognoze, kao i izračunate vrednosti varijanse greške prognoze možemo formirati 95% interval prognoze na osnovu izraza (6.13). Za  $h = 1$  dobijamo 95% interval prognoze prvog modela:

$$\hat{X}_{59}(1) \pm 1.96\hat{\sigma}; X_{60} \in (4.5283, 4.6272),$$

za  $h = 2$

$$\hat{X}_{59}(2) \pm 1.96\hat{\sigma}\sqrt{(1 + \psi_1^2)}; X_{61} \in (4.5345, 4.6528).$$

Ostali 95% intervali prognoze određuju se na sličan način. Još jednom napominjemo da se ocenjeni model, greška ocenjenog modela, pa time i varijansa greške prognoze odnose na vremensku seriju logaritama industrijske proizvodnje u Srbiji. Kada se na osnovu gore određenih vrednosti varijanse greške prognoze izračunaju 95% intervali prognoze oba modela, tada se antilogaritmovanjem dobijaju vrednosti leve i desne granice intervala prognoze prvobitne kvartalne serije industrijske proizvodnje u Srbiji. Tako se na osnovu gornja dva izračunata 95% intervala prognoze dobijaju sledeća dva 95% intervala prognoze prvobitne serije:

$$X_{60} \in (92.58, 102.23) \text{ i } X_{61} \in (93.18, 104.88).$$

Na sličan način se određuju preostali 95% intervali prognoze prvog i drugog modela prvobitne kvartalne serije industrijske proizvodnje u Srbiji. Upravo te vrednosti 95% intervala prognoze prikazane su u Tabeli 8.8. ■

## 8.5 VEZA A R I M A I STRUKTURNIH MODELA VREMENSKIH SERIJA

Kao što je ukazano u 3. Glavi, preteče strukturalnih modela su intuitivno utemeljeni. U okviru ovog poglavlja ukazaćemo i na njihovu teorijsku utemeljenost. Pokazaćemo za koje stohastičke procese iz klase ARIMA procesa ti modeli daju optimalno predviđanje. Zbog ove veze između ARIMA i strukturalnih modela često se sugerije da se modeli eksponencijalnog izravnjanja jednostavno zanemare upravo zato što su samo specijalni slučajevi ARIMA modela. Tako je na primer pokazano da su ARIMA modeli redukovane forme određenih strukturalnih modela (Harvey (1984)). Međutim, ova dva pristupa suštinski se razlikuju kada se ima u vidu njihova osnovna ideja kao i kriterijumi koji se koriste pri gradnji modela. Zbog toga nam je blisko stanovište da

nam korišćenje i jednog i drugog pristupa pomaže u boljem razumevanju procesa koji je generisao vremensku seriju.

Da bismo pokazali vezu eksponencijalnog izravnjanja i jedne klase ARIMA modela poćićemo od ranije definisanog ARIMA(0,1,1) modela (izraz (5.19)). Ako je posmatrani proces invertibilan, tada je

$$\begin{aligned} \frac{1-B}{1-\theta_1 B} &= (1-B)(1+\theta_1 B+\theta_1^2 B^2+\dots) \\ &= 1+\theta_1 B+\theta_1^2 B^2+\dots-B-\theta_1 B^2-\dots \\ &= 1-(1-\theta_1)B-(1-\theta_1)\theta_1 B^2-(1-\theta_1)\theta_1^2 B^3-\dots \\ &= 1-\alpha B-\alpha(1-\alpha)B^2-\alpha(1-\alpha)^2 B^3-\dots \end{aligned} \quad (8.44)$$

gde je  $\alpha = 1 - \theta_1$ , pa dobijamo da AR reprezentacija ARIMA(0,1,1) modela glasi

$$X_t = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} (1-\alpha)^{j-1} X_{t-j} + \varepsilon_t. \quad (8.45)$$

Na osnovu poznatog rezultata iz teorije prognoziranja, predviđanje za jedan korak unapred sa minimalnom srednje kvadratnom greškom prognoze glasi

$$\hat{X}_{n-1}(1) = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} (1-\alpha)^{j-1} X_{n-j}. \quad (8.46)$$

Znači da je optimalna prognoza od  $X_n$  formirana u periodu  $(n-1)$  pokretni prosek prošlih vrednosti  $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots$ , sa eksponencijalno opadajućim ponderima. Kako je u periodu  $n$

$$\begin{aligned} \hat{X}_n(1) &= \alpha \sum_{j=1}^{\infty} (1-\alpha)^{j-1} X_{n+1-j} \\ &= \alpha X_n + (1-\alpha)\alpha \sum_{j=2}^{\infty} (1-\alpha)^{j-2} X_{n+1-j} \\ &= \alpha X_n + (1-\alpha)\alpha \sum_{i=1}^{\infty} (1-\alpha)^{i-1} X_{n-i} \\ &= \alpha X_n + (1-\alpha)\hat{X}_{n-1}(1). \end{aligned} \quad (8.47)$$

to znači da je prognozirana vrednost za prvi budući period  $(n+1)$  jednaka ponderisanoj sredini poslednje raspoložive opservacije u periodu  $n$  i prognozirane vrednosti formirane u prethodnom periodu  $(n-1)$ . Konstanta  $\alpha$  naziva se konstanta izravnjanja, a izraz (8.47) koristili smo kod jednostavnog eksponencijalnog izravnjanja. To znači da je jednostavno eksponencijalno izravnjanje optimalan metod prognoziranja u slučaju da je  $X_t$  generisano ARIMA(0,1,1) procesom kod koga je konstanta izravnjanja jednaka

$1 - \theta_1$ . Ukazali smo na to da je ARIMA(0,1,1) proces invertibilan uz uslov  $|\theta_1| < 1$ . Uz ovaj uslov, a na osnovu veze koeficijenta  $\theta_1$  i konstante izravnjanja  $\alpha$ , sugeriše nam se interval mogućih vrednosti za konstantu izravnjanja, pa je barem teorijski:  $0 < \alpha < 2$ .

Ukažimo ukratko na veze ostalih strukturnih modela i ARIMA modela. Tako se za nesezonski Holt-Wintersov model (model HW u Tabeli 3.5) može se pokazati, korišćenjem rekurzivnih izraza za nivo, odnosno trend, da je ekvivalentan ARIMA(0,2,2) procesu:

$$(1-B)^2 X_t = (1 - (2 - \alpha - \alpha\gamma)B - (\alpha - 1)B^2)\varepsilon_t, \quad (8.48)$$

Na osnovu izraza za opšti ARIMA(0,2,2) proces:

$$(1-B)^2 X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)\varepsilon_t, \quad (8.49)$$

možemo odrediti vrednosti dve konstante izravnjanja  $\alpha = 1 + \theta_2$  i  $\gamma = (1 - \theta_1 - \theta_2)/(1 + \theta_2)$ . Kod postupka dvostrukog eksponencijalnog izravnjanja (Brownovi modeli) možemo uspostaviti vezu između koeficijenta izravnjanja i koeficijenata ARIMA(0,2,2) modela. Tako su koeficijenti ARIMA(0,2,2) modela  $\theta_1 = 2(1 - \alpha)$  i  $\theta_2 = (1 - \alpha)^2$ , pri čemu imamo ograničenje  $\theta_1^2 + 4\theta_2 = 0$ .

U opštem slučaju, kada je serija generisana ARIMA(0,  $k$ ,  $k$ ) procesom, optimalna prognoza formira se na osnovu eksponencijalnog izravnjanja  $k$ -tog reda. Roberts (Roberts) (1982) je pokazao za modele sa prigušenim trendom (videti Tabelu 3.11) da su optimalni za ARIMA(1,1,2) proces:

$$(1-B)(1 - \phi B)X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)\varepsilon_t, \quad (8.50)$$

pri čemu je veza između koeficijenata tog ARIMA procesa i odgovarajućeg strukturnog modela iskazana sledećim jednačinama:  $\theta_1 = 1 + \phi - \alpha - \phi\alpha\gamma$  i  $\theta_2 = -\phi(1 - \alpha)$ .

Za aditivnu varijantu sezonskog Holt-Wintersovog modela pokazano je (videti na primer Granger i Newbold (1977, ss. 170-172)) da generiše optimalnu prognozu ukoliko seriji odgovara ARIMA proces

$$(1-B)(1 - B^s)X_t = \theta_{s+1}(B)\varepsilon_t, \quad (8.51)$$

gde je

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 1 - \alpha - \alpha\gamma, \\ \theta_2 &= \dots = \theta_{s-1} = -\alpha\gamma, \\ \theta_s &= 1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\delta, \\ \theta_{s+1} &= -(1 - \alpha)(1 - \delta). \end{aligned} \quad (8.52)$$

Ako je  $\gamma = 0$ , odnosno trend je konstantan, koeficijenti ARIMA procesa (8.51) su

$$\theta_1 = 1 - \alpha,$$



$$\begin{aligned}\theta_2 &= \dots = \theta_{s-1} = 0, \\ \theta_s &= 1 - (1 - \alpha)\delta, \\ \theta_{s+1} &= -(1 - \alpha)(1 - \delta).\end{aligned}\tag{8.53}$$

Znači da se za  $\theta_1\theta_s + \theta_{s+1} = 0$ , ili ekvivalentno za  $2 - 2\delta + \alpha\delta = 0$ , model svodi na  $\text{ARIMA}(0,1,1) \times (0,1,1)_s$  model, što predstavlja tzv. "vazduhoplovni" model. Isti rezultat, odnosno model dobićemo ako su u izrazu (8.51)  $\alpha\gamma$  i  $\alpha\delta$  zanemarljivo mali. Što se multiplikativnog Holt-Wintersovog sezonskog modela tiče za njega nije definisan ekvivalentan ARIMA proces.

McKenzie (Mekenzi) (1976) je pokazao da je opšte eksponencijalno izravnjanje ekvivalentno ARIMA procesu:

$$\phi_k(B)X_t = \theta_k(\omega B)\varepsilon_t,\tag{8.54}$$

gde je  $\theta(B)$  karakteristični polinom matrice  $\mathbf{L}$  iz izraza (3.21) i  $\phi_i = \theta_{k-i}/\theta_k$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Ako ne postoje eksponencijalni članovi među funkcijama koje prilagođavamo, tada je  $\phi(B) = \theta(B)$ , pa je u tom slučaju od posebnog interesa ekvivalentni ARIMA proces:

$$\phi_k(B)X_t = \phi_k(\omega B)\varepsilon_t.\tag{8.55}$$

Ako je na primer jednačina prognoze opšteg eksponencijalnog izravnjanja:

$$\hat{X}_t(h) = b_{1t} + b_{2t}h + b_{3t}\sin(\lambda h) + b_{4t}\cos(\lambda h),\tag{8.56}$$

to znači da su funkcije koje prilagođavamo:  $f_1(h) = 1$ ,  $f_2(h) = h$ ,  $f_3(h) = \sin(\lambda h)$  i  $f_4(h) = \cos(\lambda h)$ . Kako je  $(1 - B)f_1(h) = 0$ ,  $(1 - B)^2 f_2(h) = 0$ ,  $[1 - 2\cos(\lambda)B + B^2]f_3(h) = 0$  za  $i = 3$  i  $4$ , ekvivalentni ARIMA proces je

$$(1 - B)^2[1 - 2\cos(\lambda)B + B^2]X_t = (1 - \omega B)^2[1 - 2\cos(\lambda)\omega B + \omega^2 B^2]\varepsilon_t.\tag{8.57}$$

Na osnovu ovog opšteg rezultata mogu se za specifične modele opšteg eksponencijalnog izravnjanja izvesti ekvivalentni ARIMA procesi.

Kao što je rečeno u Poglavlju 3.6, osnovni strukturni model zavisi od četiri slučajne greške. Ako se komponente strukturnog modela koje sadrže ove slučajne greške kombinuju tako da dobijemo model sa jednom slučajnom greškom, kažemo da smo strukturni model izrazili u redukovanoj formi. Ta redukovana forma strukturnog modela predstavlja ARIMA model, a činjenica da je izveden iz strukturne forme impliciraće ograničenja na njegove koeficijente. Ukoliko se ta ograničenja ne nameću prilikom prilagođavanja ARIMA modela određenog reda kažemo da se radi o redukovanoj formi modela bez ograničenja.

Za osnovni strukturni model Harvey (1989, s. 69) je pokazao da je njegova redukovana forma takva da je proces  $(1 - B)(1 - B^s)X_t$  ekvivalentan  $\text{MA}(s+1)$  procesu.

To znači da redukovana forma bez ograničenja na parametre sadrži  $s+2$  koeficijenta, u odnosu na samo četiri koeficijenta kod strukturne forme modela.

## 8.6 DESEZONIRANJE

Klasična analiza sezonskih vremenskih serija<sup>2</sup> zasnovana je na razlaganju vremenske serije na trend, ciklus, sezonu i iregularnu komponentu<sup>3</sup>. Od njenih najranijih dana pažnja je uglavnom usmeravana na postupke otklanjanja sezonske komponente. Ovaj postupak se naziva *sezonsko izravnjanje* (engl. *seasonal adjustment*) ili *desezoniranje*. Eliminacijom sezonske komponente prevashodno se želelo omogućiti izučavanje suštinskih nesezonskih karakteristika vremenske serije, kao što su prisustvo ciklusa i trenuci njegovog preokreta, zatim, prisustvo neočekivanih događaja i sl. Navedene informacije imaju svoju vrednost ne samo sa stanovišta istorijske ekonomske analize proteklih događaja, nego i zbog utvrđivanja tekućih privrednih uslova. One kreatorima ekonomske politike omogućavaju preduzimanje pravovremenih mera u cilju stabilizovanja tekućih privrednih kretanja. Istovremeno prosečni korisnici lakše interpretiraju desezonirane podatke, no serije kod kojih su ostale komponente "zamagljene" prisustvom sezonske komponente.

Dva su pristupa desezoniranju vremenskih serija. Prvi je zasnovan na korišćenju pokretnih proseka za ocenu trend-ciklus komponente i sezonske komponente. Ocenjena sezonska komponenta se potom izdvaja iz serije, da bi "ostatak" serije tretirali kao desezoniranu seriju. Ovaj *empirijski pristup* pretrpeo je brojne izmene, a mi ćemo se detaljnije zadržati na najpoznatijoj pod nazivom *metod X-11*, odnosno jednoj od poznatijih varijanti *X-11-ARIMA*.

Drugi pristup je tzv. *modelski pristup* i zasnovan je na izdvojenom modeliranju sezonske i nesezonske komponente vremenske serije korišćenjem ARIMA ili strukturnih modela.

### 8.6.1 Empirijski pristup desezoniranju: X-11-ARIMA

Nesumljivo je da metod X-11 Shiskina (Šiškin) i dr. (1967) predstavlja jedan od najpoznatijih metoda za desezoniranje vremenskih serija. Veliki broj zvaničnih institucija različitih država redovno publikuje desezonirane podatke dobijene korišćenjem jedne od varijanti ovog metoda. Radi se u stvari o računarskom programu kojim se vrši desezoniranje jedne vremenske serije. Pojednostavljeno rečeno osnovu ovog metoda čini

---

<sup>2</sup> Isto važi i za analizu zasnovanu na strukturnim modelima. Međutim, kod ovih potonjih svaka od komponenti na koje se razlažu opservacije vremenske serije bazirana je na eksplicitnom statističkom modelu. Detaljnije o metodi razlaganja vremenske serije i strukturnim modelima videti u 3. Glavi.

<sup>3</sup> Prvobitno su trend i ciklična komponenta posmatrane razdvojeno. Međutim, u poslednje vreme one se posmatraju zajedno, tj. kao jedna komponenta. Zato se u daljem tekstu govori o trend-ciklus komponenti. Takođe napominjemo da za potrebe otklanjanja sezonske komponente sasvim je dovoljno opservacije vremenske serije razložiti na dve komponente: sezonsku i nesezonsku (u koje spadaju sve ostale komponente).

višestruko korišćenje skupa simetričnih i asimetričnih pokretnih proseka. Pri tome se za ocenu trend-ciklus komponente koriste Hendersonovi pokretni proseci. Istovremeno je u metod X-11 ugrađen i postupak tretmana vremenske serije s obzirom na prisustvo nestandardnih opservacija kao i kompoziciju kalendara (broj radnih dana, praznici i sl.).

Korisnik programa može prepustiti programu da se automatski izaberu pojedini parametri metode s obzirom na karakteristike konkretne vremenske serije. Tako na primer, program automatski vrši izbor reda Hendersonovog pokretnog proseka. Sa druge strane, korisnik može uticati na skoro svaki korak u postupku desezoniranja. Tako na primer može nametnuti izbor određenog reda Hendersonovog pokretnog proseka, zatim korišćenje određenog tipa modela desezoniranja (aditivan ili multiplikativan model), eliminaciju ekstremnih vrednosti iz dalje analize itd.

Kao rezultat primene ovog programa dobija se po želji veliki broj tabela koje prezentiraju sve međurezultate analize do finalne ocene trend-ciklusa, desezonirane serije, sezonskih faktora, iregularne komponente itd. Dobijaju se i brojne sumarne statistike na osnovu kojih možemo izvesti zaključke o kvalitetu postupka desezoniranja i karakteristikama vremenske serije.

Metod X-11 se pokazao kao relativno uspešan u postupku desezoniranja vremenskih serija. Nažalost, njegovi nedostaci vezani su pre svega za korišćenje pokretnih proseka u postupku ocene trend-ciklusa. Kako se u tim pokretnim prosecima koristi uvek isti skup pondera za sve vremenske serije bez obzira na njihove individualne karakteristike, očita je nefleksibilnost ovog postupka desezoniranja. Drugi nedostatak ovog metoda posledica je nemogućnosti primene simetričnih ponderisanih proseka na krajevima serije koja se desezonira. Zato se na poslednje opservacije primenjuje asimetričan skup pondera. Posledica ovakvog tretmana poslednjih opservacija je da nakon prispeća nove opservacije vremenske serije dolazi do znatne revizije ocene trend-ciklus komponente kao i desezone serije.

Drugi navedeni nedostatak ovog metoda pokušao se prevazići na taj način što bi se serija "produžila", čime bi se stvorili uslovi za primenu simetričnih pokretnih proseka. Za očekivati je da će novodobijene ocene trend-ciklus komponente i desezonirane serije na osnovu "produžene" serije biti manje podložne reviziji nakon što nova opservacija postane dostupna. Najpoznatiju izmenu metoda X-11 u gore navedenom smislu predložila je Dagum (Degum) (1975) i nazvala je *metodom X-11-ARIMA*. Osnov ove metode je u izgradnji ARIMA modela vremenske serije koji se potom koristi za prognoziranje bar za jednu godinu unapred. Ovim prognozama se "produžava" analizirana vremenska serija, pa se postupak, koji je u osnovi metoda X-11 primenjuje na tako "produženu" vremensku seriju.

Na osnovu analize velikog broja ekonomskih vremenskih serija autori su u program X-11-ARIMA ugradili mogućnost automatskog izbora iz skupa raspoloživih sezonskih ARIMA modela:  $\log(0,1,1) \times (0,1,1)_s$ ,  $\log(0,2,2) \times (0,1,1)_s$ ,  $(2,1,2) \times (0,1,1)_s$  (za multiplikativne metod desezoniranja) i  $(0,1,1) \times (0,1,1)_s$ ,  $(0,2,2) \times (0,1,1)_s$  i  $(2,1,2) \times (0,1,1)_s$  (za aditivni metod desezoniranja). Korisniku je ostavljen izbor između

modela koji je program automatski izabrao i određenog sezonskog ARIMA modela koji prema prethodnim istraživanjima želi koristiti u postupku "produžavanja" vremenske serije. Preporuka je da se pre specifikacije ARIMA modela serija prethodno "očisti" od prisustva ekstremnih vrednosti.

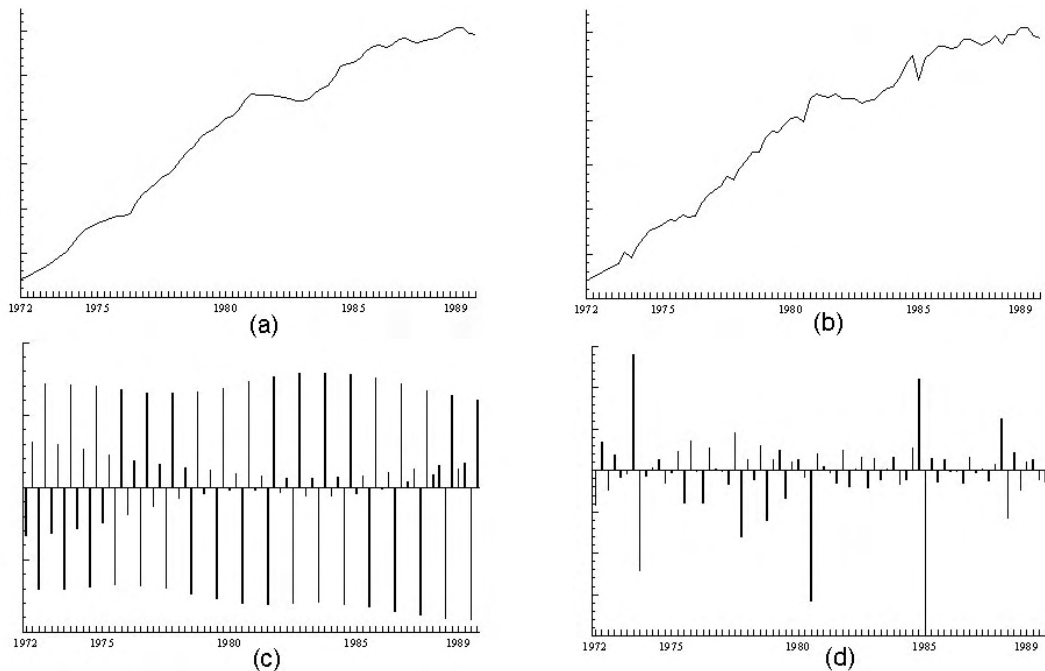
**Primer 8.6** Izvršiti desezoniranje kvartalne vremenske serije industrijske proizvodnje u Srbiji (serija S10).

Korišćenjem programa *X11-ARIMA* izvršeno je desezoniranje vremenske serije, a rezultati su prikazani na Slici 8.7. Pri tome je izabran multiplikativan model desezoniranja, a programu je prepušteno da izabere odgovarajući ARIMA model radi "produženja" serije kao i red Hendersonovog pokretnog proseka. Program je izabrao "vazduhoplovni" model uz logaritamsku transformaciju originalne serije, dakle isti model kao što smo i mi izabrali u Primeru 8.1, a opredelio se za 5-o člane Hendersonove pokretne proseke.

Dobijeni su sledeći rezultati. Trend-ciklus komponenta ukazuje na to da u posmatranom periodu industrijska proizvodnja u Srbiji pokazuje uzlazni trend sa jasno izraženim cikličnim varijacijama. U prvoj polovini osamdesetih može se sa Slike 8.7(a) zapaziti period stagnacije, pa i opadanja industrijske proizvodnje. Isti zaključak sledi i za kraj posmatranog perioda, odnosno 1989. godinu takođe karakteriše period recesije. Desezonirana serija na Slici 8.7(b) u velikoj meri prati kretanje trend-ciklus komponente, jer je iregularna komponenta relativno mala u odnosu na nivo vremenske serije.

Što se sezonske komponente tiče dobijen je rezultat da je ona u posmatranom periodu veoma nestabilna (Slika 8.7(c)). Ono što predstavlja odliku ove komponente na početku sedamdesetih (negativan uticaj sezone u prvom, a pozitivan u drugom kvartalu) pretrpilo je izmene na kraju posmatranog perioda. To se posebno odnosi na sezonsku komponentu u prvom kvartalu. Grafik sezonske komponente ukazuje da je tokom osamdesetih godina praktično zanemarljiv uticaj sezonskog faktora u prvom kvartalu.

Ukoliko je primenom metoda X-11-ARIMA valjano obavljen posao desezoniranja, tada se očekuje da iregularna komponenta ima sve karakteristike procesa belog šuma. Međutim, prvi autokorelacioni koeficijent iregularne komponente iznosi , što ukazuje na to da primenom ovog metoda nismo dobili optimalne rezultate desezoniranja. Na Slici 8.7(d) prikazana je iregularna komponenta. Mogu se uočiti nekoliko ekstremnih vrednosti kod ove komponente. Na analitičaru je da ukaže koji su događaji u privrednoj istoriji doveli do njihove pojave.



**Slika 8.7** Razlaganje kvartalne serije industrijske proizvodnje u Srbiji korišćenjem programa X11-ARIMA: (a) trend-ciklus komponenta, (b) desezonirana serija, (c) sezonska komponenta i (d) iregularna komponenta

Metod X-11-ARIMA pruža bogat analitički materijal i za analizu osnovnih karakteristika vremenske serije. Navedimo samo dva rezultata. Prema prvom imamo da prosečno trajanje ciklične komponente iznosi 7.1 kvartala. Drugi rezultat ukazuje na relativan doprinos pojedinih komponenti stacionarnom delu varijanse originalne serije industrijske proizvodnje u Srbiji. Dobijeno je da ciklična komponenta doprinosi 60.75% varijansi originalne serije, sezonska komponenta 37.6%, a iregularna komponenta svega 1.06%. Kako je skoro 2/3 varijacija industrijske proizvodnje u Srbiji pod uticajem ciklične komponente, to znači da postoje česte i velike po intenzitetu, smene perioda uzleta, stagnacije i usporenja proizvodne aktivnosti. Ovaj doprinos ciklične komponente varijansi serije može se smanjiti odgovarajućim stabilizacionim merama ekonomske politike. ■

Detaljnije o ovoj metodi može se pročitati kod Dagum (1983), a kod Burmana (Burman) (1979) je dat pregled ostalih varijanti metoda pokretnih proseka koje se koriste u postupcima sezonskog izravnjanja vremenskih serija. Cleveland i Tiao (1976) kao i Burridge (Baridž) i Wallis (Volis) (1984) su pokazali pod kojim uslovima, odnosno za koje modele vremenskih serija metod X-11 daje optimalne rezultate.

### 8.6.2 Modelski pristup desezoniranju

Modelski pristup zasnovan je na eksplicitnom modeliranju sezonske i nesezonske komponente vremenske serije korišćenjem strukturnih (Harvey (1989)) ili ARIMA modela (Burman (1980)). U slučaju korišćenja strukturnih modela u postupku sezonskog izravnjanja vremenskih serija očigledno je kako se dolazi do desezonirane serije. Ocenjenu sezonsku komponentu, koja predstavlja sastavni deo osnovnog strukturnog modela, oduzimamo od originalne vremenske serije, čime dobijamo desezoniranu seriju.

Pri korišćenju ARIMA modela postupak desezoniranja nije u toj meri očigledan. Poznato je da se kod ovog pristupa modeliranju vremenska serija posmatra kao celina. Kod modelskog pristupa zasnovanog na ARIMA modelima polazimo od razlaganja opservacija vremenske serije na sezonski i nesezonski deo. Obe ove komponente su direktno neopažive. Svaka se modelira posebnim ARIMA modelom. Da bi se na osnovu opservacija vremenske serije mogli oceniti koeficijenti ta dva ARIMA modela zasnovana na neopaživim opservacijama, potrebno je nametnuti ograničenje na koeficijente. Prvo ograničenje tiče se sezonskog AR polinoma koji se definiše tako da se sumiranjem sezonske komponente u  $s$  uzastopnih perioda generiše stacionarna serija sa nultom vrednošću sredine. Druga pretpostavka tiče se sezonskog MA polinoma čiji red ne sme da pređe  $s-1$ .

Detaljnije o postupku modelskog pristupa desezoniranju kao i ograničenjima nametnutim na ARIMA modele nesezonske i sezonske komponente videti kod Bella (Bel) i Hillmera (Hilmer) (1984) kao i Hillmera i Tiao (1984).

### Zadaci

- 8.1 Identifikovati odgovarajući model kvartalne vremenske serije, odnosno red diferenciranja i red procesa. U tu svrhu koristiti korelogram uzoračke autokorelacione funkcije. Uporediti uzoračke korelograme sa teorijskim korelogramima sezonskih ARIMA modela. Proveriti da li je opravdano uvođenje konstante u model.

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n = 150; X_t; \bar{X} = 8086.33 \quad S_X^2 = 3158.99$												
$r_k$	0.98	0.96	0.94	0.92	0.90	0.88	0.86	0.85	0.83	0.81	0.79	0.77
$\hat{\phi}_{kk}$	0.98	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01
$n = 150; W_t = (1-B)X_t; \bar{W} = 71.38 \quad S_W^2 = 12.89$												
$r_k$	0.09	-0.24	0.01	0.95	0.06	-0.27	0.05	0.89	0.03	-0.29	0.02	0.84
$\hat{\phi}_{kk}$	0.09	-0.25	0.14	0.94	-0.44	-0.07	0.02	0.02	-0.01	0.01	-0.03	-0.03
$n = 150; Z_t = (1-B^4)X_t; \bar{Z} = 285 \quad S_Z^2 = 25.91$												
$r_k$	0.97	0.94	0.91	0.87	0.83	0.79	0.75	0.71	0.68	0.64	0.60	0.57
$\hat{\phi}_{kk}$	0.97	-0.10	-0.09	-0.06	-0.04	-0.03	-0.01	-0.00	-0.01	-0.02	-0.00	0.00

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n = 150; Y_t = (1-B)(1-B^4)X_t; \bar{Y} = 0.65 \quad S_Y^2 = 2.03$												
$r_k$	0.86	0.74	0.69	0.67	0.51	0.37	0.32	0.27	0.18	0.08	0.07	0.05
$\hat{\phi}_{kk}$	0.86	0.02	0.19	0.13	-0.46	-0.06	0.14	-0.11	0.06	-0.06	0.07	-0.00

- 8.2 Identifikovati odgovarajući model kvartalne vremenske serije, odnosno red diferenciranja i red procesa. U tu svrhu koristiti korelogram uzoračke autokorelacione funkcije. Uporediti uzoračke korelograme sa teorijskim korelogramima sezonskih ARIMA modela. Proveriti da li je opravdano uvođenje konstante u model.

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n = 200; X_t; \bar{X} = 2257.38 \quad S_X^2 = 459.61$												
$r_k$	0.98	0.96	0.94	0.93	0.91	0.89	0.87	0.85	0.83	0.81	0.79	0.78
$\hat{\phi}_{kk}$	0.98	-0.00	0.01	0.01	-0.06	-0.00	0.01	0.00	-0.05	-0.00	0.01	0.00
$n = 200; W_t = (1-B)X_t; \bar{W} = -6.57 \quad S_W^2 = 19.1$												
$r_k$	0.08	0.13	0.07	0.98	0.07	0.13	0.06	0.95	0.06	0.12	0.05	0.93
$\hat{\phi}_{kk}$	0.08	0.13	0.05	0.98	-0.45	0.01	0.13	-0.23	0.08	0.02	-0.09	-0.04
$n = 200; Z_t = (1-B^4)X_t; \bar{Z} = -26.91 \quad S_Z^2 = 43.87$												
$r_k$	0.99	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95	0.94	0.93	0.92	0.91	0.89	0.88
$\hat{\phi}_{kk}$	0.99	-0.07	-0.05	-0.01	-0.05	-0.04	-0.04	-0.02	-0.04	-0.01	-0.01	-0.02
$n = 200; Y_t = (1-B)(1-B^4)X_t; \bar{Y} = 0.46 \quad S_Y^2 = 1.48$												
$r_k$	0.39	0.23	0.26	0.62	0.2	0.24	0.14	0.32	0.04	0.18	0.05	0.19
$\hat{\phi}_{kk}$	0.39	0.09	0.17	0.56	-0.31	0.25	-0.21	0.01	-0.04	-0.00	0.01	0.03

- 8.3 Identifikovati odgovarajući model kvartalne vremenske serije, odnosno red diferenciranja i red procesa. U tu svrhu koristiti korelogram uzoračke autokorelacione funkcije. Uporediti uzoračke korelograme sa teorijskim korelogramima sezonskih ARIMA modela. Proveriti da li je opravdano uvođenje konstante u model.

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n = 100; X_t; \bar{X} = 53.29 \quad S_X^2 = 25.57$												
$r_k$	0.97	0.95	0.91	0.88	0.85	0.83	0.80	0.78	0.76	0.73	0.70	0.67
$\hat{\phi}_{kk}$	0.97	-0.08	-0.06	0.1	0.02	0.05	0.00	-0.02	-0.02	-0.06	-0.02	-0.06
$n = 100; W_t = (1-B)X_t; \bar{W} = 0.75 \quad S_W^2 = 1.61$												
$r_k$	0.61	0.34	-0.03	-0.30	-0.26	-0.25	-0.10	-0.06	0.08	0.05	-0.03	-0.05
$\hat{\phi}_{kk}$	0.61	-0.07	-0.34	-0.23	0.22	-0.11	-0.03	-0.12	0.24	-0.19	-0.18	0.05

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n = 100; Z_t = (1 - B^4)X_t; \bar{Z} = 2.91 \quad S_Z^2 = 4.96$												
$r_k$	0.85	0.54	0.17	-0.13	-0.27	-0.28	-0.19	-0.08	0.01	0.03	-0.00	-0.07
$\hat{\phi}_{kk}$	0.85	-0.65	-0.20	0.14	0.27	-0.21	-0.04	-0.05	0.15	-0.25	-0.00	-0.04
$n = 100; Y_t = (1 - B)(1 - B^4)X_t; \bar{Y} = 0.05 \quad S_Y^2 = 2.62$												
$r_k$	0.58	0.23	-0.21	-0.58	-0.46	-0.36	-0.08	0.06	0.20	0.20	0.09	0.05
$\hat{\phi}_{kk}$	0.58	-0.16	-0.42	-0.44	-0.25	-0.14	-0.11	-0.32	0.28	-0.17	-0.12	-0.17

- 8.4 Identifikovati odgovarajući model mesečne vremenske serije, odnosno red diferenciranja i red procesa. U tu svrhu koristiti korelogram uzoračke autokorelacione funkcije. Uporediti uzoračke korelograme sa teorijskim korelogramima sezonskih ARIMA modela. Proveriti da li je opravdano uvoditi konstantu u model.

$n = 240; X_t; \bar{X} = 306.74 \quad S_X^2 = 213.29$												
$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_k$	0.99	0.98	0.97	0.95	0.94	0.93	0.92	0.91	0.89	0.88	0.87	0.86
$\hat{\phi}_{kk}$	0.99	-0.02	0.00	-0.05	-0.01	0.03	-0.00	0.02	0.03	-0.01	0.00	0.09
$k$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$r_k$	0.85	0.84	0.83	0.82	0.80	0.79	0.78	0.77	0.76	0.75	0.74	0.73
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.08	-0.02	-0.00	-0.04	-0.02	0.02	-0.00	0.01	0.02	-0.00	0.01	0.01
$n = 240; W_t = (1 - B)X_t; \bar{W} = 2.76 \quad S_W^2 = 10.21$												
$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_k$	0.23	-0.09	0.15	-0.10	-0.35	-0.42	-0.34	-0.14	0.12	-0.10	0.20	0.94
$\hat{\phi}_{kk}$	0.23	-0.15	0.23	-0.25	-0.23	0.43	-0.29	-0.18	-0.18	-0.40	0.16	0.86
$k$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$r_k$	0.22	-0.07	0.16	-0.08	-0.31	-0.41	-0.34	-0.15	0.10	-0.11	0.17	0.86
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.21	0.20	-0.36	0.20	0.17	-0.03	0.02	0.02	0.03	0.11	-0.19	-0.11
$n = 240; Z_t = (1 - B^{12})X_t; \bar{Z} = 32.49 \quad S_Z^2 = 16.74$												
$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_k$	0.98	0.96	0.94	0.92	0.90	0.88	0.86	0.84	0.82	0.80	0.79	0.77
$\hat{\phi}_{kk}$	0.98	-0.10	0.03	0.02	-0.01	-0.02	-0.06	0.04	0.04	0.01	0.06	-0.03
$k$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$r_k$	0.76	0.73	0.71	0.69	0.67	0.65	0.62	0.60	0.58	0.56	0.54	0.53
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.11	-0.06	-0.03	-0.01	-0.01	-0.02	-0.04	-0.02	0.02	0.04	0.06	0.03



$n = 240; Y_t = (1-B)(1-B^{12})X_t; \bar{Y} = 0.26 \quad S_Y^2 = 1.65$												
$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_k$	0.46	-0.10	-0.17	-0.14	0.02	0.18	0.08	-0.11	-0.23	-0.14	0.23	0.48
$\hat{\phi}_{kk}$	0.46	-0.39	0.10	-0.16	0.18	0.05	-0.09	-0.07	-0.16	0.09	0.29	0.22
$k$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$r_k$	0.19	-0.03	-0.06	-0.13	-0.07	0.06	0.03	-0.06	-0.09	-0.04	0.02	0.03
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.20	0.22	-0.07	-0.02	-0.09	-0.04	0.03	-0.01	0.11	-0.07	-0.11	-0.13

- 8.5 Identifikovati odgovarajući model mesečne vremenske serije, odnosno red diferenciranja i red procesa. U tu svrhu koristiti korelogram uzoračke autokorelacione funkcije. Uporediti uzoračke korelograme sa teorijskim korelogramima sezonskih ARIMA modela. Proveriti da li je opravdano uvoditi konstantu u model.

$n = 120; X_t; \bar{X} = 27.48 \quad S_X^2 = 6.99$												
$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_k$	0.95	0.93	0.91	0.89	0.86	0.85	0.82	0.79	0.77	0.75	0.72	0.68
$\hat{\phi}_{kk}$	0.95	0.30	0.12	-0.07	-0.01	0.04	-0.06	-0.07	0.02	0.00	-0.01	-0.15
$k$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$r_k$	0.68	0.64	0.61	0.59	0.57	0.54	0.52	0.50	0.47	0.45	0.43	0.41
$\hat{\phi}_{kk}$	0.20	-0.12	-0.05	0.01	0.03	-0.07	0.02	0.04	-0.02	-0.02	-0.02	-0.03
$n = 120; W_t = (1-B)X_t; \bar{W} = 0.19 \quad S_W^2 = 1.68$												
$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_k$	-0.54	0.02	0.05	0.01	-0.03	0.03	-0.01	-0.03	0.04	-0.08	0.29	-0.57
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.54	-0.39	-0.24	-0.12	-0.08	-0.01	0.03	-0.01	0.02	-0.10	0.35	-0.39
$k$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$r_k$	0.45	-0.12	-0.03	-0.02	0.11	-0.13	0.05	-0.03	-0.05	0.15	-0.12	0.18
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.06	-0.10	-0.03	-0.09	0.10	-0.02	0.00	-0.17	-0.19	-0.09	0.20	-0.02
$n = 120; Z_t = (1-B^{12})X_t; \bar{Z} = 2.5 \quad S_Z^2 = 2.17$												
$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_k$	0.03	0.21	0.22	0.18	0.11	0.08	0.03	-0.02	-0.04	-0.15	0.01	-0.58
$\hat{\phi}_{kk}$	0.03	0.21	0.22	0.15	0.03	-0.02	-0.07	-0.10	-0.09	-0.17	0.05	-0.56
$k$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$r_k$	0.13	-0.18	-0.18	-0.13	-0.08	-0.21	-0.11	-0.10	-0.07	0.04	-0.13	0.12
$\hat{\phi}_{kk}$	0.26	-0.01	0.07	0.02	0.03	-0.21	-0.09	-0.14	0.03	0.01	0.05	-0.30

$n = 120; Y_t = (1 - B)(1 - B^{12})X_t; \bar{Y} = -0.01 \quad S_Y^2 = 3.01$												
$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_k$	-0.59	0.08	0.04	0.01	-0.04	0.02	0.01	-0.02	0.03	-0.13	0.39	-0.68
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.59	-0.40	-0.24	-0.08	-0.05	-0.01	0.03	0.02	0.06	-0.16	0.41	-0.46
$k$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$r_k$	0.53	-0.16	-0.01	-0.01	0.09	-0.12	0.03	-0.00	-0.04	0.14	-0.21	0.34
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.10	-0.16	-0.06	-0.07	0.12	-0.02	-0.00	-0.15	-0.12	-0.12	0.21	-0.08

8.6 Na osnovu 160 opservacija kvartalne vremenske serije identifikovati odgovarajući sezonski ARIMA model. Za određivanje reda diferenciranja koristiti:

- običnu i parcijalnu autokorelacionu funkciju diferenciranih serija,
- kriterijum minimalne uzoračke varijanse diferencirane serije i
- testove običnog i sezonskog jediničnog korena.

I	II	III	IV
14.24	8.90	5.75	6.27
8.61	8.05	7.37	7.09
7.90	6.23	5.03	5.05
7.67	8.21	9.81	11.58
14.26	14.49	13.89	16.29
21.35	23.01	23.41	26.89
30.93	30.73	29.31	31.00
34.96	36.24	36.19	39.76
44.15	44.02	44.37	48.73
53.50	55.13	57.30	62.95
69.05	71.25	74.64	81.12
87.32	91.35	94.92	99.88
105.86	107.41	109.25	113.14
119.63	124.61	129.36	136.49
146.22	152.35	158.24	167.26
177.26	183.75	190.69	197.61
206.18	212.06	218.50	228.48
240.12	249.20	257.02	265.78
275.72	283.67	291.34	301.37
312.22	321.13	328.45	337.49

8.7 Na osnovu 120 opservacija mesečne vremenske serije identifikovati odgovarajući sezonski ARIMA model. Za određivanje reda diferenciranja koristiti:

- običnu i parcijalnu autokorelacionu funkciju diferenciranih serija,
- kriterijum minimalne uzoračke varijanse diferencirane serije i
- testove običnog i sezonskog jediničnog korena.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
34.93	42.24	64.89	61.82	61.32	64.23	58.33	45.93	50.73	69.79	58.83	59.62
55.56	63.71	88.72	83.77	84.82	89.62	80.63	66.43	74.74	94.58	82.39	85.23
80.49	89.30	116.05	111.45	111.61	117.79	104.71	92.33	101.94	122.75	107.87	114.34
110.88	117.57	146.96	143.32	142.71	150.21	133.39	123.26	133.38	154.26	137.06	147.45
146.24	148.31	181.60	179.92	177.28	186.13	167.53	159.16	170.17	192.20	172.49	185.89
186.96	185.41	222.75	222.95	219.71	226.48	208.76	200.97	215.12	235.85	212.69	230.13
234.70	229.54	272.09	271.70	268.66	274.36	256.24	248.83	265.57	285.41	260.04	279.73
288.76	279.78	327.00	324.71	323.00	328.82	311.34	303.68	321.14	341.78	314.28	336.74
350.17	337.86	388.04	383.00	381.76	388.28	369.19	363.08	381.14	402.62	375.66	398.17
417.39	399.66	454.00	446.61	445.93	454.18	434.48	428.90	446.77	468.72	441.87	465.08

- 8.8 Na osnovu podataka iz Zadatka 8.6 oceniti izabrane modele i proveriti njihovu adekvatnost.
- 8.9 Na osnovu podataka iz Zadatka 8.7 oceniti izabrane modele i proveriti njihovu adekvatnost.
- 8.10 Na osnovu ocenjenog modela iz Zadatka 8.8 formirati prognoze za osam perioda unapred. Odrediti i 95% interval prognoze.
- 8.11 Na osnovu ocenjenog modela iz Zadatka 8.9 formirati prognoze za dvanaest perioda unapred. Odrediti i 95% interval prognoze.
- 8.12 Kod ocenjivanja koeficijenata izabranih modela u Zadatku 8.10 izostaviti poslednjih osam opservacija. Proveriti kvalitet prognoza ocenjenih modela korišćenjem srednje kvadratne greške prognoze.
- 8.13 Kod ocenjivanja koeficijenata izabranih modela u Zadatku 8.11 izostaviti poslednjih dvanaest opservacija. Proveriti kvalitet prognoza ocenjenih modela korišćenjem srednje kvadratne greške prognoze.
- 8.14 Na osnovu podataka iz Zadatka 8.6 izvršiti desezoniranje date kvartalne vremenske serije korišćenjem programa X-11-ARIMA.
- 8.15 Na osnovu podataka iz Zadatka 8.7 izvršiti desezoniranje date mesečne vremenske serije korišćenjem programa X-11-ARIMA.
- 8.16 Za "produženje" vremenske serije u Zadatku 8.14 koristiti prognoze ocenjenog modela iz Zadatka 8.8.
- 8.17 Za "produženje" vremenske serije u Zadatku 8.15 koristiti prognoze ocenjenog modela iz Zadatka 8.9.

# 9 SPEKTRALNA ANALIZA VREMENSKIH SERIJA

U uvodnoj glavi ukazano je na dva pristupa analizi vremenskih serija. Prvi pristup, zasnovan na autokovarijacionoj funkciji, poznat je pod nazivom analiza u vremenskom domenu. Drugi pristup, zasnovan na spektralnoj funkciji gustine, poznat je pod nazivom analiza u frekventnom domenu. Do sada smo se bavili analizom vremenske serije u vremenskom domenu. Osnovnu ideju analize vremenske serije u frekventnom domenu izla`emo u okviru ove glave. Nakon {to uvedemo klju-ne pojmove u vezi analize u frekventnom domenu i damo kratak osvrt na Fourierovu analizu, defini{emo spektralnu funkciju gustine. Razmatraju}i vezu izme|u spektralne funkcije gustine i autokovarijacione funkcije ukaza}emo na ekvivalentnost dva domena analize vremenske serije. Na kraju, pre nego {to uputimo -itaoca na mogu}e primene analize vremenske serije u frekventnom domenu, defini{emo periodogram i ocenjujemo spektralnu funkciju gustine.

## 9.1 UVOD

Osnovni cilj analize vremenske serije u frekventnom domenu jeste utvr|ivanje doprinosa razli-itih periodi-nih komponentni njenom ukupnom varijabilitetu. Prvobitno su te komponente poistove}ene sa pravilnim, regularnim ciklusima {to }e re}i, sa ciklusima koji se na isti na-in i istim intenzitetom ponavljaju u jednakim vremenskim intervalima. Ovo je dosta restriktivna pretpostavka, posebno u ekonomiji u kojoj se poslovni ciklusi skoro nikada ne ponavljaju na isti na-in. Pre je pravilo nego izuzetak da se dva poslovna ciklusa me|usobom razlikuju ili po vremenu trajanja pojedinih faza (periodi ubrzanja, odnosno usporenja privrednog rasta) ili po intenzitetu pojedinih faza (visine stopa privrednog rasta po fazama poslovnog ciklusa).

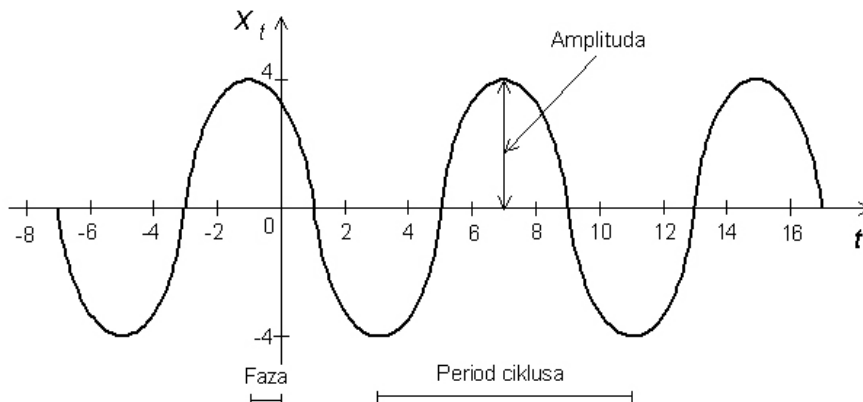
Kasnije se u analizi vremenskih serija periodi-na komponenta identifikovala sa cikli-nim kretanjem koje se po pravilu ponavlja na sli-an, ali ne identi-an na-in. To zna-i da na primer poslovni ciklusi ne traju ta-no 4 godine, nego im du`ina trajanja

uzima vrednosti iz intervala od 3.5 do 4.5 godina. Ovakvom interpretacijom periodične komponente neformalno definićemo tzv. iregularno ciklično kretanje. Radi postupnosti izlaganja prvo ćemo usmeriti pažnju ka analizi regularnih ciklusa, a zatim ćemo ovu analizu proširiti u pravcu analize iregularnih ciklusa. Analizu regularnih ciklusa zasnivamo na linijskom spektru, a analizu iregularnih ciklusa na spektru. Fourierova analiza predstavlja sa metodološkog stanovišta osnovu analize vremenske serije u frekventnom domenu u oba navedena slućaja. Stoga ćemo ukratko skicirati njene osnovne rezultate u meri u kojoj je to potrebno za razumevanje osnovnih pojmova i problema koji se javljaju u spektralnoj analizi vremenskih serija.

Da bismo učinili razumljivijim osnovne pojmove koje koristimo u ovoj glavi, poslućimo se jednostavnim cikličkim modelom. Pretpostavimo da vremenska serija sadrži periodičnu komponentu sa poznatom periodom, odnosno da joj odgovara model:

$$X_t = A \cos(\omega t + \theta), \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (9.1)$$

gde se  $\omega$  naziva *ugaona frekvencija* ili kraće *frekvencija* kosinusnih varijacija;  $A$  je *amplituda* tih varijacija, a  $\theta$  je njihova *faza* ili njihov *fazni pomak*. Uglovi u izrazu (9.1) mere se u radijanima, pa predstavljaju neimenovane brojeve (podsećamo da je  $\pi$  radijana  $= 180^\circ$ ). Tako ugaon  $\omega t$  u izrazu (9.1) predstavlja neimenovan broj, odakle sledi da je frekvencija  $\omega$  izraćena u radijanima po vremenskoj jedinici. Stavljajući različite vrednosti za ugaonu frekvenciju moćemo postići da se, slikovito rećeno, periodična funkcija "širi" ili "skuplja" duć vremenske ose. To znaći da izborom manje ili veće vrednosti frekvencije povećavamo, odnosno smanjujemo velićinu periode ciklusa (vreme koje je potrebno da protekne da bi se kompletirao jedan ciklus). Kako se  $\cos \omega t$  kao periodična funkcija ponavlja sa *periodom ciklusa*  $2\pi/\omega$ , to znaći da je broj ciklusa po vremenskoj jedinici jednak  $\omega/2\pi$ . Ovu velićinu neki autori takoće nazivaju frekvencijom. Period ciklusa  $2\pi/\omega$  iskazan je u jedinici vremena, pa se stoga naziva i *dućina ciklusa*. U primerima u okviru ove glave koristimo sve navedene definicije frekvencija i perioda. Velićinom koju smo nazvali faza merimo ugaon u radijanima za koji je posmatrana ciklična komponenta pomerena duć horizontalne ose, a taj pomak u broju vremenskih jedinica izraćunavamo na osnovu izraza:  $\theta/\omega$ .



Slika 9.1 Jednostavan ciklični model vremenske serije

Na Slici 9.1 prikazan je model (9.1) sa oznakom ključnih veličina, gde smo ilustracije radi stavili da je  $A=4$ ,  $\omega_k = 2\pi k/n$  i  $\theta = \pi/4$ . Na osnovu navedenih vrednosti frekvencije i faze izračunavamo da je perioda ciklusa jednaka 8, a faze 1 vremenska jedinica.

Prema poznatom trigonometrijskom rezultatu o vrednosti kosinusa zbira dva ugla ( $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ ) model (9.1) alternativno izračunavamo preko kosinusne i sinusne funkcije u obliku

$$X_t = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (9.2)$$

gde je  $a = A \cos \theta$  i  $b = -A \sin \theta$ . Do amplitude i faze u modelu (9.1) možemo doći preko alternativnog oblika ovog modela (9.2), jer važe relacije:

$$A^2 = a^2 + b^2 \text{ i } \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right). \quad (9.3)$$

Alternativno izračunavanje jednostavnog cikličnog modela dato izrazom (9.2) omogućava nam direktnu definiciju Fourierove reprezentacije vremenske serije, te statističku interpretaciju njegovih koeficijenata.

## 9.2 FOURIEROVA ANALIZA

Fourierova analiza bavi se problemom aproksimacije proizvoljne funkcije skupom elementarnih funkcija. Jedan od skupova elementarnih funkcija uključuje sinusne i kosinusne funkcije, a drugi uključuje kompleksne eksponencijalne funkcije. Pretpostavimo da su trigonometrijske funkcije sinusa i kosinusa:  $\sin\left(\frac{2\pi kt}{n}\right)$  i  $\cos\left(\frac{2\pi kt}{n}\right)$ , definisane na konačnom skupu od  $n$  tačaka, tj. za  $t=1,2,\dots,n$ . Ugaonu frekvenciju  $\omega_k$  izrazili smo u obliku  $\frac{2\pi k}{n}$ , gde je  $k=0,1,\dots,[n/2]$  i  $[n/2]=n/2$ , kada je  $n$  paran broj, a  $[n/2]=(n-1)/2$ , kada je  $n$  neparan broj. Može se pokazati<sup>1</sup> da skup elementarnih funkcija

$$\left\{ \sin\left(\frac{2\pi kt}{n}\right), \cos\left(\frac{2\pi kt}{n}\right) : k=0,1,\dots,\left[\frac{n}{2}\right] \right\}, \quad (9.4)$$

sadrži tačno  $n$  funkcija različitih od nule i da predstavlja skup ortogonalnih funkcija<sup>2</sup>. Na osnovu poznate Eulerove formule koja povezuje trigonometrijske i eksponencijalne funkcije:

$$e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega, \quad (9.5)$$

<sup>1</sup> Videti na primer: Wei (1990, ss. 207-9).

<sup>2</sup> Ako je u skupu elementarnih funkcija definisan skalarni proizvod, tada za dve funkcije iz ovog skupa kažemo da su ortogonalne ako je njihov skalarni proizvod jednak nuli.

$$\sin \omega = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} \quad \text{i} \quad \cos \omega = \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2}, \quad (9.6)$$

gde je  $i = \sqrt{-1}$ , mo`e se pokazati da isto va`i i za skup elementarnih funkcija

$$\left\{ e^{i2\pi kt/n} : \left[ -\frac{n}{2} \right] \leq k \leq \left[ \frac{n}{2} \right] \right\}. \quad (9.7)$$

Kori{}enjem osobine ortogonalnosti skupa elementarnih funkcija (9.4) mo`e se pokazati da funkcije iz tog skupa ispunjavaju uslov:

$$\sum_{t=1}^n \cos \frac{2\pi kt}{n} \cos \frac{2\pi jt}{n} = \begin{cases} n, & k = j = 0, \text{ ili } [n/2] \\ n/2, & k = j \neq 0 \text{ ili } [n/2] \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (9.8)$$

$$\sum_{t=1}^n \sin \frac{2\pi kt}{n} \sin \frac{2\pi jt}{n} = \begin{cases} 0, & k = j = 0, \text{ ili } [n/2] \\ n/2, & k = j \neq 0 \text{ ili } [n/2] \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (9.9)$$

$$\sum_{t=1}^n \sin \frac{2\pi kt}{n} \cos \frac{2\pi jt}{n} = 0, \text{ za } k, j = 0, 1, \dots, [n/2]. \quad (9.10)$$

Sli-no se i za skup elementarnih funkcija (9.7) mo`e pokazati da funkcije tog skupa ispunjavaju uslov:

$$\sum_{t=1}^n e^{i2\pi kt/n} = \begin{cases} n, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}. \quad (9.11)$$

Pri radu sa prekidnim vremenskim serijama raspola`emo kona-nim brojem opservacija, pa opservacije  $X_1, X_2, \dots, X_n$  posmatramo kao ta-ku u  $n$ -dimenzionom prostoru. Iz linearne algebre je poznato da se mo`e konstruisati skup vektora, baza dimenzionog vektorskog prostora, na osnovu kog se svaki vektor iz tog prostora mo`e predstaviti linearnom kombinacijom baznih vektora. Ma koji skup od  $n$  ortogonalnih vektora formira bazu vektorskog prostora, pa u skladu sa tim svaku od  $n$  opservacija vremenske serije mo`emo predstaviti kao linearnu kombinaciju ortogonalnih trigonometrijskih funkcija iz skupa elementarnih funkcija (9.4) u obliku

$$X_t = \sum_{k=0}^{[n/2]} \left[ a_k \cos \left( \frac{2\pi kt}{n} \right) + b_k \sin \left( \frac{2\pi kt}{n} \right) \right], \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (9.12)$$

Jedna-ina (9.12) predstavlja *Fourierovu reprezentaciju* niza  $X_t$ . Koeficijenti  $a_k$  i  $b_k$  u izrazu (9.12) nazivaju se *Fourierovi koeficijenti*. Do vrednosti ovih koeficijenata mo`emo do}i kori{}enjem uslova (9.8)-(9.10) koje ispunjavaju funkcije iz skupa elementarnih funkcija (9.4). U tom cilju prvo }emo pomno`iti jedna-inu (9.12) sa

$\sin\left(\frac{2\pi kt}{n}\right)$  i  $\cos\left(\frac{2\pi kt}{n}\right)$  respektivno, a zatim sumirati dobijeni izraz po indeksu  $t$ . Tako dobijamo Fourierove koeficijente:

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \cos\left(\frac{2\pi kt}{n}\right), & k=0, \text{ i } k = \frac{n}{2}, \text{ ako je } n \text{ paran broj,} \\ \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n X_t \cos\left(\frac{2\pi kt}{n}\right), & k=1, 2, \dots, \left[\frac{n-1}{2}\right], \end{cases} \quad (9.13)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n X_t \sin\left(\frac{2\pi kt}{n}\right), \quad k=1, 2, \dots, \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Frekvenciju  $2\pi k/n$  označavamo sa  $\omega_k$  i nazivamo *Fourierova frekvencija*. Na osnovu skupa elementarnih funkcija (9.7) alternativno iskazujemo Fourierovu reprezentaciju serije  $X_t$  u obliku

$$X_t = \begin{cases} \sum_{k=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} c_k e^{i\omega_k t}, & \text{ako je } n \text{ neparno} \\ \sum_{k=-n/2+1}^{n/2} c_k e^{i\omega_k t}, & \text{ako je } n \text{ parno} \end{cases} \quad (9.14)$$

gde su Fourierovi koeficijenti  $c_k$  dati izrazom:

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t e^{-i\omega_k t}. \quad (9.15)$$

Izmeđujući koeficijenta  $(a_k, b_k)$  s jedne i  $c_k$  s druge strane, može se uspostaviti relacija:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \\ c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} \\ c_{-k} &= \frac{a_k + ib_k}{2}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

**Primer 9.1** Za dati niz:  $X_1=3$ ,  $X_2=2$ ,  $X_3=1$  i  $X_{t+3j}=X_t$ ,  $t=1, 2, 3$ ,  $j=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  odrediti Fourierovu reprezentaciju.

Očigledno je iz definicije niza i sa Slike 9.2 da je re- o nizu -ija je perioda ciklusa jednaka  $n=3$ . Kako je  $n$  neparan broj to je  $[n/2]=1$ , pa je Fourierova reprezentacija niza na osnovu izraza (9.12)

$$X_t = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right).$$

Prema izrazu (9.13) dolazimo do vrednosti Fourierovih koeficijenata:



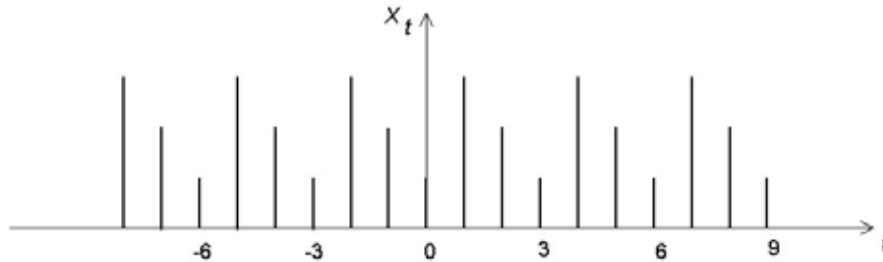
$$a_0 = \frac{1}{n} \sum X_t = \bar{X} = \frac{1}{3}(3+2+1) = 2$$

$$a_1 = \frac{2}{3} \left[ 3 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 1 \cos\left(\frac{6\pi}{3}\right) \right] = -1$$

$$b_1 = \frac{2}{3} \left[ 3 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 1 \sin\left(\frac{6\pi}{3}\right) \right] = 0.57735.$$

Prema tome periodični niz na osnovu Fourierove reprezentacije (izraz (9.12)) pišemo u obliku

$$X_t = 2 - \cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + 0.57735 \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right), \quad t = 1, 2, \dots$$



Slika 9.2 Periodični niz iz Primera 9.1

Na osnovu drugog skupa elementarnih funkcija (9.7) dobijamo izraz za Fourierovu reprezentaciju periodičnog niza u obliku

$$X_t = c_{-1}e^{-i2\pi t/3} + c_0 + c_1e^{i2\pi t/3}, \quad t = 1, 2, \dots$$

Do koeficijenata  $c_k$  dolazimo na osnovu izraza (9.15) ili na osnovu veze koeficijenata  $c_k$  i  $(a_k, b_k)$  prema izrazu (9.16):

$$c_0 = a_0 = 2$$

$$c_{-1} = \frac{1}{3} (3e^{i2\pi/3} + 2e^{i4\pi/3} + 1e^{i6\pi/3}) = \frac{1}{2} (-1 + 0.57735i)$$

$$c_1 = \frac{1}{3} (3e^{-i2\pi/3} + 2e^{-i4\pi/3} + 1e^{-i6\pi/3}) = \frac{1}{2} (-1 - 0.57735i)$$

Prema tome periodični niz  $X_t$  na osnovu Fourierove reprezentacije (izraz (9.14)) pišemo u obliku

$$X_t = \frac{1}{2} (-1 + 0.57735i) e^{-i2\pi t/3} + 2 + \frac{1}{2} (-1 - 0.57735i) e^{i2\pi t/3}, \quad t = 1, 2, \dots$$

Može se pokazati da između izrađenih koeficijenata  $(a_k, b_k)$  i  $c_k$  postoji relacija uspostavljena izrazom (9.16). ■

Ukažimo na vezu koeficijenata Fourierove reprezentacije i ocene jednostavnog cikličnog modela (9.2). U tom cilju jednostavan ciklični model pišemo u formi regresionog modela:

$$X_t = \mu + a \cos \omega t + b \sin \omega t + \varepsilon_t \quad (9.17)$$

uz uobičajene pretpostavke koje se tiču osobina greške modela. Do ocena koeficijenata ovog modela dolazimo korištenjem metoda običnih najmanjih kvadrata. Ograničimo se na slučaj kada frekvencija  $\omega$  uzima jednu od vrednosti  $\omega_k$ , tj. proizvoljnu  $k$ -tu Fourierovu frekvenciju. Tada na osnovu uslova (9.8)-(9.10), matrica  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$  postaje dijagonalna, u poznatom izrazu  $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ , za ocenu koeficijenata modela (9.17) po metodu najmanjih kvadrata, gde je

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \cos \omega_k & \sin \omega_k \\ 1 & \cos 2\omega_k & \sin 2\omega_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos n\omega_k & \sin n\omega_k \end{bmatrix}. \quad (9.18)$$

Na taj način se u krajnjem ishodu pojednostavljaju izrazi za ocenu koeficijenata modela (9.17), koje nakon sređivanja za  $k \neq 0$  i  $k \neq n/2$  pišemo u obliku:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t = \bar{X}, \quad \hat{a} = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n X_t \cos \omega_k t, \quad \hat{b} = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n X_t \sin \omega_k t, \quad (9.19)$$

a za  $k = 0$  ili  $k = n/2$ , uzimajući u obzir vrednost sinusa i kosinusa, u obliku:

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \quad \hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t (-1)^t. \quad (9.20)$$

Obratimo pažnju na ova dva specijalna slučaja. Prvi slučaj, za  $k = 0$  dobijamo Fourierove koeficijente  $a_0 = \hat{\mu}$  i  $b_0 = 0$ , jer je  $\cos \omega_0 t = 1$  i  $\sin \omega_0 t = 0$ . Drugi slučaj, za  $k = n/2$ , dobijamo Fourierove koeficijente  $a_{n/2} = \hat{a}$  i  $b_{n/2} = 0$ , jer je  $\cos \omega_{n/2} t = (-1)^t$  i  $\sin \omega_{n/2} t = 0$ . U svim ostalim slučajevima, za  $k = 1, 2, \dots, (n-1)/2$ , može se uočiti da su ocene običnih najmanjih kvadrata (9.19) jednostavnog cikličnog modela na *jednoj*, proizvoljno izabranoj Fourierovoj frekvenciji, jednake Fourierovim koeficijentima datih izrazom (9.13).

Realnija pretpostavka jeste da posmatrani fenomen zavisi ne samo od komponente na jednoj frekvenciji, kao što je pretpostavljeno jednostavnim cikličnim modelom, nego da zavisi od većeg broja komponenata na različitim frekvencijama. Znači da bi slično jednostavnom, opšti ciklični model mogli pisati u obliku:

$$X_t = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_k \cos(\omega_k t + \theta_k), \quad (9.21)$$

odnosno u obliku:

$$X_t = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t). \quad (9.22)$$

Kao kod jednostavnog cikličnog modela izmeđ u koeficijenata ove dve forme općeg cikličnog modela važe relacije:  $A_k^2 = a_k^2 + b_k^2$  i  $\theta_k = \arctan(b_k / a_k)$ . Tako se može veći koja je uspostavljena između Fourierovih koeficijenata na određenoj frekvenciji i ocene koeficijenata regresione forme jednostavnog cikličnog modela (9.17), može uspostaviti relacija između Fourierovih koeficijenata i ocene općeg cikličnog modela datog u formi regresionog modela. Uopćtavaju} rezultate kod jednostavnog cikličnog modela kaemo da je  $k$ -ti Fourierov koeficijent jednak odgovaraju}oj regresionoj oceni koeficijenta općeg cikličnog modela datog u formi regresionog modela na toj frekvenciji.

**Primer 9.2** Za dati niz:  $X_1 = 4$ ,  $X_2 = 3$ ,  $X_3 = 2$ ,  $X_4 = 1$  i  $X_{t+4} = X_t$ ,  $t = 1, 2, 3, 4$ , odrediti Fourierovu reprezentaciju.

Oigledno je iz definicije niza da je reo nizu }ija je perioda ciklusa jednaka  $n = 4$ . Kako je  $n$  paran broj to je  $\lfloor n/2 \rfloor = 2$ , pa se može proveriti da se dobijaju slede}e vrednosti Fourierovih koeficijenata

$$\text{za } \omega_0 = 0: a_0 = 2.5,$$

$$\text{za } \omega_1 = \frac{\pi}{2}: a_1 = -1, b_1 = \frac{4}{3},$$

$$\text{za } \omega_2 = \pi: a_2 = -0.5, b_2 = 0.$$

Fourierova reprezentacija niza na osnovu izraza (9.12) glasi:

$$X_t = 2.5 - \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) - 0.5 \cos(\pi t) + \frac{4}{3} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right).$$

Koeficijenti u alternativnoj formi Fourierove reprezentacije glase:

$$c_{-1} = \frac{1}{2}(-1 + \frac{4}{3}i), c_0 = 2.5, c_1 = \frac{1}{2}(-1 - \frac{4}{3}i), c_2 = -\frac{1}{4}.$$

Na osnovu ovih izra-unatih koeficijenata napisati alternativnu formu Fourierove reprezentacije datog niza. ■

Najmanja pozitivna vrednost od  $n$  za koju va}i Fourierova reprezentacija nazivamo *fundamentalni period*, a vrednost odgovaraju}e frekvencije  $2\pi/n$  nazivamo *fundamentalna frekvencija*. Za  $k = +1$  i  $k = -1$  }lanovi u Fourierovoj reprezentaciji

imaju isti fundamentalni period jednak  $n$  i istu fundamentalnu frekvenciju, a oba nazivamo prve harmonijske komponente. U općtem slučaju članovi za  $k = +j$  i  $k = -j$  imaju frekvenciju  $j(2\pi/n)$  i nazivamo ih  $j$ -te harmonijske komponente. Znači da svaki član u Fourierovoj reprezentaciji ima frekvenciju koja predstavlja multiplikovanu vrednost iste fundamentalne frekvencije  $2\pi/n$ , pa su članovi Fourierove reprezentacije međusobom harmonijski povezani.

Ukažimo na još jedan rezultat vezan za Fourierovu reprezentaciju prekidne periodične funkcije. Ovim rezultatom približili smo se na jedan korak do osnovnog cilja analize vremenske serije u frekventnom domenu - razlaganju varijanse serije koja ukazuje na doprinose komponenti na različitim frekvencijama ukupnoj varijansi. Ako u izrazu (9.12) uzmemo u obzir da je  $a_0 = \bar{X}$ , tada Fourierovu reprezentaciju pišemo u obliku

$$X_t - \bar{X} = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t). \quad (9.23)$$

Vrednost Fourierovih koeficijenata u izrazu (9.23) (u kome umesto originalnih opservacija figuriraju odstupanja od sredine serije) jednaka je vrednosti koeficijenata datih izrazom (9.13) osim za  $k=0$ . Ako izraz (9.23) pomnožimo sa  $X_t - \bar{X}$ , a zatim sumiramo po indeksu  $t=1$  do  $n$ , korišćenjem izraza (9.13) dobićemo:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 &= \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[ a_k \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}) \cos \omega_k t + b_k \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}) \sin \omega_k t \right] \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (a_k^2 + b_k^2), & \text{ako je } n \text{ neparno} \\ \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (a_k^2 + b_k^2) + na_{n/2}^2, & \text{ako je } n \text{ parno} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Prema izrazu (9.24) ukupna suma varijacija vremenske serije razlaže se na komponente  $(a_k^2 + b_k^2)n/2$  koje su pridružene svakoj Fourierovoj frekvenciji  $\omega_k$ . One mere doprinos te frekvencije ukupnom *varijabilitetu* vremenske serije. Ovaj rezultat je poznat pod nazivom *Parsevalova relacija* za Fourierovu reprezentaciju. Kako je u pitanju periodičnost to je na celom vremenskom horizontu  $t=0, +1, +2, \dots$  ukupan varijabilitet beskonačan. Stoga posmatramo iznos varijabiliteta po jedinici vremena, odnosno delimo levu i desnu stranu izraza (9.24) sa  $n$ . Time iskazujemo doprinos svake frekvencije iz prebrojivog skupa Fourierovih frekvencija ukupnoj *varijansi* vremenske serije. Grafički prikaz ove veličine u funkciji od frekvencije nazivamo *linijski spektar*. Na osnovu veze koeficijenata  $(a_k, b_k)$  i  $c_k$  u dve alternativne forme Fourierove reprezentacije (izraz (9.16)) može se napisati alternativan izraz izrazu (9.24) za razlaganje varijabiliteta serije.

Neki autori, uglavnom iz tehničkih nauka, za nijansu drugačije definišu linijski spektar. Oni polaze od izraza (9.12), pa njega množe sa  $X_t$ , a zatim sumiraju po

indeksu  $t=1$  do  $n$ . Veličinu  $\sum_{t=1}^n X_t^2$  nazivaju energijom periodičnog niza, a nakon njegove deobe sa  $n$ , dobijeni izraz nazivaju snagom periodičnog niza. Ekonomistima je razumljivije korišćenje izraza (9.24) jer se govori u terminima razlaganja varijabiliteta, odnosno varijanse serije, a u suštini razlika se javlja samo u tretmanu frekvencije  $\omega_0$ . Dolazeći do izraza (9.24) oduzeli smo sredinu serije od svake opservacije, time smo eliminisali doprinos frekvencije  $\omega_0$ . U pristupu drugih autora taj doprinos frekvencije  $\omega_0$  energiji periodičnog niza jednak je  $na_0^2$ , a doprinos snazi periodičnog niza iznosi  $a_0^2$ .

**Primer 9.3** Na osnovu podataka iz Primera 9.2 izračunati linijski spektar datog niza.

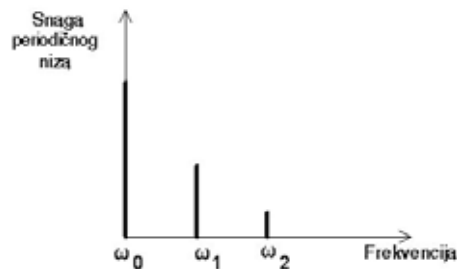
U Primeru 9.2 izračunali smo Fourierove koeficijente, pa prema izrazu (9.24) možemo odrediti doprinos svake frekvencije ukupnoj varijansi datog niza:

za  $k=0$ , doprinos frekvencije  $\omega_0=0$  jednak je  $a_0^2 = 2.5^2 = 6.25$ ,

za  $k=1$ , doprinos frekvencije  $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$  jednak je  $\frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2) = 1.3889$ ,

za  $k=2$ , doprinos frekvencije  $\omega_2 = \pi$  jednak je  $a_2^2 = (-0.5)^2 = 0.25$ .

Grafiki prikaz doprinosa pojedinih frekvencija ukupnoj varijansi dat je na Slici 9.3.



**Slika 9.3** Linijski spektar niza iz Primera 9.2

Prema tome najveći doprinos varijansi periodičnog niza daje frekvencija

$\omega_0 = 0$ , zatim  $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$ , a naposljetku frekvencija  $\omega_2 = \pi$ . ■

Do sada smo se bavili frekventnom analizom periodičnog niza, odnosno vremenska serija je bila iskazana na osnovu *pravilnih* cikličnih varijacija. Fourierova reprezentacija neperiodične prekidne vremenske serije dobija se na osnovu Fourierove reprezentacije periodičnog niza kada pustimo da period ciklusa  $n \rightarrow \infty$ , odnosno vrednost priraćtaja frekvencije  $\Delta\omega = 2\pi/n \rightarrow 0$ . Drugim rečima rečeno, ovaj uslov znači da se smanjuje razmak između uzastopnih Fourierovih frekvencija. Tako dobijamo

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.25)$$

i

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} X_t e^{-i\omega t}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi, \quad (9.26)$$

pošto je  $f(\omega)e^{i\omega t}$  periodična funkcija frekvencija sa periodom ciklusa  $2\pi$ , za interval integracije se može uzeti ma koji interval te dužine. Funkcija  $f(\omega)$  u izrazu (9.26) naziva se *Fourierova transformacija* prekidne vremenske serije  $X_t$ , a  $X_t$  dobijeno prema izrazu (9.25) naziva se *inverzna Fourierova transformacija* od  $f(\omega)$ . Ova dva izraza zajedno čine *par Fourierovih transformacija*.

Da bi ukazali na interpretaciju para Fourierovih transformacija možemo povući paralelu između Fourierove reprezentacije periodične prekidne vremenske serije date izrazom (9.14) i Fourierove reprezentacije neperiodične prekidne vremenske serije date izrazom (9.25). Slično se mogu posmatrati koeficijenti  $c_k$  dati izrazom (9.14) i funkcija  $f(\omega)$  data izrazom (9.26). Inverzna Fourierova transformacija sugeriše da se  $X_t$  može posmatrati kao linearna kombinacija kompleksnih trigonometrijskih funkcija infinitezimalno bliskih u frekvenciji sa amplitudom  $|f(\omega)|d\omega$ . Zato se veličina  $|f(\omega)|$  naziva *spektar*, a njenim osobinama bavićemo se u narednom poglavlju.

Do sada smo za vremensku seriju pretpostavljali da je konačne dužine. Par Fourierovih transformacija datih izrazima (9.25) i (9.26) ostaje i dalje validan ako je neperiodična prekidna vremenska serija beskonačne dužine. U tom slučaju nameće se uslov na niz  $X_t$  da bi suma u izrazu (9.26) konvergirala. Taj uslov glasi

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |X_t| < \infty, \quad (9.27)$$

odnosno slabiji uslov zahteva da

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} X_t^2 < \infty, \quad (9.28)$$

pri čemu uslov (9.27) implicira uslov (9.28), ali ne važi obratno.

Na kraju ukažimo na važnu razliku osobine periodičnog i neperiodičnog niza pri analizi u frekventnom domenu. Frekvencije kod periodične vremenske serije formiraju konačan prebrojiv skup, a varijacije na celom vremenskom horizontu su beskonačne. Stoga osobine ove vremenske serije izuavamo preko spektra na konačnom skupu harmonijski povezanih frekvencija.

Taj spektar smo nazvali linijski spektar. Za razliku od periodične vremenske serije kod neperiodične imamo beskonačan skup frekvencija. Stoga nam kod ove serije uslov (9.27) obezbeđuje da na beskonačnom vremenskom horizontu imamo konačan

varijabilitet. Zato kod neperiodične vremenske serije njene osobine izuavamo preko spektra na beskonačnom skupu frekvencija.

## 9.3 SPEKTRALNA TEORIJA STACIONARNIH PROCESA

### 9.3.1 Spektar i njegove osobine

Kod jednostavnog cikličnog modela koeficijenti  $a$  i  $b$  su fiksni parametri, a ugaona frekvencija uzima određenu vrednost iz intervala od 0 do  $\pi$ . Ovaj model očigledno nije stacionaran pošto je  $E(X_t)$  funkcija vremena. Međutim, da bismo primenili teoriju stohastičkih procesa kod ovog modela zamениmo koeficijente modela dvema slučajnim promenljivama  $U$  i  $V$  koje su međusobno nekorelirane i imaju sredinu jednaku nuli, a varijansa im je jednaka  $\sigma^2$ . Može pokazati<sup>3</sup> da je kod jednostavnog cikličnog modela sa ovako interpretiranim koeficijentima:  $E(X_t) = 0$ ,  $Var(X_t) = \sigma^2$  i  $\gamma_k = \sigma^2 \cos \omega k$ , za  $k = 1, 2, \dots$ . Nač prvobitno nestacionaran model sa drugačije interpretiranim koeficijentima sada postaje stacionaran, ali i dalje zadržava svoju determinističku prirodu. Naime, mada su  $U$  i  $V$  slučajne promenljive one su fiksne kod konkretne realizacije, pa je potrebno imati samo dve opservacije da bi se egzaktno odredilo  $u$  i  $v$ , a zatim ostale opservacije serije možemo prognozirati bez greške.

Kao i u prethodnom poglavlju možemo jednostavni ciklični model uopšti, posmatrajući vremensku seriju u zavisnosti ne samo od jedne, nego od više frekvencija uz drugačiju interpretaciju koeficijenata. Iste pretpostavke koje smo uveli za slučajne promenljive  $U$  i  $V$  uvodimo i za  $U_k$  i  $V_k$ , pa na osnovu njih možemo izračunati varijansu, odnosno autokovarijansu ovog cikličnog modela čije smo koeficijente  $a_k$  i  $b_k$  zamenili slučajnim promenljivama  $U_k$  i  $V_k$ . Može se postaviti pitanje zašto uključiti samo konačan broj frekvencija u ovaj ciklični model. Da bismo omogućili beskonačnom broju trigonometrijskih članova da budu uključeni u model, odnosno posmatrajući beskonačan broj frekvencija iz intervala od 0 do  $\pi$ , pustimo da broj članova u ovom modelu raste u beskonačnost, a znak za sumiranje zamениmo integralom. Prekidne slučajne promenljive  $U_k$  i  $V_k$  zamениmo neprekidnim funkcijama  $U(\omega)$  i  $V(\omega)$ , a dobijenu *spektralnu reprezentaciju* procesa  $X_t$  pišemo u obliku

$$X_t = \int_0^{\pi} U(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^{\pi} V(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (9.29)$$

Funkcije  $U(\omega)$  i  $V(\omega)$  su stohastičke prirode sa osobinama sličnim osobinama svojih diskretnih analogona  $U_k$  i  $V_k$ . U izrazu (9.29) figuriraju dakle stohastički integrali čiji matematički tretman prevazilazi okvire ovoga udžbenika. Bitno je međutim istaći da korišćenjem spektralne reprezentacije procesa možemo pokazati da svaka frekvencija iz

<sup>3</sup> Videti na primer: Jenkins i Watts (Vots) (1968, s. 223).

intervala od 0 do  $\pi$  daje doprinos varijansi procesa. Na osnovu teoreme Wienera (Viner) i Hin-ina<sup>4</sup> umesto funkcija  $U(\omega)$  i  $V(\omega)$  uvodimo novu funkciju na osnovu koje dajemo spektralnu reprezentaciju autokovarijacione funkcije. Pokazano je za ma koji stacionarni proces  $X_t$  da je autokovarijaciona funkcija data izrazom<sup>5</sup>:

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \cos \omega k d\omega, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (9.30)$$

odakle za  $k = 0$  dobijamo

$$\gamma_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega. \quad (9.31)$$

Izrazom (9.31) direktno se sugeriše da funkcija  $f(\omega)$  koju nazivamo *spektar*, omogućava razlaganje varijanse serije na ciklične komponente. Neki autori (na primer Anderson (1971)) nazivaju spektrom i funkciju  $2f(\omega)$ , jer je  $f(\omega)$  parna funkcija, pa se može umesto na intervalu od  $-\pi$  do  $\pi$  posmatrati na intervalu od 0 do  $\pi$ . Do spektra možemo doći na osnovu poznatih autokovarijansi izražavajući  $f(\omega)$  iz izraza (9.30). Tako dobijamo da je spektar

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ \gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos \omega k \right]. \quad (9.32)$$

Do ovog izraza kojim je iskazana veza između spektra i autokovarijacione funkcije, moglo se doći direktno polazeći od Fourierove transformacije. Za stacionarni proces  $X_t$  sa autokovarijacionom funkcijom koja ispunjava uslov (9.27) Fourierova transformacija niza autokovarijansi  $\gamma_k$  postoji i glasi

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\omega k}. \quad (9.33)$$

Ako se uzme u obzir veza trigonometrijskih i eksponencijalnih funkcija (izrazi (9.5) i (9.6)), zatim da je autokovarijaciona funkcija parna funkcija, te da je  $\sin 0 = 0$ ,  $\sin \omega(-k) = -\sin \omega k$  i  $\cos \omega(-k) = \cos \omega k$ , posle par koraka spektar možemo pisati kao što je to dato izrazom (9.30). Do izraza (9.30) moglo se doći i korišćenjem inverzne Fourierove transformacije funkcije spektra:

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega k} d\omega. \quad (9.34)$$

Navedimo osobine funkcije  $f(\omega)$ :

<sup>4</sup> Videti na primer: Bartlett (1966).

<sup>5</sup> Videti na primer: Anderson (Anderson) (1971, ss. 415-416).



1.  $f(\omega)$  je neprekidna i realna nenegativna funkcija. Stoga je nazivamo *spektar* autokovarijacionog niza  $\gamma_k$  ili odgovaraju}eg stacionarnog procesa  $X_t$ .
2. Kako je  $f(\omega) = f(\omega + 2\pi)$ , spektar je periodi-na funkcija sa periodom jednakom  $2\pi$ .
3. Ona je simetri-na parna funkcija, jer je  $f(\omega) = f(-\omega)$ , pa se zato grafi-ki prikazuje samo za vrednosti frekvencija iz intervala od 0 do  $\infty$ .
4. Na osnovu (9.31) za  $k=0$  direktno sledi  $Var(X_t) = \gamma_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega$ . Ovo opravdava ranije re-eno o analizi spektra kao postupku razlaganja varijanse procesa. Veli-ina  $f(\omega)d\omega$  ozna-ava doprinos varijansi procesa one komponente procesa -ija je frekvencija u intervalu  $(\omega, \omega + d\omega)$ . Ispup-enje, odnosno vrh na spektru ukazuje na va`an doprinos varijansi procesa komponenti iz odgovaraju}eg intervala frekvencija.
5. Izrazima (9.33) i (9.34) uspostavljena je jednozna-na veza izme|u spektra i autokovarijacione funkcije. Te jedna-ine formiraju par Fourierovih transformacija. To zna-i da je pristup analizi vremenskih serija u vremenskom i frekventnom domenu teorijski ekvivalentan. Me|utim, u nekim slu-ajevima u zavisnosti od cilja analize koristimo jedan od ova dva pristupa koji je primereniji postavljenom cilju.

### 9.3.2 Spektralna funkcija rasporeda

Pretpostavka postojanja spektralne reprezentacije autokovarijacione funkcije iskazana je uslovom (9.27). Op{tiji pristup definisanju spektralne reprezentacije autokovarijacione funkcije zasnovan je na jednakosti

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega k} dF(\omega), \quad (9.35)$$

gde funkciju  $F(\omega)$  nazivamo *spektralna funkcija rasporeda*. Spektralna funkcija rasporeda je nenegativna i neopadaju}a funkcija. Kada se ograni-imo samo na realne procese, odnosno na interval frekvencija  $(0, \pi)$ , tada je  $F(\omega) = 0$  za  $\omega < 0$  i  $F(\pi) = Var(X_t)$ . Ipak, spektralna funkcija rasporeda nije u potpunosti identi-na statisti-kim funkcijama rasporeda jer za nju ne va`i normiraju}i uslov. Ovde dobijamo da je  $\int_{-\pi}^{\pi} dF(\omega) = \gamma_0$ , {to je u op{tem slu-aju razli-ito od jedinice.

Ukoliko proces sadr`i trigonometrijsku deterministi-ku komponentu, kao {to je to slu-aj sa op{tim cikli-nim modelom (9.21), tada uz pretpostavku da su fazni pomaci  $\theta_k$ , nezavisne uniformno raspore|ene slu-ajne promenljive na intervalu  $[-\pi, \pi]$ , spektralna funkcija rasporeda bi}e neopadaju}a stepena funkcija. Ona }e imati skokove u ta-kama

prekida  $\omega_k$ , sa prira{tajem koji je jednak  $A_k^2/4$ , na frekvencijama razli-itim od nulte, a na nultoj frekvenciji prira{taj funkcije bi}e jednak  $A_k^2/2$ .

U op{tem slu-aju spektralna funkcija rasporeda mo`e se razlo`iti na tri funkcije prema slede}em izrazu:

$$F(\omega) = F_1(\omega) + F_2(\omega) + F_3(\omega), \quad (9.36)$$

gde je  $F_1(\omega)$  neopadaju}a neprekidna funkcija,  $F_2(\omega)$  je neopadaju}a stepena funkcija, a  $F_3(\omega)$  je "singularna" funkcija i ona se u primenama naj-e{}e izostavlja. Stoga kada govorimo o ovom razlaganju uzimamo u obzir samo prve dve funkcije. Ovo razlaganje spektralne funkcije rasporeda u bliskoj je vezi sa poznatom Woldovom teoremom o razlaganju stacionarnog procesa. Da podsetimo, prema Woldovoj teoremi svaki stohasti-ki proces koji je stacionaran u {irem smislu mo`e se razlo`iti na dve komponente. Prva je potpuno slu-ajna, a druga je potpuno deterministi-ka komponenta. U kontekstu spektralne analize prva komponenta u Woldovom razlaganju ima spektralnu funkciju rasporeda  $F_1(\omega)$  (apsolutno neprekidna spektralna funkcija rasporeda), a druga komponenta spektralnu funkciju rasporeda  $F_2(\omega)$  (stepena spektralna funkcija rasporeda).

Normiranu formu spektralne funkcije rasporeda dobijamo deobom spektralne funkcije rasporeda  $F(\omega)$  varijansom procesa  $\gamma_0$ , tj.  $F^*(\omega) = F(\omega)/\gamma_0$ . Ona ukazuje na *proporciju* varijanse koja se pridru`uje frekvencijama iz intervala  $[-\pi, \omega]$ . Ovako definisana funkcija sli-na je po svojim osobinama svakoj funkciji rasporeda.

### 9.3.3 Spektralna funkcija gustine

Prvi izvod spektralne funkcije rasporeda nazivamo *spektralna funkcija gustine* ili kratko *spektar*, u oznaci  $f(\omega) = dF(\omega)/d\omega$ . Njenu definiciju kao Fourierovu transformaciju autokovarijacione funkcije izlo`ili smo u Odeljku 9.3.1, gde su tako|e navedene i njene osobine. Normirani oblik spektralne funkcije gustine glasi:

$$f^*(\omega) = \frac{f(\omega)}{\gamma_0} = \frac{dF^*(\omega)}{d\omega}. \quad (9.37)$$

Za normiranu spektralnu funkciju gustine ka`emo da ima sve osobine funkcije gustine verovatno}e slu-ajne promenljive. Ona ukazuje na *proporciju* varijanse procesa koja se pridru`uje frekvencijama iz intervala  $(\omega, \omega + d\omega)$ . Mo`e se uspostaviti veza izme|u normirane spektralne funkcije gustine i autokorelacione funkcije. Ka`emo da je normirana spektralna funkcija gustine  $f^*(\omega)$  Fourierova transformacija autokorelacione funkcije  $\rho_k$ . Analogno vezi spektra i autokovarijacione funkcije date izrazom (9.32) pi{emo

$$f^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos \omega k \right]. \quad (9.38)$$

### 9.3.4 Spektar teorijskih procesa

Do spektra stacionarnih stohastičkih procesa koje smo analizirali u 4. Glavi možemo doći na osnovu izraza (9.32) ili (9.33) koji uspostavlja vezu između spektra i autokovarijacione funkcije. Međutim, kod većine teorijskih procesa možemo krajim putem doći do spektra tako što ćemo uspostaviti vezu između spektralne funkcije gustine (date izrazom (9.33)) i funkcije generatriše autokovarijansi (date izrazom (4.26)). Jednostavnim poređenjem izraza (4.26) i (9.33) dolazimo do tražene relacije:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \gamma(e^{-i\omega}). \quad (9.39)$$

Za linearni proces (izraz (4.19)) funkcija generatriše autokovarijansi data je izrazom (4.27). Korišćenjem tog izraza možemo napisati jednu je jednaka funkcija generatriše autokovarijansi stacionarnog i invertibilnog ARMA( $p, q$ ) procesa:  $\phi_p(B)X_t = \theta_q(B)\varepsilon_t$ . Prethodno ARMA proces pišemo u MA formi:  $X_t = \psi(B)\varepsilon_t$ , gde je  $\psi(B) = \theta_q(B)/\phi_p(B)$ . Sada je funkcija generatriše autokovarijansi ovog ARMA( $p, q$ ) procesa:

$$\gamma(B) = \sigma^2 \frac{\theta_q(B)\theta_q(B^{-1})}{\phi_p(B)\phi_p(B^{-1})}, \quad (9.40)$$

a preko nje i izraza (9.39) spektralnu funkciju gustine ARMA( $p, q$ ) procesa pišemo u obliku:

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2 \theta_q(e^{-i\omega})\theta_q(e^{i\omega})}{2\pi \phi_p(e^{-i\omega})\phi_p(e^{i\omega})} = \frac{\sigma^2 \left| \theta_q(e^{-i\omega}) \right|^2}{2\pi \left| \phi_p(e^{-i\omega}) \right|^2}. \quad (9.41)$$

Kako je ARMA proces invertibilan to postoji inverzna funkcija spektralne funkcije gustine koja glasi:

$$f^{-1}(\omega) = \frac{2\pi \phi_p(e^{-i\omega})\phi_p(e^{i\omega})}{\sigma^2 \theta_q(e^{-i\omega})\theta_q(e^{i\omega})} = \frac{2\pi \left| \phi_p(e^{-i\omega}) \right|^2}{\sigma^2 \left| \theta_q(e^{-i\omega}) \right|^2}. \quad (9.42)$$

Oigledno je da je izrazom (9.42) data spektralna funkcija gustine ARMA( $q, p$ ) procesa. Primenom inverzne Fourierove transformacije na funkciju  $f^{-1}(\omega)$  dobićemo:

$$\gamma_k^{(I)} = \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\omega) e^{i\omega k} d\omega, \quad (9.43)$$

{to predstavlja inverznu autokovarijacionu funkciju. Deobom izraza (9.43) sa  $\gamma_0^{(I)}$  dobija se dobro poznata inverzna autokorelaciona funkcija koju smo koristili kao sredstvo za identifikaciju reda ARMA procesa.

Odredimo spektralnu funkciju gustine za karakteristi-ne stohasti-ke procese iz 4. Glave kori{}enjem izraza za spektralnu funkciju gustine op{teg ARMA procesa kao i veze spektra i autokovarijacione funkcije.

- a) *Proces belog {uma.* Autokovarijaciona funkcija  $\gamma_k$  procesa belog {uma jednaka je  $\sigma^2$ , za  $k=0$ , a 0 ina-e. Spektralnu funkciju gustine ra-unamo na osnovu izraza (9.32) i ona glasi

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi. \quad (9.44)$$

Zna-i da je spektar konstantan u intervalu  $[-\pi, \pi]$ , pa sve frekvencije daju podjednak doprinos varijansi procesa belog {uma.

- b) *AR(1) procesi.* Autokovarijaciona funkcija ovih procesa data je izrazom  $\gamma_k = \phi_1^{|k|} \gamma_0$ ,  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Kori{}enjem izraza (9.33) mo`emo odrediti spektralnu funkciju gustine:

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_1^k e^{-i\omega k} + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_1^k e^{i\omega k} \right) \\ &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \left( 1 + \frac{\phi_1 e^{-i\omega}}{1 - \phi_1 e^{-i\omega}} + \frac{\phi_1 e^{i\omega}}{1 - \phi_1 e^{i\omega}} \right). \end{aligned} \quad (9.45)$$

odakle kori{}enjem veze trigonometrijske i eksponencijalne funkcije kao i rezultata prema kome je  $\sigma^2 = \gamma_0 / (1 - \phi_1^2)$ , dobijamo:

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{(1 + \phi_1^2 - 2\phi_1 \cos \omega)}. \quad (9.46)$$

Na Slici 9.4 prikazana je spektralna funkcija AR(1) procesa za pozitivnu, odnosno negativnu vrednost koeficijenta procesa. Kada je  $\phi_1 > 0$  spektrom dominiraju komponente na ni`im frekvencijama, dok za  $\phi_1 < 0$  spektrom dominiraju komponente na vi{im frekvencijama.

- c) *Autoregresioni procesi vi{eg reda.* Spektar AR(2) procesa je

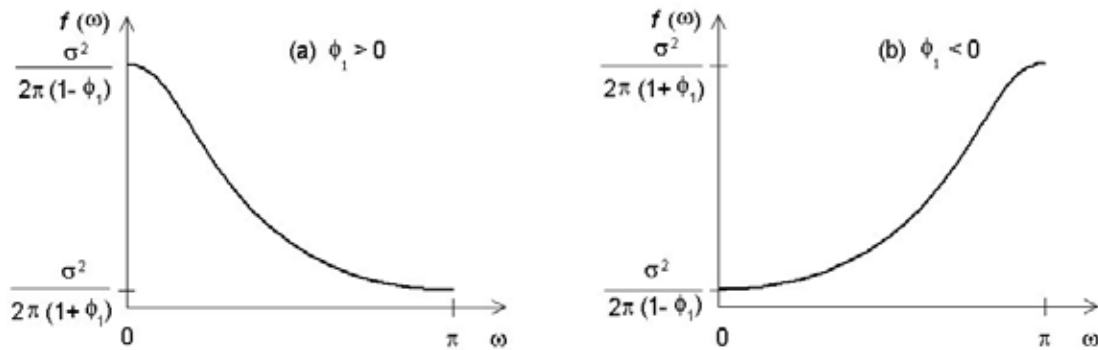
$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{(1 + \phi_1^2 + \phi_2^2 - 2\phi_1(1 - \phi_2) \cos \omega - 2\phi_2 \cos 2\omega)}. \quad (9.47)$$

Ukoliko su koreni karakteristi-ne jedna-ine ovoga procesa kompleksni konstatovano je da autokorelaciona funkcija pokazuje tendenciju ka prigu{enom cikli-nom kretanju. Ova pojava cikli-nog pona{anja vremenske

serije mo`e se bolje izu`iti u frekventnom domenu. Ukoliko spektar AR(2) procesa sadr`i vrh odgovaraju}a vrednost frekvencije mo`e se odrediti izjedna-avanjem izvoda spektra (9.47) sa nulom. Dobijamo

$$\omega^* = \arccos \left[ -\frac{\phi_1(1-\phi_2)}{4\phi_2} \right], \quad (9.48)$$

na osnovu koga se mo`e odrediti perioda ciklusa ove komponente. AR proces vi{eg reda mo`e sadr`avati spektar sa nekoliko vrhova ili dolja.

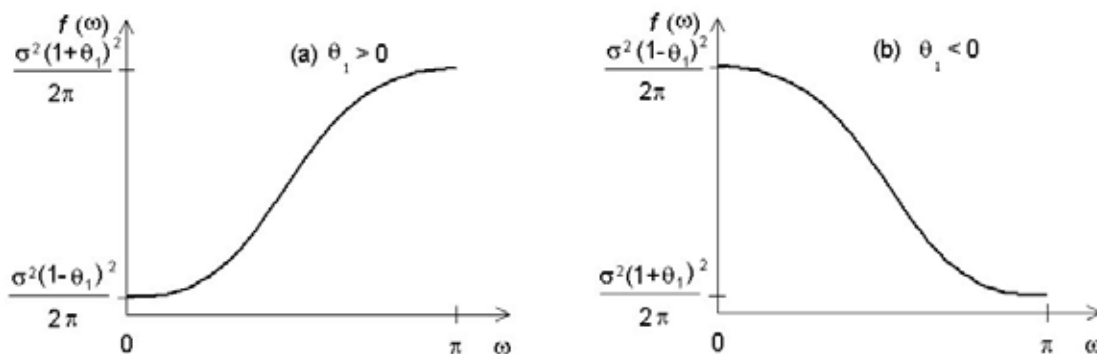


Slika 9.4 Spektar AR(1) procesa

- d) *MA(1) procesi.* Funkcija generatrisa autokovarijansi ovih procesa jednaka je  $\gamma(B) = \sigma^2(1 - \theta_1 B)(1 - \theta_1 B^{-1})$ . Na osnovu ove funkcije, a prema izrazu (9.41) spektralna funkcija gustine ovih procesa je

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 - \theta_1 e^{-i\omega})(1 - \theta_1 e^{i\omega}) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 - 2\theta_1 \cos \omega + \theta_1^2). \end{aligned} \quad (9.49)$$

Na Slici 9.5 prikazan je spektar MA(1) procesa za pozitivne i negativne vrednosti koeficijenta  $\theta_1$ . Kada je  $\theta_1 > 0$  spektrom dominiraju komponente na vi{im frekvencijama, daju}i tzv. visokofrekventni spektar, a ako je  $\theta_1 < 0$  spektrom dominiraju komponente na ni`im frekvencijama, daju}i tzv. niskofrekventni spektar.



Slika 9.5 Spektar MA(1) procesa

- e) *Zbir dva nezavisna procesa.* Ukoliko na osnovu dva stacionarna procesa formiramo treći, kao njihov zbir, tada će spektar zbira ova dva nezavisna procesa biti jednak zbiru dva nezavisna spektra.
- f) *Sezonski ARMA procesi.* Kao prvi primer spektra sezonskog ARMA procesa odredimo spektralnu funkciju gustine stacionarnog sezonskog AR(1)<sub>s</sub> procesa sa periodom ciklusa jednakom 12. Funkcija generatrisa autokovarijansi glasi

$$\gamma(B) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{(1 - \Phi_1 B^{12})(1 - \Phi_1 B^{-12})}, \quad (9.50)$$

a na osnovu nje spektar je prema izrazu (9.41):

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{(1 - \Phi_1 e^{-i12\omega})(1 - \Phi_1 e^{i12\omega})} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{1 - 2\Phi_1 \cos(12\omega) + \Phi_1^2}. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Za pozitivnu vrednost koeficijenta procesa spektar će imati vrhove na nultoj frekvenciji, a takođe na harmonijskim frekvencijama  $2\pi k/12$  za  $k=1,2,3,4,5,6$ , a dolje na frekvencijama  $\pi(2k-1)/12$  za  $k=1,2,3,4,5,6$ .

Kao drugi primer sezonskog procesa navodimo multiplikativni sezonski ARMA proces sa nesezonskom i sezonskom AR komponentom. Njegov spektar dobijamo kombinacijom izraza (9.46) i (9.51):

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{(1 - 2\phi_1 \cos \omega + \phi_1^2)(1 - 2\Phi_1 \cos(12\omega) + \Phi_1^2)}. \quad (9.52)$$

Analizu nestacionarnih procesa u frekventnom domenu ilustrujemo kori{enjem izra-unatog spektra AR(1) procesa. Ako u AR(1) procesu pustimo da  $\phi_1 \rightarrow 1$ , u grani-nom slu-aju ovaj proces postaje proces slu-ajnog hoda, pa se izraz

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{4\pi} \frac{1}{1 - \cos \omega} \quad (9.53)$$

slobodnije re-eno, mo`e se smatrati njegovim spektrom. Striktno posmatrano za proces slu-ajnog hoda nije definisana spektralna funkcija gustine po{to za taj proces nije ispunjen uslov (9.27). Me|utim, spektralna funkcija gustine (9.53) osim na nultoj frekvenciji gde vrh spektra postaje beskona-no visok, ima sve karakteristike spektra. Zna-i da nam prisustvo izrazitog vrha na nultoj frekvenciji kod ocenjenog spektra sugeri{e potrebu diferenciranja originalne serije. Do sli-nog zaklju-ka u smislu potrebe za sezonskim diferenciranjem dolazimo ukoliko je kod ocenjenog spektra na sezonskim frekvencijama prisutan izraziti vrh. S obzirom na navedena svojstva spektra on se zajedno sa autokorelacionom funkcijom mo`e koristiti barem u postupku utvr|ivanja potrebe za diferenciranjem vremenske serije.

### 9.3.5 Efekat sistematskog uzorka

U uvodnoj glavi smo konstatovali da do prekidne vremenske serije dolazimo sistematskim uzorkom. To zna-i da opservacije vremenske serije bele`imo u jednakim vremenskim intervalima, recimo mesec ili kvartal, bez obzira na to da li je posmatranu pojavu mogu}e registrovati u kra}im vremenskim intervalima (nedeljno ili dnevno) ili neprekidno (na primer, slu-aj kamatnih stopa). Razlika izme|u vremenskog intervala u kome registrujemo neku pojavu i njenog "prirodnog" intervala<sup>6</sup> zahteva podrobnije razmatranje s obzirom posledice koje ona ima pri interpretaciji spektra.

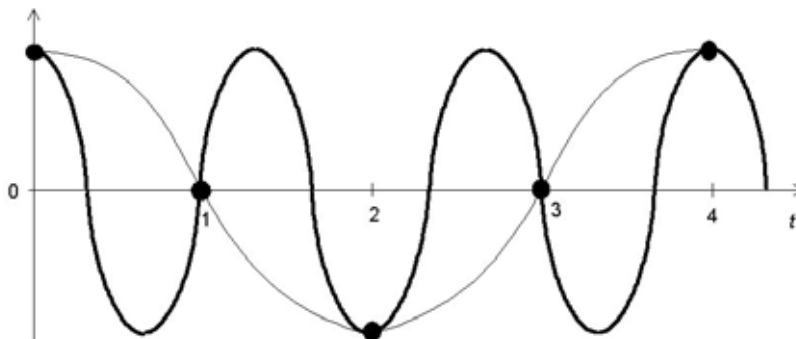
Pretpostavimo da je  $X(t)$  neprekidan proces koji sadr`i cikli-nu komponentu na frekvenciji  $2\pi/\Delta t$ , gde smo sa  $\Delta t$  ozna-ili vremenski interval izme|u dva snimanja ove serije (ono {to nazivamo korak kod sistematskog uzorka). Tada uzeti uzorak, odnosno na{a prekidna vremenska serija  $X_t$ , ne}e sadr`ati informaciju o toj komponenti.

Razmotrimo slede}i primer. Pretpostavimo da temperaturu u jednom gradu merimo u 14 -asova svakog dana. Jasno je da na osnovu tih opservacije ne}emo biti u stanju ni{ta re}i o varijacijama temperature unutar, odnosno tokom dana. U cilju dobijanja informacija o varijacijama tokom dana, moramo pove}ati stopu uzorkovanja i uzeti dve ili vi{e opservacije po danu. Sli-an slu-aj je kada raspola`emo samo godi{njim podacima o prodaji nekog proizvoda. Na osnovu godi{nje vremenske serije nemamo nikakvu informaciju o varijaciji prodaje unutar godine po sezonama. Do te informacije

<sup>6</sup> Tako je tokom perioda hiperinflacije u 1993. godini plata zaposlenih ispla}ivana nedeljno, a zvani-na statistika je bele`ila njihovo kretanje jedanput mese-no. U ovom primeru "prirodan" interval vremena je nedelju dana.

Ukoliko raspolažemo mese-nim ili kvartalnim vremenskim serijama. U opštem slučaju najviša frekvencija o kojoj imamo direktnu informaciju jeste  $\pi/\Delta t$  i ona se naziva *Nyquistova* (Najkvist) *frekvencija*. Sa samo jednom opservacijom po danu, Nyquistova frekvencija je  $\omega_0 = \pi$  radijana po danu ili 1/2 ciklusa po danu (potrebno je da proteknu dva dana da bi se završio jedan ciklus). Znači da se varijacije na frekvencijama višim od  $\pi$  ne mogu razlikovati od varijacija na odgovarajućoj frekvenciji u intervalu  $[-\pi, \pi]$ .

Ukoliko neprekidni proces sadrži cikluse sa frekvencijom koja je viša od  $\omega_0$ , tada je ta komponenta biti pomešana ili "lažno" predstavljena (engl. *aliased*, a sama pojava se naziva *aliasing*) kao komponenta koja ima frekvenciju manju od Nyquistove frekvencije  $\omega_0$ . To proizlazi iz postupka registrovanja opservacija sistematskim uzorkom, prema kome se visokofrekventna kosinusna funkcija poklapa u trenucima registrovanja sa niskofrekventnom kosinusnom komponentom. Ovo je ilustrovano na Slici 9.6.



Slika 9.6 Ilustracija fenomena "lažnog" predstavljanja

Fenomen "lažnog" predstavljanja čini veoma teškim ocenjivanje doprinosa različitih komponenti ili ga u potpunosti onemogućava. Na primer, ako je Nyquistova frekvencija jednaka  $\omega_0$ , tada za  $\omega < \omega_0$ , frekvencije  $\omega$ ,  $2\omega_0 - \omega$ ,  $2\omega_0 + \omega$ ,  $4\omega_0 - \omega$ ,  $4\omega_0 + \omega$ , ... ne možemo razlučiti međusobno, a zbir njihovog doprinosa spektru pripisuje se frekvenciji  $\omega$ . Da bismo izbegli "lažno" predstavljanje izbor koraka kod sistematskog uzorka mora biti takav da sve frekvencije budu manje od Nyquistove frekvencije. Ako ocenjeni spektar ne teži nuli blizu Nyquistove frekvencije to nam sugeriše da se proba sa manjom vrednošću  $\Delta t$  (kraći korak kod sistematskog uzorka).

## 9.4 OCENA SPEKTRA

### 9.4.1 Periodogram i njegove osobine

U Poglavlju 9.2 izložena je poznata Parsevalova relacija prema kojoj se varijansa prekidne periodične vremenske serije razlaže na komponente od kojih svaka meri



doprinos pojedina-ne Fourierove frekvencije ukupnoj varijansi serije. Ovaj rezultat nam neposredno omogućava da definiemo veličinu

$$I(\omega_k) = \left\{ \begin{array}{ll} na_0^2, & k = 0 \\ \frac{n}{2}(a_k^2 + b_k^2), & k = 1, 2, \dots, (n-1)/2 \\ na_{n/2}^2, & k = \frac{n}{2} \text{ kada je } n \text{ parno} \end{array} \right\} \quad (9.54)$$

koju nazivamo *periodogram*. On je korišten od strane Schustera za otkrivanje skrivenih periodičnih komponenti u vremenskoj seriji. Periodične komponente nazivaju se i harmonici, pa se ponekad ova vrsta analize naziva *harmonijska analiza*.

Pretpostavimo da su  $X_1, X_2, \dots, X_n$  nezavisne identično raspoređene slučajne promenljive raspoređene po normalnom rasporedu  $N(0, \sigma^2)$ . Tada se na osnovu izrazu (9.19) može pokazati da

$$E(a_k) = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n E(X_t) \cos \omega_k t = 0, \quad (9.55)$$

$$\text{Var}(a_k) = \frac{4}{n^2} \sum_{t=1}^n \sigma^2 (\cos \omega_k t)^2 = \frac{2\sigma^2}{n}. \quad (9.56)$$

Znači da su  $a_k$  za  $k = 1, 2, \dots, (n-1)/2$  nezavisne identično raspoređene normalne slučajne promenljive sa rasporedom  $N(0, 2\sigma^2/n)$ . Standardizacijom ovih promenljivih, a potom njihovim stepenovanjem dobijamo da su  $na_k^2/2\sigma^2$  nezavisne slučajne promenljive raspoređene po  $\chi^2$ -rasporedu sa jednim stepenom slobode. Slično se dobija i za promenljive  $nb_k^2/2\sigma^2$ . Dalje,  $na_k^2/2\sigma^2$  i  $nb_j^2/2\sigma^2$  su nezavisne za  $k = 1, 2, \dots, (n-1)/2$  i  $j = 1, 2, \dots, (n-1)/2$ , što sledi na osnovu osobina ortogonalnosti funkcija sinusa i kosinusa. Naime

$$\begin{aligned} \text{Cov}(a_k, b_j) &= \frac{4}{n^2} E \left( \sum_{t=1}^n X_t \cos \omega_k t \cdot \sum_{v=1}^n X_v \sin \omega_j v \right) \\ &= \frac{4}{n^2} \sum_{t=1}^n [E(X_t^2) \cos \omega_k t \cdot \sin \omega_j t] = \frac{4}{n^2} \sum_{t=1}^n (\cos \omega_k t \cdot \sin \omega_j t) = 0. \end{aligned} \quad (9.57)$$

Prema tome, ordinate periodograma

$$\frac{I(\omega_k)}{\sigma^2} = \frac{n}{2\sigma^2} (a_k^2 + b_k^2), \quad k = 1, 2, \dots, (n-1)/2 \quad (9.58)$$

su nezavisne slu-ajne promenljive identi-no raspore|ene po  $\chi^2$ -rasporedu sa dva stepena slobode. Zaklju-uju}i na isti na-in mo`emo konstatovati da je  $I(0)/\sigma^2$  i  $I(\pi)/\sigma^2$  za parno  $n$ , raspore|eno po  $\chi^2$ -rasporedu sa jednim stepenom slobode.

Izra`avanje jednostavnog cikli-nog modela u formi regresionog modela omogu}ava nam testiranje hipoteze  $H_0 : a_k = b_k = 0$ , protiv alternativne hipoteze  $H_0 : a_k \neq 0$  ili  $b_k \neq 0$ . U te svrhe koristimo statistiku testa

$$F = \frac{(n-3)(a_k^2 + b_k^2)}{2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\lfloor n/2 \rfloor} (a_j^2 + b_j^2)}, \quad (9.59)$$

koja ima  $F$ -raspored sa 2 i  $(n-3)$  stepeni slobode. U op{tem slu-aju testiranje hipoteze da vremenska serija sadr`i  $m$  periodi-nih komponenti zasnivamo na op{tem cikli-nom modelu u regresionoj formi, a odgovaraju}a statistika testa

$$F = \frac{(n-2m-1) \sum_{i=1}^m (a_{k_i}^2 + b_{k_i}^2)}{2m \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (a_j^2 + b_j^2)} \quad (9.60)$$

ima  $F$ -raspored sa  $2m$  i  $(n-2m-1)$  stepeni slobode, gde posmatramo frekvencije  $\omega_{k_i} = 2\pi k_i / n$ , za one indekse  $\{k_i : i=1, \dots, m\}$  koji su podskup  $\{k : k=1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$ . ^ak i uz pretpostavku da periodi-na komponenta postoji, njena nam je frekvencija nepoznata. To dovodi u pitanje upotrebljivost navedenog  $F$ -testa u prakti-noj primeni izlo`enog postupka. Za takvu situaciju Fisher (Fi{er) (1929) je definisao statisti-ki postupak kojim tragamo za "skrivenom" periodom. On je zasnovan na maksimalnoj vrednosti periodograma

$$I^{(1)}(\omega_{(1)}) = \max_{\omega_k} \{I(\omega_k)\} \quad (9.61)$$

gde je sa  $\omega_{(1)}$  ozna-ena vrednost Fourierove frekvencije sa maksimalnom ordinatom periodograma. Egzaktni Fisherov  $T$  test zasnovan je na statistici

$$T = \frac{I^{(1)}(\omega_{(1)})}{\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} I(\omega_k)}. \quad (9.62)$$

Ukoliko je izra-unata  $T$  vrednost ve}a od kriti-ne vrednosti  $g_\alpha$ , odbacujemo nultu hipotezu da je  $X_t$  proces belog {uma i zaklju-ujemo da serija sadr`i periodi-nu komponentu na frekvenciji  $\omega_{(1)}$ . U Tabeli B11 (Dodatak B) navedene su kriti-ne vrednosti Fisherove  $T$  statistike za nivo zna-ajnosti  $\alpha = 0.05$ . Vrednosti u tre}oj koloni

te tabele predstavljaju aproksimaciju ta-nih vrednosti  $g_\alpha$ , pri -emu je kori{}ena slede}a aproksimacija:

$$P(T > g) \cong N(1 - g)^{N-1}, \quad (9.63)$$

gde je  $N = [n/2]$ . Pore|enjem vrednosti iz druge i tre}e kolone Tabele B11 zaklju-ujemo o visokom kvalitetu aproksimacije. Zato }emo u prakti-noj primeni ovog testa koristiti izraz (9.63) za odre|ivanje kriti-nih vrednosti  $g_\alpha$  Fisherovog  $T$  testa.

**Primer 9.4** Za kvartalnu vremensku seriju industrijske proizvodnje u Srbiji (serija S10) izra-unati periodogram. Kori{}enjem  $F$ -testa (izraz (9.59)) testirati zna-ajnost periodograma na svakoj Fourierovoj frekvenciji. Tako|e, Fisherovom  $T$  testom testirati hipotezu da serija predstavlja proces belog {uma, protiv alternativne hipoteze da serija sadr`i "skrivenu" periodi-nu komponentu.

Pre izra-unavanja periodograma, opservacije vremenske serije transformi{}emo kori{}enjem logaritamske transformacije. Kako primena analize vremenske serije u frekventnom domenu podrazumeva stacionarnost serije, to smo zbog o-igledne nestacionarnosti originalne serije istu sezonski i obi-no diferencirali. Naposletku smo od tako dobijenih opservacija oduzeli sredinu. Navedenim postupkom omogu}ili smo primenu analize periodograma. U suprotnom, na periodogramu bi bez obi-nog diferenciranja sva "snaga" serije bila skoncentrisana na nultoj frekvenciji. Ako bismo s druge strane primenili samo obi-no diferenciranje tada bi bez primene sezonskog diferenciranja "snaga" serije bila prete`no skoncentrisana na sezonskoj frekvenciji. Prema tome, nu`no je seriju obi-no i sezonski diferencirati pre nego {to se izra-una periodogram.

Kori{}enjem programa *RATS 3.0* izra-unali smo periodogram serije industrijske proizvodnje u Srbiji. Dobijene rezultate prikazali smo u Tabeli 9.1. U drugoj i -etvrtoj koloni data je alternativna "definicija" frekvencija. Uo-iti da  $\omega_k \in (0, \pi)$ , a  $\omega_k / 2\pi \in (0, 0.5)$ . U tre}oj koloni su date recipro-ne vrednosti druge "definicije" frekvencija, tj. perioda ciklusa. Uo-iti da vrednosti periode ciklusa pripadaju intervalu od beskona-ne vrednosti do 2 kvartala. Dva su komentara vezana za navedene grani-ne vrednosti periode ciklusa. Dugoro-nu komponentu, tj. trend vremenske serije alternativno defini{}emo kao cikli-nu komponentu sa beskona-nom vredno{}u periode ciklusa, odnosno to je ona cikli-na komponenta -ija je frekvencija jednaka nuli. Druga napomena ti-e se najmanje vrednosti periode ciklusa. Cikli-na komponenta sa najkra}om periodom ciklusa (najvi{}om frekvencijom) -iji se doprinos varijansi mo`e utvrditi na osnovu kvartalnih podataka jeste komponenta -ija se frekvencija poklapa sa Nyquistovom frekvencijom. Ovde Nyquistova frekvencija iznosi  $\pi$  radijana po kvartalu, pa se cikli-na komponenta sa

najkra}om periodom ciklusa odnosi na komponentu kod koje se jedan ciklus kompletira za dva kvartala.

**Tabela 9.1** Periodogram industrijske proizvodnje u Srbiji (serija S10)

$k$	$\omega_k$	$2\pi / \omega_k$	$\omega_k / 2\pi$	$I(\omega_k)$	$F$ – statistika
0	0.000	$\infty$	0.000	2.533	-
1	0.087	72.0	0.014	0.077	0.004
2	0.175	36.0	0.028	2.198	0.123
3	0.262	24.0	0.042	8.846	0.500
4	0.349	18.0	0.056	2.452	0.137
5	0.436	14.4	0.069	21.970	1.269
6	0.524	12.0	0.083	8.714	0.493
7	0.611	10.3	0.097	10.730	0.608
8	0.698	9.0	0.111	25.610	1.489
9	0.785	8.0	0.125	18.550	1.066
10	0.873	7.2	0.139	3.841	0.215
11	0.960	6.5	0.153	4.925	0.277
12	1.047	6.0	0.167	11.730	0.666
13	1.134	5.5	0.181	1.973	0.110
14	1.222	5.1	0.194	13.020	0.741
15	1.309	4.8	0.208	7.641	0.431
16	1.396	4.5	0.222	23.060	1.335
17	1.484	4.2	0.236	1.860	0.104
18	1.571	4.0	0.250	4.759	0.267
19	1.658	3.8	0.264	9.161	0.518
20	1.745	3.6	0.278	13.950	0.795
21	1.833	3.4	0.292	26.510	1.543
22	1.920	3.3	0.306	27.090	1.579
23	2.007	3.1	0.319	58.940	3.630
24	2.094	3.0	0.333	45.090	2.710
25	2.182	2.9	0.347	15.470	0.884
26	2.269	2.8	0.361	16.850	0.965
27	2.356	2.7	0.375	32.330	1.901
28	2.443	2.6	0.389	4.613	0.259
29	2.531	2.5	0.403	48.200	2.913
30	2.618	2.4	0.417	30.100	1.763
31	2.705	2.3	0.431	6.505	0.366
32	2.793	2.2	0.444	86.420	5.597
33	2.880	2.2	0.458	8.022	0.453
34	2.967	2.1	0.472	1.276	0.071
35	3.054	2.1	0.486	11.220	0.637
36	3.142	2.0	0.500	5.400	0.304

Vrednosti iz pretposlednje kolone Tabele 9.1 sugeri}u da je periodogram serije industrijske proizvodnje veoma "hrapavog" izgleda. Najvi}a ordinata periodograma vezana je za frekvenciju  $\omega_{32} = 2\pi \cdot 32 / 72 = 2.793$ . Ovoj frekvenciji odgovara perioda ciklusa  $2\pi / \omega_{32} = 2.2$  kvartala. U poslednjoj koloni Tabele 9.1 prikazane su vrednosti  $F$ –statistike prema izrazu (9.59). Kako je najbli}a kriti-na vrednost testa na nivou zna-ajnosti od 5% iz Tabele B4 (Dodatak B) za 2 i 69 stepeni slobode:  $F_{2,60;0.05} = 3.15$ ,

zaključujemo da periodogram ima statistički značajne ordinate koje odgovaraju frekvencijama  $\omega_{23} = 2.007$  i  $\omega_{32} = 2.793$ .

Naposletku za primenu Fisherovog  $T$  testa odredili smo  $I^{(1)}(\omega_{(1)}) = I^{(1)}(\omega_{32}) = 86.42$  i  $\sum_{k=1}^{[n/2]} I(\omega_k) = 619.1034$ . Prema tome izraunata vrednost Fisherovog testa je

$$T = \frac{I^{(1)}(\omega_{(1)})}{\sum_{k=1}^{[n/2]} I(\omega_k)} = \frac{I^{(1)}(\omega_{32})}{\sum_{k=1}^{32} I(\omega_k)} = \frac{86.42}{619.1034} = 0.1396.$$

Na osnovu Tabele B11 (Dodatak B) za  $N = [n/2] = 35$  kritična vrednost testa iznosi  $g_{0.05} = 0.17513$ , a za  $N = [n/2] = 40$  dobijamo  $g_{0.05} = 0.15738$ . Kritičnu vrednost testa možemo odrediti i na osnovu aproksimacije date izrazom (9.63):  $N(1-g)^{N-1} = 36(1-g)^{35} = 0.05$ . Na nivou značajnosti od 5% dobijamo da je za  $N = [n/2] = 36$  kritična vrednost testa  $g_{0.05} = 0.17513$ . Bez obzira koju god kritičnu vrednost testa koristili zaključak ostaje neizmenjen. Izraunata vrednost statistike testa je manja od kritične vrednosti, pa zaključujemo da serija predstavlja proces belog šuma, odnosno da periodična komponenta na frekvenciji  $\omega_{32} = 2.793$  nije statistički značajna. Frekventnu analizu ove vremenske serije nastavljemo se u Primeru 9.6. ■

O proširenju Fisherovog  $T$  testa za drugu najveću ordinatu periodograma kao i o detaljima statističkog postupka testiranja "skrivenih" periodičnih komponente na osnovu maksimalne vrednosti periodograma videti Wei (1990, ss. 259-263).

## 9.4.2 Uzorčaki spektar

Pri ocenjivanju spektralne funkcije gustine možemo poći od izraza (9.32) ili (9.33) tako što ćemo zameniti populacione autokovarijacione koeficijente ocenjenim, odnosno uzorčkim vrednostima. No, za razliku od navedenih izraza u kojima figuriraju beskonačan broj sabiraka, na osnovu konačne vremenske serije dužine  $n$ , možemo računati  $\hat{\gamma}_k$  samo za konačan broj doznji  $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ . Ocenu spektra  $f(\omega)$  na osnovu

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{(n-1)} \hat{\gamma}_k e^{-i\omega k} \quad (9.64)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left( \hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\gamma}_k \cos \omega k \right) \quad (9.65)$$

nazivamo *uzorčaki spektar*. Pokazano je u Odeljku 4.3.2 da je  $\hat{\gamma}_k$  asimptotski nepristrasna ocena populacionog autokovarijacionog koeficijenta, pa je stoga i uzorčaki

spektar asimptotski nepristrasna ocena populacionog spektra. Zato na prvi pogled uzora-ki spektar predstavlja glavnog kandidata za ocenu spektralne funkcije gustine. Me|utim, uzora-ki spektar nije konzistentna ocena populacionog spektra. Da bi smo to pokazali uspostavi}emo vezu izme|u uzora-kog spektra na Fourierovim frekvencijama i periodograma. U tom cilju polazimo od periodograma

$$\begin{aligned}
 I(\omega_k) &= \frac{n}{2}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{n}{2}(a_k - ib_k)(a_k + ib_k) \\
 &= \frac{n}{2} \left[ \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n X_t (\cos \omega_k t - i \sin \omega_k t) \right] \left[ \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n X_t (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t) \right] \\
 &= \frac{2}{n} \left[ \sum_{t=1}^n X_t e^{-i\omega_k t} \right] \left[ \sum_{t=1}^n X_t e^{i\omega_k t} \right] \\
 &= \frac{2}{n} \left[ \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}) e^{-i\omega_k t} \right] \left[ \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}) e^{i\omega_k t} \right] \\
 &= \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n (X_t - \bar{X})(X_s - \bar{X}) e^{-i\omega_k(t-s)}, \tag{9.66}
 \end{aligned}$$

gde smo koristili rezultat:  $\sum_{t=1}^n e^{i\omega_k t} = \sum_{t=1}^n e^{-i\omega_k t} = 0$ . Na osnovu ocene autokovarijacione funkcije (4.13) i stavljaju}i u izraz (9.66)  $j = t - s$ , dobijamo

$$\begin{aligned}
 I(\omega_k) &= 2 \sum_{j=-(n-1)}^{n-1} \hat{\gamma}_k e^{-i\omega_k j} \tag{9.67} \\
 &= 2 \left( \hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \hat{\gamma}_j \cos \omega_k j \right). \tag{9.68}
 \end{aligned}$$

Porede}i izraz (9.65) i (9.68) dobijamo tra`enu vezu uzora-kog spektra i periodograma:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{4\pi} I(\omega_k), \quad k = 1, 2, \dots, [n/2], \tag{9.69}$$

a za  $n$  parno,  $\hat{f}(\omega_{n/2}) = I(\omega_{n/2}) / 2\pi$ .

Uz pretpostavku da je  $X_t$  Gausov proces belog {uma tada

$$\hat{f}(\omega_k) \square \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{\chi_2^2}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \tag{9.70}$$

gde je  $\chi_2^2$  ozna-ava  $\chi^2$  - raspored sa dva stepena slobode.

Kako  $\sigma^2 / 2\pi$  predstavlja spektar procesa belog {uma, u op{tem slu-aju mo`emo re}i da je za Gausov proces

$$\hat{f}(\omega_k) \approx f(\omega_k) \frac{\chi_2^2}{2}. \quad (9.71)$$

Na osnovu rasporeda (9.71) uzora-kog spektra može se pokazati da je očekivana vrednost ocene spektra jednaka pravoj vrednosti spektra, a da je varijansa jednaka kvadratu spektra i da ne zavisi od dužine vremenske serije. Na osnovu ovih pokazatelja konstatujemo da je na Fourierovim frekvencijama uzora-ki spektar nepristrasna ocena pravog spektra. Međutim, uzora-ki spektar nije konzistentna ocena populacionog spektra jer varijansa ove ocene ne teži nuli sa povećanjem veličine uzorka. Takođe se može, korišćenjem izraza (9.69) i (9.58), pokazati nezavisnost ocene spektra za ma koje dve različite Fourierove frekvencije. Taviše, i na ostalim frekvencijama kovarijansa između ocena na dvema različitim frekvencijama teži nuli kada  $n \rightarrow \infty$ . Zato je uzora-ki spektar, kao direktna ocena spektra, nestabilan i pokazuje tendenciju da bude "izlomljen". Zbog ovih osobina u narednom koraku definićemo konzistentne ocene spektra koje su bazirane na izravnavanju periodograma i uzora-kog spektra.

### 9.4.3 Konzistentne ocene spektra

Konzistentne ocene spektra formiramo na osnovu postupka izravnavanja uzora-kog spektra. Dva su pristupa izravnavanju uzora-kog spektra. Prema prvom, izravnava se uzora-ki spektar u okolini izabrane frekvencije tako što se koristi ponderisana sredina izvesnog broja vrednosti uzora-kog spektra levo i desno od izabrane frekvencije. Ovaj postupak se naziva *izravnavanje u frekventnom domenu*. Kod drugog pristupa polazi se od veze spektra i autokovarijacione funkcije. Do ocene spektra dolazimo tako što za autokovarijacione koeficijente koristimo takav sistem pondera u izrazu za ocenu spektra kod koga su ponderi obrnuto proporcionalni dužini dočnje. Ovaj postupak se naziva *izravnavanje u vremenskom domenu*.

Kod izravnavanja u frekventnom domenu ponderaciona funkcija naziva se *spektralni prozor* (engl. *spectral window*) zato što se kroz njega "vide" samo neke spektralne ordinate u postupku ocene spektra. [to je širina spektralnog prozora veća, veći broj ordinata se koristi u računanju ponderisane sredine, pa rezultirajuća ocena postaje sve izravnatija i stabilnija sa manjom varijansom. Međutim, istovremeno sa povećanjem "otvorenosti" spektralnog prozora raste i pristrasnost jer se sve veći broj ordinata koristi u izrazu za ponderisanu sredinu. Dakle, prilikom izbora stepena "otvorenosti" spektralnog prozora potrebno je naći kompromis između zahteva za smanjivanjem varijanse i pristrasnosti ocene kao što je to i inače slučaj pri statističkom ocenjivanju.

Kod izravnavanja u vremenskom domenu ponderaciona funkcija naziva se *prozor dočnje* (engl. *lag window*) zato što se kroz njega "vide" samo neki autokovarijacioni koeficijenti u postupku ocene spektra. Ono što je rečeno za širinu spektralnog prozora, odnosno varijansu ocene spektra i stepen njene pristrasnosti važi i kod prozora dočnji. Međutim, kod prozora dočnje, za razliku od spektralnog prozora, imamo proporcionalan odnos između "otvorenosti" prozora i veličine varijanse. Naime, što je veća "otvorenost"

prozora docnije ve}a je vrednost varijanse ocene spektra. Istovremeno sa otvaranjem prozora docnije smanjuje se veli-ina pristrasnosti ocene spektra.

Mo`e se pokazati da su dva prozora u bliskoj vezi<sup>7</sup>. Naime, spektralni prozor je Fourierova transformacija prozora docnije, a ovaj je inverzna Fourierova transformacija spektralnog prozora. Zato }emo u nastavku izlaganja konzistentnih ocena spektra pa`nju posvetiti samo pristupu izravnanju uzora-kog spektra u vremenskom domenu, odnosno izlo`imo metode ocenjivanja zasnovane na alternativnim prozorima docnije.

Kori{}enjem prozora docnije izravnavamo autokovarijacione koeficijente kori{}enjem ponderacione funkcije  $W_n(k)$ , tako da ocena spektra glasi

$$\hat{f}_w(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^M W_n(k) \hat{\gamma}_k e^{-i\omega k}. \quad (9.72)$$

Pri tome smo uzeli u obzir da preciznost ocenjivanja autokovarijacionih koeficijenata opada sa pove}anjem docnije. Zato ponderaciona funkcija  $W_n(k)$ , pored toga {to je simetri-na (zbog simetri-nosti autokovarijacione funkcije koju ponderi{e) pridru`uje manju vrednost pondera ocenama autokovarijacionim koeficijentima na vi{im docnjama. Vrednost  $M$  ( $M < n-1$ ) naziva se *ta-ka ograni-enja* ili *prekida* (engl. *truncation point*) i zavisi od du`ine vremenske serije  $n$ . Slikovito bismo ta-ku prekida mogli opisati kao "stepen otvorenosti prozora".

Pokazano<sup>8</sup> je da ocena spektra data izrazom (9.72) predstavlja nepristrasnu i konzistentnu ocenu spektra. Da bi se ona primenila mora se prethodno izabrati prozor docnije (tip ponderacione funkcije) i ta-ka ograni-enja. Navedimo definicije i osnovne karakteristike naj-e{}e kori{}enih prozora docnije.

a) *Uniformni prozor*. Uniformni prozor docnije je

$$W_n^U(k) = \begin{cases} 1, & |k| \leq M \\ 0, & |k| > M \end{cases}, \quad (9.73)$$

Nedostatak ovog prozora ogleda se u mogu}nosti pojave negativnih vrednosti ocenjenog spektra na nekim frekvencijama {to je u suprotnosti sa osobinama populacionog spektra.

b) *Bartlettov prozor*. Bartlettov prozor docnije je

$$W_n^B(k) = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{M}, & |k| \leq M \\ 0, & |k| > M \end{cases}. \quad (9.74)$$

<sup>7</sup> Videti na primer: Wei (1990, ss. 271-2) ili Jenkins i Watts (1968, 6. Glava). U drugoj navedenoj knjizi detaljno su pokazane statisti-ke osobine ponderacionih funkcija koje se koriste u vremenskom ili frekventnom domenu za izravnaje uzora-kog spektra.

<sup>8</sup> Videti na primer: Wei (1990, ss. 268-270) ili Jenkins i Watts (1968, Odeljak 6.3.4).



Zbog svog karakteristi-nog izgleda na grafi-kom prikazu, naziva se i trougaoni prozor. Za razliku od ocene spektra kod koje je kori{}en uniformni prozor, ovde je ocenjeni spektar uvek nenegativan.

c) *Blackman (Blekmen)-Tukeyjev prozor*. Blackman-Tukeyjev prozor docnje je

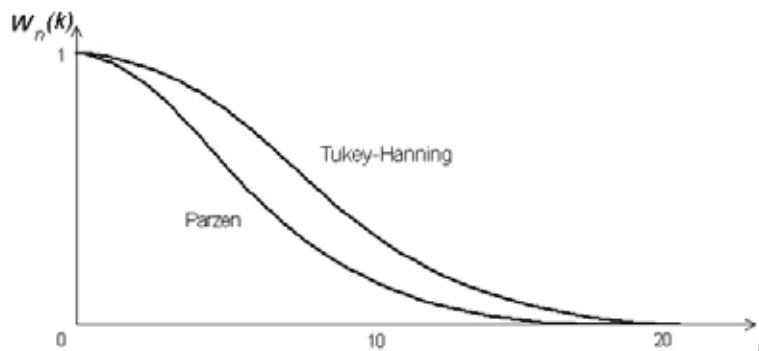
$$W_n^T(k) = \begin{cases} 1 - 2a + 2a \cos\left(\frac{\pi k}{M}\right), & |k| \leq M \\ 0, & |k| > M \end{cases}, \quad (9.75)$$

gde se  $a$  bira tako da  $0 \leq a \leq 0.25$ . U zavisnosti od vrednosti konstante  $a$  izvedena su dva prozora na osnovu izraza (9.75): Tukey-Hanning (za  $a = 0.25$ ) i Tukey- Hamming (za  $a = 0.23$ ). Kako su vrednosti konstante  $a$  bliske me|usobno, ove dve varijante istog prozora daju sli-ne ocene spektra.

d) *Parzenov prozor*. Parzenov prozor docnje je

$$W_n^P(k) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{k}{M}\right)^2 + 6\left(\frac{|k|}{M}\right)^3, & |k| \leq \frac{M}{2} \\ 2\left(1 - \frac{|k|}{M}\right)^3, & \frac{M}{2} \leq |k| \leq M \\ 0, & |k| > M \end{cases}. \quad (9.76)$$

Kori{}enjem Parzenovog prozora dobi}emo nenegativne vrednosti ocene spektra. Pored toga ove ocene bi}e izravnatije u odnosu na ocene dobijene primenom Tukey-Hanningovog prozora docnje. Me|utim, Tukey-Hanningova ocena ima}e manju pristrasnost od Parzenove ocene za istu vrednost ta-ke ograni-enja  $M$ . Ova dva prozora docnje prikazana su na Slici 9.7 za pozitivne vrednosti docnje za vrednost ta-ke ograni-enja  $M = 20$ .



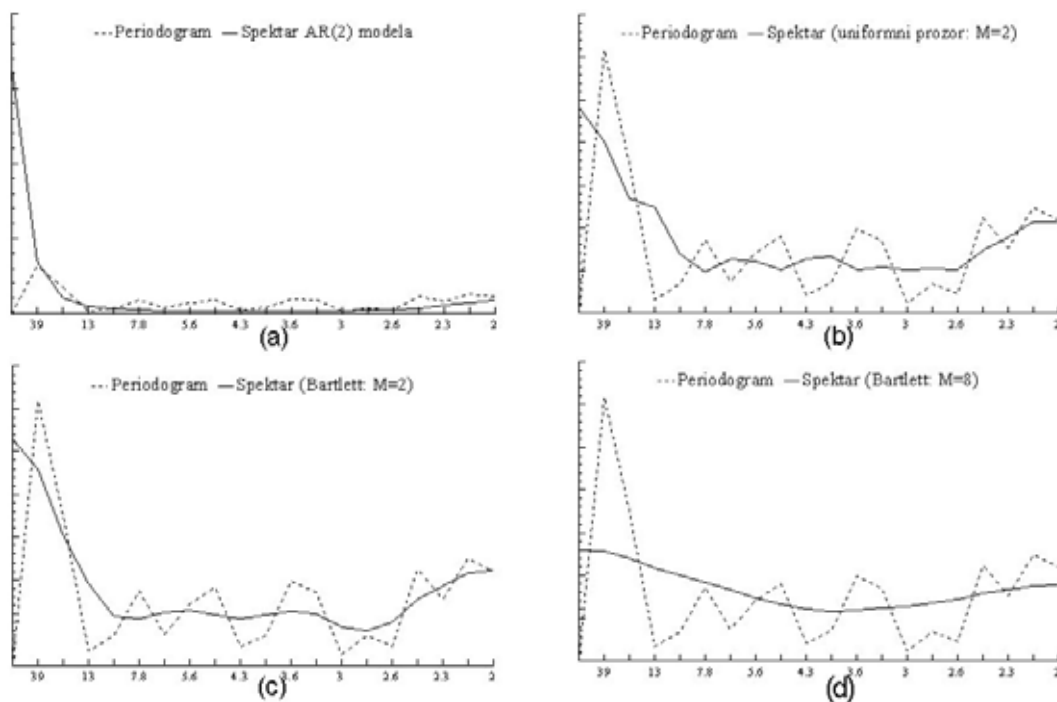
Slika 9.7 Tukey-Hanning i Parzenov prozor docnje

Kvalitet ocene spektra uslovljen je izborom tipa ponderacione funkcije (prozora), ali jo{ u ve}oj meri izborom ta-ke ograni-enja. Na`alost, u spektralnoj analizi ne postoji kriterijum na osnovu koga bi, nakon izbora tipa prozora, odredili optimalnu vrednost ta-ke ograni-enja. Stoga je izbor ta-ke ograni-enja  $M$  relativno te`ak zadatak i mora

se obaviti tako da se na|e kompromis izme|u "visoke rezolucije" koja se posti`e smanjenjem pristrasnosti i "visoke stabilnosti" koja se posti`e smanjenjem varijanse ocene. Izborom manje vrednosti  $M$  kod prozora docnje dobi}emo manju varijansu ocene spektra, ali ve}u pristrasnost ocene spektra. U suprotnom slu-aju, izborom ve}e vrednosti  $M$  dobi}emo manju pristrasnost uz ve}u varijansu, odnosno ocena spektra bi}e mnogo sli-nija periodogramu sa brojnim varijacijama. Slikovito re-eno, otvaranjem prozora docnje (pove}anjem  $M$ ) uo-avamo u ve}oj meri detalje na ocenjenom spektru, a u suprotnom, njegovim zatvaranjem (smanjenjem  $M$ ), vidimo samo glavne obrise spektra ne uo-avaju}i njegovu "iskrzanost" koja ina-e karakteri}e periodogram.

**Primer 9.5** Oceniti spektar godi{nje vremenske serije realnog dru{tvenog proizvoda u SR Jugoslaviji (serija S5).

Na{a vremenska serija je relativno kratka, svega 40 opservacija. Uprkos tome, a da bismo ilustrovali primenu spektralne analize, pristupili smo analizi ove serije u frekventnom domenu. Jer, kako sledi na osnovu studije Grangera i Hughesa (1968), spektralna analiza daje relativno dobre rezultate i u slu-aju kratkih serija. Sli-no postupku sa serijom u Primeru 9.4 i ovu vremensku seriju smo transformisali, ali ovoga puta tako {to smo odredili kvadratni koren svake opservacije originalne vremenske serije (videti Primer 7.1). Zatim smo dobijenu vremensku seriju diferencirali, pa smo spektralnu analizu obavili na osnovu diferencirane serije.



**Slika 9.8** Spektar godi{nje serije realnog dru{tvenog proizvoda u SR Jugoslaviji: (a) periodogram i teorijski spektar (AR(2)), (b) periodogram i spektar (uniformni prozor  $M = 2$ ), (c) periodogram i spektar (Bartlettov prozor  $M = 2$ ), (d) periodogram i spektar (Bartlettov prozor  $M = 8$ )

Korićenjem programa *RATS 3.0* izračunali smo periodogram. Jedna od naredbi programa omogućava direktno izravnanje periodograma, ali samo u frekventnom domenu. U okviru programa ugrađena je mogućnost izbora između dva spektralna prozora: uniformnog i Bartlettovog prozora. Ostale ponderacione funkcije moraju se prethodno izračunati za različite vrednosti frekvencija, pa se tek potom mogu koristiti za izravnanje periodograma.

*Napomena:* Napominjemo da se sva objašnjenja i oznake date u ovom i u narednom primeru odnose na izravnanje periodograma korićenjem spektralnog, a ne prozora dočnje. Tako na primer, veličina  $M$  na Slici 9.8 označava "stepen otvorenosti" spektralnog prozora, a ne prozora dočnje. Otuda ne treba da čudi što sa porastom vrednosti  $M$  smanjuje se varijansa ocene spektra (ovo je karakteristika spektralnog prozora), odnosno spektar na Slici 9.8 postaje sve "glatkiji" sa porastom  $M$ . Takođe, suprotno uobičajenoj praksi, na graficima spektra na apscisi prikazali smo periodu ciklusa (u odgovarajućim vremenskim jedinicama), a ne frekvenciju. Smatramo da je ekonomistima vremenski domen intuitivno razumljiviji.

Poređenjem grafika sa Slike 9.8(b) i Slike 9.8(c) možemo konstatovati da u slučaju serije realnog društvenog proizvoda za istu vrednost  $M$  ne postoje velike razlike između ocene spektra dobijene korićenjem uniformnog i Bartlettovog prozora. Međutim, razlike u ocenama spektra postaju znatne ukoliko smo koristili isti prozor, ali različite vrednosti  $M$ . Tako na Slici 9.8(c) i Slici 9.8(d) date su ocene spektra na bazi korićenja Bartlettovog spektralnog prozora za vrednosti  $M = 2$  i  $M = 8$  respektivno. U slučaju viših vrednosti  $M$ , varijacije u oceni spektra su prigušene u većoj meri i spektar nije više "izlomljen" kao pri nižim vrednostima  $M$ . Dobijeni rezultat predstavlja samo ilustraciju ranije iznetog stava da je u spektralnoj analizi kritičan izbor tačke ograničenja, a ne tipa ponderacione funkcije.

Grafici spektra prikazani na Slici 9.8(b)-9.8(d) sugerišu da serija realnog društvenog proizvoda ne sadrži izraženu cikličnu komponentu na nekoj određenoj frekvenciji. Naime, grafik spektra ne sadrži "ispupčenje" koje bi ukazivalo da odgovarajuća frekvencija (period ciklusa) daje značajan doprinos varijansi vremenske serije. Sa grafika spektra vidimo da je "snaga" serije skoncentrisana na nižim frekvencijama (duža perioda ciklusa).

Na kraju pretpostavimo da seriji prvih diferenci realnog društvenog proizvoda odgovara AR(2) model. Do ovog modela smo došli na osnovu razmatranja autokorelacione i parcijalne autokorelacione funkcije u Primeru 7.7. Ocena tog modela data je u Primeru 7.10, izrazom (7.15"). Na osnovu ocenjenih koeficijenata  $\phi_1$  i  $\phi_2$ , a prema (9.47) izveli smo

spektar AR(2) modela. Kako su oba korena karakteristične jednačine AR(2) modela realna, ne otkriva se da spektar modela sadrži cikličnu komponentu. Grafik ovog spektra prikazali smo na Slici 9.8(a). Sa grafika se vidi da spektrom dominira dugoročna komponenta, odnosno komponente oko nulte frekvencije. Spektar ne sadrži "ispupčenja" koja bi ukazivala na prisustvo poslovnih ciklusa (komponente sa periodom ciklusa do 5 godina). Verovatan razlog neotkrivanju ciklične komponente u seriji je izuzetno mali broj opservacija s obzirom na zahteve koje u tom pogledu postavlja spektralna analiza. Korišćenje ocenjenog AR(2) modela za ocenu spektra predstavlja osnovu tzv. ARMA ocenjivanja spektra (detaljnije u Odeljku 9.4.4). ■

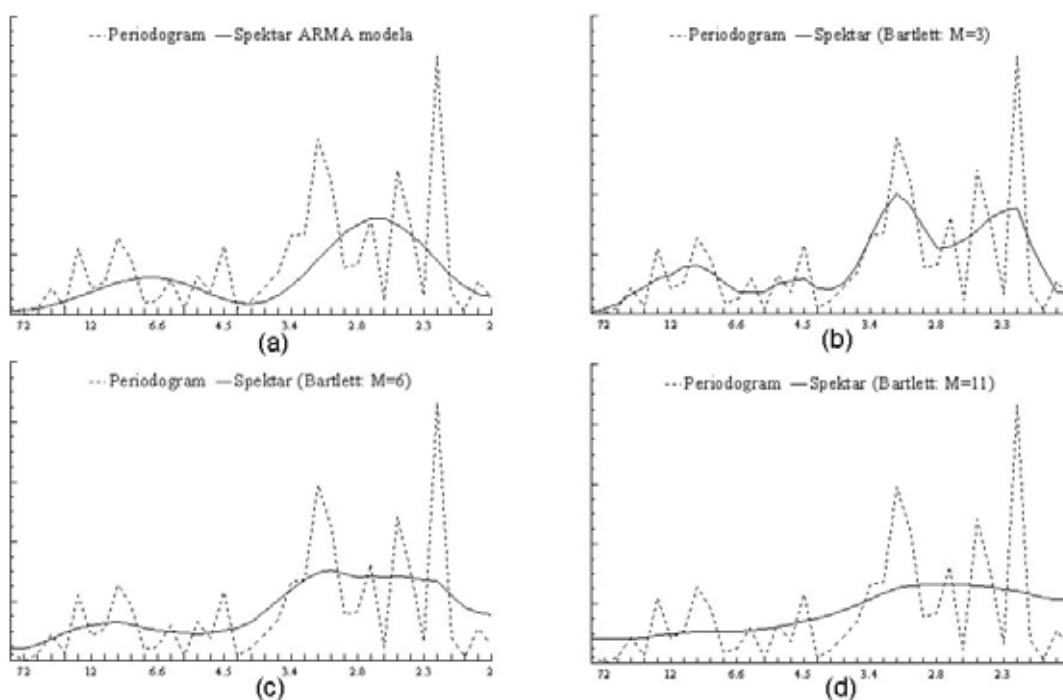
Nakon opredeljenja za određeni tip prozora, preostaje nam izbor vrednosti tačke ograničenja. U tom pogledu u literaturi<sup>9</sup> je definisano nekoliko postupaka koji nam mogu olakšati ovaj izbor, ali je i ovde praktično iskustvo od presudnog uticaja. Sugerisani postupci izbora tačke ograničenja su sledeći:

1. Ocenjivanje spektra započeti relativno velikom vrednošću tačke ograničenja  $M$ , a zatim spektar ponovo oceniti korišćenjem sve manjih vrednosti  $M$ . Drugim rečima sugerira se postupak laganog zatvaranja prozora. Pri tome se prati oblik i karakteristike ocenjenog spektra dok se ne postigne njegova željena stabilnost i rezolucija.
2. Tačku ograničenja  $M$  izabrati tako da se vrednosti svih autokovarijacionih koeficijenata nakon te dočnje mogu u statističkom smislu smatrati zanemarljivo malim.
3. Tačku ograničenja  $M$  izabrati tako da se njena vrednost posmatrati kao funkciju veličine uzorka. U tom smislu predložena su dva predloga. Prema prvom,  $M = 2\sqrt{n}$ , a prema drugom,  $M = n/10$ . Ovakav izbor  $M$  obezbeđuje da kada  $n \rightarrow \infty$  i  $M \rightarrow \infty$ , ali tako da  $M/n \rightarrow 0$ .
4. Naposljetku Jenkins i Watts (1968) predložili su izbor tri vrednosti  $M$  od kojih je svaka naredna dva puta veća od prethodne. Na osnovu njihove vrednosti  $M$  dobijamo preliminarnu informaciju o tome gde bi mogli biti važni vrhovi na spektru. Izbor veće vrednosti tačke ograničenja ima za posledicu ocenu spektra sa većim brojem vrhova od kojih neki mogu lako upozoravati na postojanje ciklične komponente. Srednjom vrednošću  $M$  pravimo svojevrstni kompromis između veće i manje vrednosti i njom uravnotežavamo dva međusobno oprečna zahteva: zahtev za visokom stabilnošću ocene spektra, odnosno smanjenje njene varijanse i zahtev za visokom rezolucijom ocene spektra koja se ispoljava u smanjenu pristrasnosti ocene spektra.

<sup>9</sup> Videti na primer: Jenkins i Watts (1968, 7. Glava).

**Primer 9.6** Oceniti spektar kvartalne vremenske serije industrijske proizvodnje u Srbiji (serija S10).

Na osnovu rezultata analize periodograma date u Primeru 9.4 pristupili smo daljoj spektralnoj analizi ove kvartalne serije. Korićenjem programa *RATS 3.0* izvršili smo izravnjanje njenog periodograma. Pri tome smo koristili Bartlettov spektralni prozor koji je kao opcija ugrađen u program. Prema gornjoj preporuci Jenkinsa i Wattsa izabrali smo tri vrednosti ta-ke ograni-enja (3, 6 i 11). Rezultate izravnjanja periodograma prikazali smo na Slici 9.9. Povećanje vrednosti  $M$  ima za rezultat sve "glatkiju" ocenu spektra (manja je varijansa ocene) kao što je to prikazano na Slici 9.9(b)-9.9(d).



**Slika 9.9** Spektar kvartalne serije industrijske proizvodnje u Srbiji: (a) periodogram i teorijski spektar ("vazduhoplovni" model), (b) periodogram i spektar (Bartlettov prozor  $M = 3$ ), (c) periodogram i spektar (Bartlettov prozor  $M = 6$ ), (d) periodogram i spektar (Bartlettov prozor  $M = 11$ )

Korićenje vrednosti  $M = 3$  ima za posledicu relativno "izlomljenu" ocenu spektra, a  $M = 11$  daje ocenu spektra koja previše izravnava periodogram. Prema tome vrednost  $M = 6$  predstavlja ono kompromisno rešenje u izboru ta-ke ograni-enja.

Sa grafika spektra (Slika 9.9(b) i Slika 9.9(d)) vidimo da je pretečan deo "snage", odnosno varijanse serije skoncentrisan na višim frekvencijama (kraći period ciklusa). Kako je jedan kvartal vremenska jedinica korićena na apscisi grafika spektra to znači da ciklične komponente sa periodom ciklusa od oko 3 kvartala daju relativno najveći doprinos varijansi serije.

Uz veliku ogradu se može istažiti i doprinos ciklične komponente sa periodom ciklusa od oko 9 kvartala (nešto preko dve godine). Poslednju navedenu cikličnu komponentu identifikujemo sa poslovnim ciklusom iste periode.

Kao i u prethodnom Primeru 9.5 pretpostavimo da seriji industrijske proizvodnje u Srbiji odgovara "vazduhoplovni" model. Do ovog modela smo došli na osnovu razmatranja autokorelacije i parcijalne autokorelacije funkcije u Primeru 8.1 u kome smo dali i ocenu modela. Na osnovu ocenjenih koeficijenata izračunali smo spektar stacionarnog dela ovog ARIMA modela. Grafik spektra prikazali smo na Slici 9.9(a). Sa grafika se vidi da veći doprinos spektru daje kratkoročna komponenta (viša frekvencija). Spektar sadrži "ispupčenje" na frekvenciji koja je perioda ciklusa oko 2.5 kvartala, a nešto blaže je izraženo "ispupčenje" koje se može pripisati poslovnom ciklusu od oko 9 kvartala. Korišćenje stacionarnog dela ocenjenog "vazduhoplovnog" modela za ocenu spektra je u osnovi tzv. ARMA ocenjivanja spektra. ■

Do sada smo se bavili brojnom ocenom spektra, a na kraju ovog poglavlja ukazali bismo na postupak određivanja intervalne ocene, odnosno aproksimativnog intervala poverenja spektra. Da se podsetimo, kada je bilo reči o uzorkom spektru dobili smo rezultat da su ordinate uzorkog spektra na Fourierovim frekvencijama nezavisne i identično raspoređene slučajne promenljive i to tako da  $\hat{f}(\omega_k) \square f(\omega_k) \frac{\chi^2_2}{2}$ . Daniell (Denijel) je još 1946. godine definisao postupak ocenjivanja koji je baziran na izravnanju periodograma korišćenjem jednostavnog pokretnog proseka (sa korakom  $2m+1$ ). Mada ovaj postupak ima više istorijski značaj spominjemo ga, jer je na osnovu gornjeg rezultata o rasporedu ordinate uzorkog spektra i njene nezavisnosti na Fourierovim frekvencijama, pokazano da korišćenjem Daniellovog postupka izravnata ordinata spektra ima raspored:  $f(\omega_k) \frac{\chi^2_{BSS}}{BSS}$ , gde  $BSS$  označava broj stepeni slobode ( $BSS = 4m+2$ ) dobijen sabiranjem broja stepeni slobode svake od  $(2m+1)$  slučajne promenljive. Nažalost, na frekvencijama različitim od Fourierovih ova osobina aditivnosti više ne važi. Međutim, izravnati spektar i na tim frekvencijama možemo aproksimirati sa  $c\chi^2_\nu$ , pri čemu su  $c$  i  $\nu$  tako birani da očekivana vrednost izravnate ordinate spektra bude jednaka  $c\nu$ , a varijansa  $2c^2\nu$ . Korišćenjem makrog od izloženih prozora docnije (prema izrazu (9.72)) dobijamo<sup>10</sup> da je raspored izravnatog spektra  $\hat{f}_w(\omega_k) \square f(\omega_k) \frac{\chi^2_\nu}{\nu}$ , gde je  $\nu$  ekvivalentan broj stepeni slobode za izravnati spektar. To znači da

<sup>10</sup> Videti na primer: Jenkins i Watts (1968, ss. 252-4).

$$\frac{\hat{v}f_w(\omega)}{f(\omega)} \square \chi_v^2, \text{ gde je } v = \frac{2n}{\sum_{k=-M}^M W_n(k)}, \quad (9.77)$$

$n$  broj opservacija vremenske serije,  $M$  ta-ka ograni-enja, a  $W_n(k)$  izabrana ponderaciona funkcija, odnosno prozor docnje. U Tabeli 9.2 naveden je ekvivalentan broj stepeni slobode za ranije definisane prozore docnje.

**Tabela 9.2** Ekvivalentan broj stepeni slobode za razli-ite prozore docnje

Prozor	Uniformni	Bartlettov	Tukey-Hammingov	Tukey-Hanningov	Parzenov
$v$	$n/M$	$3n/M$	$2.516n/M$	$8n/3M$	$3.709n/M$

Sada na osnovu (9.77) dobijamo

$$P \left[ \chi_{v,1-\frac{\alpha}{2}}^2 \leq \frac{\hat{v}f_w(\omega)}{f(\omega)} \leq \chi_{v,\frac{\alpha}{2}}^2 \right] = 1 - \alpha, \quad (9.78)$$

tako da  $100(1-\alpha)\%$  interval poverenja za spektar  $f(\omega)$  glasi:

$$\frac{\hat{v}f_w(\omega)}{\chi_{v,\frac{\alpha}{2}}^2} \leq f(\omega) \leq \frac{\hat{v}f_w(\omega)}{\chi_{v,1-\frac{\alpha}{2}}^2}. \quad (9.79)$$

Kako je asimptotska sredina i varijansa izravnatog uzora-kog spektra proporcionalna  $f(\omega)$  i  $f^2(\omega)$  respektivno, to se -esto umesto grafi-kog prikaza originalnog ocenjenog spektra koristi njena logaritamska transformacija u cilju stabilizovanja varijanse. Na osnovu (9.79) mo`e se direktno izvesti za logaritamski transformisani spektar odgovaraju}i interval poverenja:

$$\ln \hat{f}_w(\omega) + \ln \frac{v}{\chi_{v,\frac{\alpha}{2}}^2} \leq \ln f(\omega) \leq \ln \hat{f}_w(\omega) + \ln \frac{v}{\chi_{v,1-\frac{\alpha}{2}}^2}. \quad (9.80)$$

Karakteristika intervala poverenja od  $\ln f(\omega)$  je njegova konstantna {irina, za razliku od intervala poverenja  $f(\omega)$  kod koga {irina intervala varira sa frekvencijom.

#### 9.4.4 ARMA ocenjivanje spektra

Na kraju ovog poglavlja posve}enog oceni spektra uka`imo na alternativan pristup ovom problemu. Poznato je da svaka stacionarna i invertibilna vremenska serija ima AR reprezentaciju. Ovo svojstvo vremenske serije navelo je Parzena (1969) da predlo`i tzv. *autoregresiono ocenjivanje spektra*. Prema ovom postupku za datu vremensku seriju identifikujemo i ocenimo adekvatan  $AR(p)$  model, a zatim ocenjene koeficijente

zamenimo u izrazu za spektar  $AR(p)$  modela. Na ovaj način dobijena ocena spektra se tretira kao teorijski spektar razmatranog procesa. Upravo ovaj pristup određivanju spektra korišten je u Primeru 9.5. Na Slici 9.8(a) je prikazan taj teorijski spektar i on je "glatkiji" u odnosu na ocene spektra dobijene primenom metoda izravnjanja periodograma. Izloženi postupak dolaznja do spektra zavisi kritično od adekvatnosti izabranog reda AR procesa. Taj problem izbora reda AR modela može rešiti korištenjem jednog od ranije izloženih kriterijuma za izbor reda, kao što su  $BIC$ ,  $AIC$  i dr.

Uoptavanjem ovog pristupa nepoznati proces koji je generisao našu vremensku seriju može aproksimirati  $ARMA(p,q)$  modelom. Ocenjene koeficijente izabranog ARMA modela zamenjujemo u izrazu (9.41) spektra ARMA modela, a ovaj postupak ocenjivanja spektra nazivamo *ARMA ocenjivanje spektra*. U suštini se radi o određivanju teorijskog spektra razmatranog procesa. U Primeru 9.6 ilustrovan je ovaj postupak određivanja teorijskog spektra na osnovu "vazduhoplovnog" modela. I ovde kvalitet ocene spektra zavisi od adekvatnosti izabranog reda procesa. Za identifikovanje adekvatnog ARMA modela takođe se mogu koristiti različiti kriterijumi određivanja reda procesa.

## 9.5 ANALIZA SERIJE U FREKVENTNOM DOMENU

Videli smo da spektrom nestacionarne vremenske serije dominira dugoročna komponenta, odnosno frekvencije bliske nuli (beskonačna perioda ciklusa). Granger (1966) je pokazao da je tipičan oblik spektra ekonomskih vremenskih serija sličan opadajućoj eksponencijalnoj funkciji. Doprinosi ostalih frekvencija su stoga potisnuti u drugi plan. Isto važi i za seriju koja sadrži izraženu sezonsku komponentu. Analiza serije u frekventnom domenu stoga pretpostavlja da je eliminisanje trenda i sezone obavljeno pre nego što se pristupilo primeni spektralne analize. Otklanjanje trenda i sezone je jednostavniji oblik općeg postupka beljenja (engl. *prewhitening*) serije, tokom koje se linearno transformišu originalni podaci u cilju dobijanja izravnatijeg spektra nakon njegovog ocenjivanja. Poznavajući frekventnu karakteristiku linearne transformacije, može se zatim oceniti spektar originalnih netransformisanih podataka.

Nakon ocenjivanja i grafičkog prikaza spektra vremenske serije isti posmatramo tražimo pojavu "ispupčenja" na njemu. Ako postoje vrhovi, pokušavamo odgovoriti na pitanje koji je uzrok njihove pojave? U svakom slučaju pojava vrha na spektru indikator je prisustva ciklične komponente u seriji. Relativno gladak oblik spektra sa visokom vrednošću ordinate oko nulte frekvencije može poslužiti u svrhe detekcije prisustva trenda. Na osnovu onoga što smo do sada izložili o spektralnoj analizi može konstatovati da je u ekonomiji korišćenje spektralne analize vezano uglavnom za sledeće oblasti:

1. *Identifikacija cikličnog kretanja privredne aktivnosti.* Pod cikličnim kretanjem privredne aktivnosti podrazumevaju ne samo tzv. poslovni ciklusi (od 2-4 godine), nego i srednjeročni ciklusi (preko 10-tak godina), Kuznjecovi ciklusi



(oko 20 godina) i dugoro-ni ciklusi (poznatiji kao Kondratjevi ciklusi - oko 50 godina). Na osnovu ocenjenog spektra mo`e se utvrditi relativan doprinos ciklusa odre|enog trajanja sveop{toj varijansi serije (Howrey (Hauri) (1968)). Osnovno ograni-enje kori{}enja spektralne analize u ove svrhe jeste relativno mala du`ina ekonomskih vremenskih serija.

2. *Testiranje hipoteze da je serija proces belog {uma.* Ukoliko je ocenjeni spektar bez vrhova i relativno ravan, tada nam svojim izgledom sugeris{e da se radi o procesu belog {uma. Zatim se mo`e konstruisati interval poverenja za testiranje hipoteze da serija predstavlja proces belog {uma. Ovaj postupak koristili su Granger i Morgenstern (Morgenstern) (1970) da bi testirali hipotezu da cene akcija slede proces slu-ajnog hoda, jer je poznato da prve difference procesa slu-ajnog hoda slede proces belog {uma. Pored toga na osnovu izgleda ocenjenog spektra mo`emo sugerisati jedan model iz klase parametarskih modela kao {to su to na primer ARIMA modeli. Ovakva primena spektralne analize re|a je pojava u literaturi, jer je te{kno na osnovu spektra jednozna-no definisati podklasu ARIMA modela, a pogotovo red modela. Eventualno se na osnovu spektra mo`e utvrditi da li je seriju potrebno diferencirati u cilju postizanja njene stacionarnosti.
3. *Ispitivanje kvaliteta postupka desezoniranja vremenskih serija.* ^esto nas u ekonomiji interesuje osnovni tok neke pojave koji nije optere}en prisustvom sezonske komponente. Tako|e se u me|usobnoj interakciji dve i vi{e vremenskih serija `eli ispitati "neto" uticaj jedne na drugu promenljivu uz prethodno eliminisanje uticaja sezone. Pored sezonskog diferenciranja koje smo naveli kao postupak eliminisanja sezonskog uticaja u zvani-noj statistici se koriste i drugi metodi eliminisanja uticaja sezone. Podse}amo da se u te svrhe u na{ojoj zvani-noj statistici koristi program X-11. Spektralna analiza nam mo`e poslu`iti za vrednovanje postupka desezoniranja jer }e ukazati da li je zaista eliminisan doprinos odre|ene frekvencije varijansi serije. Ako je idealno eliminisana sezona, tada spektar na sezonskoj frekvenciji treba da bude identi-an spektru slu-ajnog procesa. U suprotnom slu-aju prisustvo vrha na sezonskoj frekvenciji i nakon primene postupka za eliminisanje sezone, indikator je lo{eg kvaliteta primenjenog postupka desezoniranja. Tako|e, udubljenja na spektru desezoniranje serije na sezonskim frekvencijama ukazuju na to da smo desezoniranjem eliminisali ve}i deo varijanse vremenske serije no {to je bilo potrebno.

Prvobitni entuzijizam u primeni spektralne analize u ekonomiji je splasnulo. Do toga je do{lo kako zbog izuzetno slo`enog postupka ocenjivanja, tako i zbog zahteva analize u pogledu potrebnog broja podataka. Naime, ekonomske vremenske serije su za pouzdanu spektralnu analizu relativno kratke. Me|utim, u teorijskim ekonomskim

modelima vi{edimenziona spektralna analiza se koristi za izu-avanje njihovih dinami-kih karakteristika<sup>11</sup>.

## Zadaci

9.1 Pokazati da Fourierova serija koja reprezentuje funkciju  $f(x) = x^2$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ , je data sa  $f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right)$ .

9.2 Za slede}i kona-an niz

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$X_t$	-4	-23	-18	-6	1	4	10	-2	-16	-10	2	8

na}i Fourierovu reprezentaciju.

9.3 Na}i Fourierovu reprezentaciju za svaki od slede}ih nizova:

$$(a) X_t = \begin{cases} 1, & \text{ako je } 1 \leq t \leq m \\ 0, & \text{ako je } m \leq t \leq n, (n > m + 2) \end{cases}$$

$$(b) X_t = n - t, \text{ za } 1 \leq t \leq n.$$

9.4 Razmotriti slede}i niz:

$$X_t = \frac{45}{52} \left(\frac{3}{4}\right)^{|t|} + \frac{7}{52} \left(-\frac{1}{4}\right)^{|t|}, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(a) Da li ovaj niz ispunjava uslov (9.28)?

(b) Na}i Fourierovu transformaciju od  $X_t$ .

(c) Na}i i diskutovati spektralnu funkciju gustine niza.

9.5 Na}i odgovaraju}e nizove  $X_t$  za svaki od slede}ih spektralnih funkcija gustine:

$$(a) f(\omega) = \frac{1 - \cos \omega + \cos 2\omega}{2\pi}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi,$$

$$(b) f(\omega) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi,$$

$$(c) f(\omega) = \frac{1 + \cos 4\omega}{2\pi}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

9.6 Razmotriti proces:

$$X_t = A_1 \cos \frac{\pi}{2} t + A_2 \sin \frac{\pi}{2} t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

<sup>11</sup> Videti na primer: Sargent (1979).

gde su  $A_1$  i  $A_2$  nezavisne slu-ajne promenljive sa sredinom 0 i varijansom  $\pi$ .

(a) Na}i autokovarijacionu funkciju  $\gamma_k$  za  $X_t$ .

(b) Da li niz  $\gamma_k$  ispunjava uslov (9.27)? Ako ispunjava, na}i spektralnu funkciju rasporeda i spektar od  $X_t$ .

9.7 Odrediti spektralnu funkciju gustine AR(1) procesa za slede}e vrednosti koeficijenta  $\phi_1$ : (a)  $\phi_1 = 0.6$ , (b)  $\phi_1 = 0.99$  i (c)  $\phi_1 = -0.6$ .

9.8 Odrediti i diskutovati spektralnu funkciju gustine slede}ih procesa:

(a)  $(1 - 0.6B + 0.4B^2)X_t = \varepsilon_t$ , (b)  $X_t = (1 - 0.4B - 0.2B^2)\varepsilon_t$

(c)  $(1 - 0.7B)X_t = (1 - 0.5B)\varepsilon_t$ , (d)  $X_t = (1 - 0.5B)(1 - 0.4B^4)\varepsilon_t$ .

Neka je kod sva }etiri procesa  $\varepsilon_t \square NIR N(0,1)$ .

9.9 Odrediti i diskutovati spektralnu funkciju gustine za proces:  $X_t = (1 - \Theta_1 B^s)\varepsilon_t$ .

9.10 Na}i spektralnu funkciju gustine slede}ih MA procesa:

(a)  $X_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$ , (b)  $X_t = \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} - 0.3\varepsilon_{t-2}$ .

9.11 Za MA(2) proces:  $X_t = \theta_0 + \varepsilon_t + 0.8\varepsilon_{t-1} + 0.5\varepsilon_{t-2}$  pokazati da je normirana spektralna funkcija gustine:  $f^*(\omega) = \frac{1}{\pi}(1 + 1.27 \cos \omega + 0.53 \cos 2\omega)$ .

9.12 Stacionarna vremenska serija ima normiranu spektralnu funkciju gustine:  $f^*(\omega) = \frac{1}{\pi^2} 2(\pi - \omega)$ ,  $0 < \omega < \pi$ . Pokazati da je njena autokorelaciona funkcija:

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \left(\frac{2}{\pi k}\right)^2, & k \text{ je neparno} \\ 0, & k \text{ je parno} \end{cases}.$$

9.13 Odrediti varijansu stacionarnog procesa }ija je spektralna funkcija gustine:  $f(\omega) = \frac{6}{\pi(1+\omega^2)}$ .

9.14 Odrediti spektralnu funkciju gustine }ija je autokorelaciona funkcija:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}|k|, & \text{za } |k| \leq 3 \\ 0, & \text{za } |k| > 3 \end{cases}.$$

9.15 Proveriti da li na spektru procesa iz Zadatka 9.8 postoje "ispup-enja". Ako postoje odrediti na kojim frekvencijama, odnosno periodama ciklusa se javljaju.

- 9.16 Izvr{iti spektralnu analizu vremenske serije iz Zadatka 7.1.
- 9.17 Izvr{iti spektralnu analizu vremenske serije iz Zadatka 7.2.
- 9.18 Izvr{iti spektralnu analizu vremenske serije iz Zadatka 8.6.
- 9.19 Izvr{iti spektralnu analizu vremenske serije iz Zadatka 8.7.
- 9.20 Izvr{iti spektralnu analizu kvartalne vremenske serije nezaposlenosti u biv{oj Jugoslaviji (serija S12).
- 9.21 Izvr{iti spektralnu analizu mese-ne vremenske serije nezaposlenosti u biv{oj Jugoslaviji (serija S16).



# 10 OSTALI MODELI I PITANJA U ANALIZI VREMENSKIH SERIJA

U ovoj glavi dajemo kratak prikaz nekoliko modela u analizi vremenskih serija koji nisu ranije obrađeni u knjizi. Ovi modeli s jedne strane predstavljaju uopćenje već izloženih modela kao što su ARIMA modeli, a s druge strane su u veći interesovanja istraživača poslednjih godina s obzirom na svoje osobine ili oblasti u kojima se primenjuju.

## 10.1 UVOD

Do sada smo se bavili analizom jedne vremenske serije u vremenskom i frekventnom domenu. Pri tome je pretežno izlaganja posvećena klasi ARIMA modela. Pretpostavka je uspešne primene ovih modela da nije došlo do promene u mehanizmu koji je generisao vremensku seriju. Međutim, vremenske serije, a posebno ekonomske, često trpe spoljašnje uticaje. Tako na primer donete mere ekonomske politike (kao deo stabilizacionog programa) ili neki drugi događaji za koje znamo u kom trenutku su se desili (naftni embargo OPEC-a 1973. godine ili sankcije međunarodne zajednice 1992. godine) imaju za posledicu izmenjeni tok vremenske serije cene i proizvodnje. Ako prilikom modeliranja vremenske serije zanemarimo spomenute spoljašnje uticaje dobićemo neoptimalne modele i pogrešnu prognozu. Događaj za koji znamo kada se desio nazivamo *intervencija*. Analiza intervencije obavlja se na osnovu proširenja ARIMA modela tzv. *modelima intervencije* koje dobijamo uvođenjem ulaznih ili egzogenih promenljivih u ARIMA model. Ove ulazne promenljive su veštačke promenljive i uzimaju vrednost 0 ili 1. Modelima intervencije se bavimo u prvom narednom poglavlju. U okviru istog poglavlja ukazuje se na postupak analize vremenske serije koja trpi spoljašnje uticaje u nepoznatim trenucima vremena. Opservacije vremenske serije koje su rezultat tog uticaja nazivamo *nestandardne opservacije*.

Uopćenje klase ARIMA modela za potrebe modeliranja više vremenskih serija obavlja se u dva koraka. Prvo se u Poglavlju 10.3 izlažu *modeli funkcije prenosa*, koje dobijamo kada u ARIMA modele uvedemo ulazne promenljive. ^esto se ovi modeli nazivaju *ARMAX modeli*. Za razliku od modela intervencije ove ulazne promenljive su u općtem slu-aju stohasti-ke prirode. U okviru Poglavlja 10.4 uvodimo pojam kointegracije koji igra va`nu ulogu pri modeliranju nestacionarnih vremenskih serija. Pojednostavljeno re-eno pojam *kointegracije* vezuje se za nestacionarne vremenske serije me|u kojima postoji takva linearna kombinacija koja je stacionarna. U bliskoj vezi sa pojmom kointegracije jeste pojam dugoro-*ne* ravnote`e u ekonomskim modelima. Ukazujemo na modele korekcije gre{kom koji predstavljaju primer modela na osnovu koga ocenjujemo dugoro-*nu* ravnote`nu vezu izme|u serija, a istovremeno modeliramo njihovu kratkoro-*nu* dinamiku. Naposljetku, testovima kointegracije zavr{avamo izlaganje u ovom poglavlje.

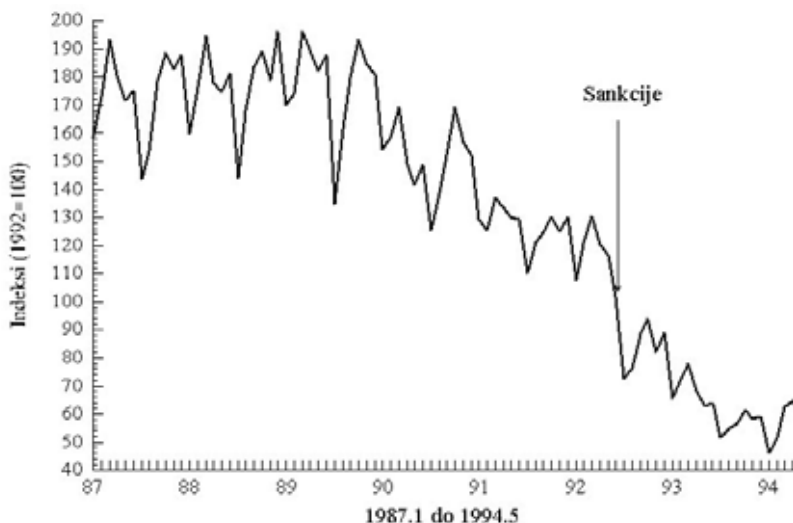
Poslednje poglavlje posve}eno je modeliranju vektorskih vremenskih serija kori{}enjem vektorskih ARMA modela. Problemi koji su ina-e bili prisutni i u modeliranju jedne vremenske serije ARMA modelima u slu-aju vektorskih vremenskih serija vi{estruko se uslo`njavaju, a javljaju se i novi.

## 10.2 ANALIZA INTERVENCIJE I NESTANDARDNE OPSERVACIJE

Egzogeni doga|aji (intervencije) kao {to su promena ekonomske politike, promena spoljnotrgovinskog re`ima kod va`nijih inostranih trgovinskih partnera, {trajkovi, isklju-enja struje i drugi doga|aji na razli-ite na-ine deluju na vremensku seriju. Sve intervencije delimo u dve grupe. Prva grupa intervencija su tzv. *jednokratne intervencije* (engl. *pulse intervention*) kod kojih se izvesni doga|aj desio samo u jednom periodu. Primer takve intervencije jesu {trajkovi.

Drugu grupu intervencija -ine tzv. *trajne intervencije* (engl. *step intervention*). Kod njih dejstvo intervencije zapo-inje u odre|enom periodu i traje do daljnjeg. Primer takve intervencije jeste prelazak sa re`ima fiksnih na re`im plivaju}ih deviznih kurseva. U zavisnosti od prirode posmatrane pojave nakon intervencije mo`e do}i do promene toka njene vremenske serije, povi{enja ili snji`enja njenog nivoa (trenutno ili nakon protoka izvesnog perioda vremena) ili do neke slo`enije promene u vremenskoj seriji.

Da bismo ukazali na posledice intervencije po tok vremenske serije poslu`imo se Slikom 10.1 na kojoj je prikazan grafik serije mese-nih indeksa industrijske proizvodnje u SR Jugoslaviji (serija S13). Poznato je da su od 30. maja 1992. godine uvedene sankcije me|unarodne zajednice prema SR Jugoslaviji. Na grafiku je posebnom strelicom ozna-ena opservacija za mesec jun 1992. godine od kada efektivno sankcije deluju. Do kraja posmatranog perioda (do maja 1994. godine) sankcije nisu ukinute, pa imamo primer trajne intervencije. Mo`e se pretpostaviti da }e ova vrsta intervencije dovesti do sni`enja nivoa proizvodnje. Istovremeno se o-ekuje da }e do sni`enja nivoa proizvodnje do}i relativno brzo. Drugim re-ima, u kratkom periodu dolazi do reakcije proizvodnje na uvedene sankcije.



Slika 10.1 Industrijska proizvodnja u SR Jugoslaviji

Prikaz postupka analize intervencije započinjemo jednostavnim modelom u kome imamo jednu intervenciju za koju znamo da se desila u trenutku  $T$ . Ako je  $X_t$  generisano  $ARMA(p, q)$  procesom, tada model intervencije glasi:

$$X_t = v(B)I_t + \frac{\theta(B)}{\phi(B)}\varepsilon_t, \quad (10.1)$$

gde  $\frac{\theta(B)}{\phi(B)}\varepsilon_t$  predstavlja tzv. *model "uma"* (engl. *noise model*), a  $v(B)$  je polinom čiji koeficijenti mere rasprostiranje uticaja intervencije na posmatranu pojavu tokom vremena. Ovaj polinom možemo prikazati u obliku

$$v(B) = \frac{\omega(B)}{\delta(B)}B^b, \quad (10.2)$$

gde je  $\omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s$ ,  $\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r$ , a  $b$  označava period vremena koji protekne pre nego što dođe do pojave efekata pod dejstvom intervencije. Koeficijenti polinoma  $\omega(B)$  mere očekivani početni efekat intervencije, a koeficijenti polinoma  $\delta(B)$  opisuju ponašanje trajnog efekta intervencije. Promenljiva intervencije  $I_t$  je veštacka promenljiva koja uzima vrednosti 1 ili 0 prema tome da li je u periodu  $t$  došlo do intervencije ili ne. Imamo dve vrste promenljive  $I_t$ . Prvom promenljivom, koju nazivamo *impulsna promenljiva* (engl. *pulse variable*), opisujemo jednokratnu intervenciju do koje je došlo samo u periodu  $T$ :

$$I_t = \begin{cases} 1, & t = T \\ 0, & t \neq T \end{cases}. \quad (10.2)$$

Drugom promenljivom, koju nazivamo *stepenik" promenljivom* (engl. *step variable*), opisujemo intervenciju do koje je došlo u periodu  $T$ , a koja nadalje traje:



$$I_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ 1, & t \geq T \end{cases}. \quad (10.3)$$

Jedna od varijanti impulsne promenljive jeste tzv. *proširena impulsna promenljiva* (engl. *extended pulse variable*). Ona se koristi za modeliranje intervencije do koje je došlo u određenom periodu vremena

$$I_t = \begin{cases} 1, & T_1 \leq t \leq T_2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}. \quad (10.4)$$

Modeli intervencije su namenjeni merenju efekata intervencije. Postupak njihove primene započinje izgradnjom ARIMA modela na osnovu opservacija vremenske serije iz perioda pre nego što je došlo do intervencije. Pri tome se koriste ranije izloženi postupci identifikacije ARIMA modela. Ukoliko se pokaže da je model adekvatan, nakon ocene i provere njegove adekvatnosti, formiramo model intervencije u cilju zaključivanja o efektima intervencije.

Ako nam je nepoznat vremenski period u kome je došlo do intervencije, tada nam je zadatak da utvrdimo u kojim periodima i sa kojim efektima su spoljni događaji delovali na pojavu neke vremenske serije registrujemo. To mogu biti izvesni neekvivalentni događaji ili greške u beleženju podataka vremenske serije koje dovode do pojave nestandardnih opservacija koje odudaraju od ostalih opservacija. Fox (Foks) (1972) je prvi izumavao pojavu nestandardnih opservacija u vremenskim serijama. On je definisao dva modela nestandardnih opservacija: aditivni i inovativni model.

Neka je  $Z_t$  vremenska serija posmatranog stacionarnog procesa nekim opservacijama raspolažemo, a  $X_t$  vremenska serija koja ne sadrži nestandardne opservacije. Pretpostavljamo da  $X_t$  opisujemo  $ARMA(p, q)$  modelom. *Aditivni model nestandardne opservacije* (engl. *additive outlier*) u oznaci AO, definišemo u obliku:

$$Z_t = X_t + \omega I_t^{(T)} = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \varepsilon_t + \omega I_t^{(T)}, \quad (10.5)$$

gde  $I_t^{(T)}$  predstavlja impulsnu promenljivu koja uzima vrednost 1 kod  $T$ -te opservacije, a vrednost 0 kod ostalih opservacija.

*Inovativni model nestandardne opservacije* (engl. *innovational outlier*) u oznaci IO, definišemo u obliku:

$$Z_t = X_t + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \omega I_t^{(T)} = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} (\varepsilon_t + \omega I_t^{(T)}). \quad (10.6)$$

Dok prema aditivnom modelu dolazi do uticaja nestandardne opservacije samo na nivo te opservacije, dotle se prema inovativnom modelu oseća uticaj na sve opservacije  $Z_T, Z_{T-1}, \dots$  nakon perioda  $T$ . Ovaj uticaj se rasprostire zahvaljujući memoriji modela opisanoj sa  $\theta(B)/\phi(B)$ . U opštem slučaju u vremenskoj seriji mogu postojati više nestandardnih opservacija oba tipa.

U prakti-noj primeni modela (10.5) i (10.6) suo-avamo se sa problemom ocene koeficijenata ARMA modela za seriju  $X_t$ , koja je "oslobodjena" nestandardnih opservacija. Da bismo dakle utvrdili prisustvo nestandardnih opservacija prvog ili drugog tipa moramo prvo oceniti ARMA model za seriju  $X_t$ . O-igledno je da seriju  $X_t$  ne mo`emo formirati "oslobodiv{i" je nestandardnih opservacija, jer njihovo prisustvo tek treba da utvrdimo.

Ukoliko zanemarimo prisustvo nestandardnih opservacija u vremenskoj seriji prilikom ocenjivanja koeficijenata ARMA modela, dobi}emo ocene kod kojih je problem pristrasnosti veoma izra`en. Tako }e na primer varijansa procesa belog {uma  $\sigma^2$  biti precenjena. [tavi{e, kao {to je Tsay (1986) pokazao, prisustvo nestandardnih opservacija uzrokuje pojavu pristrasnosti uzora-ke, obi-`ne i parcijalne autokorelacione funkcije. Kori{enje tako pristrasno ocenjene obi-`ne i parcijalne autokorelacione funkcije u fazi identifikacije ARMA modela dove{e do podcenjivanja ili precenjivanja reda polinoma  $\phi(B)$  i  $\theta(B)$ . Tiao (1985) i Tsay (1986) su definisali postupak za utvr|ivanje prisustva i tipa nestandardne opservacije. Ovaj postupak je iterativne prirode po{to prisustvo nestandardnih opservacija dovodi do pristrasnih ocena koeficijenata modela, pa se ne mo`e istovremeno utvrditi postojanje nestandardnih opservacija i nepristrasno oceniti model. Tsay (1988) je pro{irio ovaj iterativan postupak u pravcu obuhvata privremene ili trajne promene nivoa vremenske serije, a tako|e i promene njene varijanse.

### 10.3 MODELI FUNKCIJE PRENOSA

*Modeli funkcije prenosa* (engl. *transfer function models*) uspostavljaju vezu izme|u izlazne serije i jedne ili vi{e ulaznih serija. Tako se na primer mo`e uspostaviti veza izme|u potro`nje i raspolo`ivog dohotka ili prodaje nekog proizvoda i tro{kova njegove promocije. Za razliku od modela intervencije kod kojih su se ulazne serije odnosile na ve{ta-ke promenljive -ije su vrednosti 1 ili 0, kod modela funkcije prenosa ulazne serije su stohasti-ke prirode.

Pretpostavka koja je zajedni-ka svim modelima funkcije prenosa ti-e se stacionarnosti izlazne i svih ulaznih serija. Tako|e se pretpostavlja da ne postoji povratna veza od izlazne ka ulaznoj promenljivoj. Drugim re-ima, ka`emo da su ulazne promenljive egzogene. U navedenim primerima ovim modelima se opisuje prenos uticaja raspolo`ivog dohotka na potro{nju, odnosno tro{kova reklamiranja na prodaju proizvoda, a ne pretpostavlja se uticaj potro{nje na raspolo`ivi dohodak, ni uticaj prodaje na tro{kove reklamiranja.

Po|imo od jednostavnog sistema sa jednom ulaznom i jednom izlaznom serijom koji opisujemo modelom funkcije prenosa. Stacionarna izlazna serija  $Y_t$  i stacionarna ulazna serija  $X_t$  me|usobno su povezane prema modelu funkcije prenosa:

$$Y_t = \nu(B)X_t + N_t, \quad (10.7)$$

gde je polinom  $v(B) = v_0 + v_1B + v_2B^2 + \dots$ , a  $N_t$  je stacionarna serija "{uma" sistema i nezavisna je od ulazne serije  $X_t$ . Prema uobi-ajenoj terminologiji koji se koristi u obja{njenju modela funkcije prenosa (Box i Jenkins (1976)), polinom  $v(B)$  naziva se *funkcija prenosa*, a koeficijenti  $v_j$  *ponderi impulsnog odziva* (engl. *impulse response weights*). Kao funkcija od  $j$ ,  $v_j$  naziva se *funkcija impulsnog odziva* (engl. *impulse response function*). Da bi model funkcije prenosa bio stabilan ponderi impulsnog odziva moraju zadovoljiti uslov  $\sum_{j=0}^{\infty} |v_j| < \infty$ . Stacionarnost serija u modelu (10.7) posti`e se diferenciranje serija ukoliko serije nisu ve} stacionarne.

U prakti-noj primeni modela funkcije prenosa umesto polinoma  $v(B)$  beskona-nog reda isti iskazujemo u obliku koli-nika dva polinoma:

$$v(B) = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b, \quad (10.8)$$

gde je  $\omega(B) = \omega_0 - \omega_1B - \dots - \omega_s B^s$ ,  $\delta(B) = 1 - \delta_1B - \dots - \delta_r B^r$ . Pri tome se pretpostavlja da su svi koreni polinoma  $\delta(B)$  po modulu manji od jedinice. Kao i u Poglavlju 10.2 veli-ina  $b$  ozna-ava vremenski period koji protekne pre nego {to se uticaj serije  $X_t$  prenese kroz sistem na seriju  $Y_t$ , tj.  $b$  ozna-ava ka{njenje sistema. Kada se odrede polinomi  $\omega(B)$  i  $\delta(B)$  i vrednost  $b$ , pondere impulsnog odziva izra-unavamo izjedna-avanjem koeficijenata uz  $B^j$  u izrazu

$$\delta(B)v(B) = \omega(B)B^b. \quad (10.9)$$

Box i Jenkinsov postupak izgradnje modela funkcije prenosa zasnovan je na unakrsnoj korelacionoj funkciji. Za data dva stohasti-ka procesa  $X_t$  i  $Y_t$ , ka`emo da su zdru`eno stacionarni ako su oba procesa stacionarna, a unakrsna kovarijansa izme|u je funkcija samo vremenskog intervala  $s-t$ . *Unakrsna kovarijaciona funkcija* (engl. *cross-covariance function*) izme|u  $X_t$  i  $Y_t$  je

$$\gamma_{xy}(k) = E[(X_t - \mu_x)(Y_{t+k} - \mu_y)], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.10)$$

gde je  $\mu_x$  sredina procesa  $X_t$ , a  $\mu_y$  sredina procesa  $Y_t$ . Na osnovu unakrsne kovarijacione funkcije defini{emo *unakrsnu korelacionu funkciju* (engl. *cross-correlation function*):

$$\rho_{xy}(k) = \frac{\gamma_{xy}(k)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.11)$$

gde su  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  standardne devijacije serije  $X_t$  i  $Y_t$ . O-igledno je  $\rho_{xx}(k) = \rho_x(k)$ , pa unakrsna korelaciona funkcija predstavlja generalizaciju autokorelacione funkcije. Me|utim, za razliku od autokorelacione funkcije unakrsna korelaciona funkcija nije simetri-na funkcija u odnosu na po-etak, tj.  $\rho_{xy}(k) \neq \rho_{xy}(-k)$ . Umesto osobine

simetri-nosti unakrsna korelaciona funkcija ima osobinu da je  $\rho_{xy}(k) = \rho_{yx}(-k)$ . Prema tome unakrsna korelaciona funkcija meri ne samo intenzitet, nego i smer me|usobne veze izme|u serije  $X_t$  i  $Y_t$ . Zato je za ispitivanje povezanosti serije  $X_t$  i  $Y_t$  potrebno ispitati unakrsnu korelacionu funkciju ne samo na pozitivnim vrednostima docnji nego i na negativnim. U te svrhe koristimo grafi-ki prikaz unakrsne korelacione funkcije koji se naziva *unakrsni korelogram*.

Mo`e se uspostaviti veza izme|u unakrsne korelacione funkcije i funkcije prenosa. Model funkcije prenosa (10.7) u periodu  $t+k$  glasi:

$$Y_{t+k} = v_0 X_{t+k} + v_1 X_{t+k-1} + v_2 X_{t+k-2} + \dots + N_{t+k}. \quad (10.12)$$

Bez umanjena op{tosti pretpostavimo da je  $\mu_x = \mu_y = 0$ . Ako pomno`imo sa  $X_t$  jedna-inu (10.12), a zatim odredimo o-ekivanu vrednost tog izraza dobijamo

$$\gamma_{xy}(k) = v_0 \gamma_{xx}(k) + v_1 \gamma_{xx}(k-1) + v_2 \gamma_{xx}(k-2) + \dots \quad (10.13)$$

pa je unakrsna korelaciona funkcija

$$\rho_{xy}(k) = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} [v_0 \rho_x(k) + v_1 \rho_x(k-1) + v_2 \rho_x(k-2) + \dots]. \quad (10.14)$$

Kori{}enjem izraza (10.14) mo`e se formirati sistem jedna-ina na osnovu koga se ponderi impulsnog odziva  $v_j$  mogu izraziti u funkciji od  $\rho_{xy}(k)$  i  $\rho_x(k)$ . Zamena populacionih koeficijenata  $\rho_{xy}(k)$  i  $\rho_x(k)$  odgovaraju}im uzora-kim ocenama omogu}ila bi potom ocenjivanje pondera impulsnog odziva. Me|utim, ovaj pristup se ne koristi jer su varijanse i kovarijanse uzora-ke ocene od  $\rho_{xy}(k)$  zavisne od autokorelacione strukture serije  $X_t$  kao {to je pokazano u izrazu (10.14). Ako pretpostavimo da je ulazna serija  $X_t$  proces belog {uma, tada je  $\rho_x(k) = 0$  za  $k \neq 0$ , pa se na osnovu jedna-ine (10.14) dobija

$$v_k = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \rho_{xy}(k) \quad (10.15)$$

Prema tome, ako je ulazna serija  $X_t$  proces belog {uma, tada je funkcija impulsnog odziva  $v_k$  direktno proporcionalna unakrsnoj korelacionoj funkciji  $\rho_{xy}(k)$ .

Zahtev da se ulazna serija  $X_t$  dovede do procesa belog {uma ugra|en je u postupak izgradnje modela funkcije prenosa kako su ga definisali Box i Jenkins (1976, 11. Glava). U op{tem slu-aju pretpostavlja se da  $X_t$  sledi ARMA proces

$$\phi_x(B)X_t = \theta_x(B)\alpha_t, \quad (10.16)$$

gde je  $\alpha_t$  proces belog {uma. Serija

$$\alpha_t = \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} X_t, \quad (10.17)$$

naziva se "izbeljena" ulazna serija (engl. *prewhitened input series*). Primenom istog postupka "beljenja" izlazne serije dobi}emo filtriranu izlaznu seriju

$$\beta_t = \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} Y_t. \quad (10.18)$$

Stavljaju}i  $\varepsilon_t = \theta_x^{-1}(B)\phi_x(B)N_t$ , model funkcije prenosa (10.7) pi{emo u obliku

$$\beta_t = v(B)\alpha_t + \varepsilon_t. \quad (10.19)$$

Prema tome, pondere impulsnog odziva  $v_j$  mo`emo odrediti prema izrazu

$$v_k = \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha} \rho_{\alpha\beta}(k). \quad (10.20)$$

Upravo izlo`eni na-in odre|ivanja funkcije impulsnog odziva ugra|en je u Box-Jenkinsov postupak izgradnje modela funkcije prenosa. Oni su po{li od uzora-ke unakrsne korelacione funkcije odre|ene na osnovu  $n$  parova opservacija vremenskih serija  $X_t$  i  $Y_t$ . Uzora-ku unakrsnu korelacionu funkciju ra-unamo na osnovu izraza

$$\hat{\rho}_{xy}(k) = \frac{\hat{\gamma}_{xy}(k)}{S_x S_y}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.21)$$

gde je

$$\hat{\gamma}_{xy}(k) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})(Y_{t+k} - \bar{Y}), & k = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (Y_t - \bar{Y})(X_{t-k} - \bar{X}), & k = 0, -1, -2, \dots \end{cases} \quad (10.22)$$

$$S_x = \sqrt{\hat{\gamma}_{xx}(0)}, \quad S_y = \sqrt{\hat{\gamma}_{yy}(0)},$$

a  $\bar{X}$  i  $\bar{Y}$  predstavlja uzora-ku sredinu serije  $X_t$  i  $Y_t$  respektivno.

Prilikom izgradnje modela funkcije prenosa koristimo rezultat Bartletta (1966) koji omogu}ava proveru statisti-ke zna-ajnosti unakrsnih korelacionih koeficijenata. Uz pretpostavku da posmatrani procesi predstavljaju Gausov proces, Bartlett je izveo aproksimativne varijanse i kovarijanse dva uzora-ka unakrsna korelaciona koeficijenta. Uz dodatne pretpostavke da su dve serije  $X_t$  i  $Y_t$  nekorelirane i da serija  $X_t$  predstavlja proces belog {uma, prema Bartlettovom rezultatu mo`emo odrediti pribli`nu vrednost varijanse uzora-kog unakrsnog korelacionog koeficijenta:

$$\text{Var}[\hat{\rho}_{xy}(k)] \approx \frac{1}{n-k} \quad (10.23)$$

Prema tome, na osnovu izraza  $\hat{\rho}_{xy}(k)\sqrt{n-k}$  testiramo hipotezu  $H_0: \rho_{xy}(k) = 0$ , protiv alternativne hipoteze  $H_1: \rho_{xy}(k) \neq 0$ . Zna-iti da se nultom hipotezom iskazuje pretpostavka o nekoreliranosti serije  $X_t$  i  $Y_t$ .

Kori{}enjem uzora-kih ocena za  $\rho_{\alpha\beta}(k)$ ,  $\sigma_\alpha$  i  $\sigma_\beta$  na osnovu izraza (10.20) dobijamo preliminarnu ocenu pondera impulsnog odziva  $v_k$ . Da bismo identifikovali polinome  $\omega(B)$  i  $\delta(B)$  kao i vrednost  $b$ , Box i Jenkins (1976, ss. 350-351) su izveli teorijske pondere impulsnog odziva za karakteristi-ke slu-ajne polonima  $\omega(B)$  i  $\delta(B)$  i veli-ine  $b$ . Pore|enjem preliminarno ocenjenih pondera i teorijskih pondera (sli-no pore|enju uzora-kog i teorijskog korelograma) identifikujemo polinome kao i  $b$ . Raspola`u}i preliminarnim ocenama pondera impulsnog odziva, a na osnovu izraza (10.9) dobijamo preliminarne ocene funkcije prenosa (10.8). Na osnovu preliminarne ocene funkcije prenosa fazu identifikacije modela funkcije prenosa zavr{avamo identifikacijom ARMA modela za seriju "{uma". Ocenjujemo seriju "{uma"

$$\hat{N}_t = Y_t - \hat{v}(B)X_t = Y_t - \hat{\delta}^{-1}(B)\hat{\omega}(B)X_{t-b}, \quad (10.24)$$

a potom ra-unamo uzora-ku obi-nu i parcijalnu autokorelacionu funkciju u cilju identifikacije ARMA modela:

$$\phi(B)N_t = \theta(B)\varepsilon_t \quad (10.25)$$

za proces "{uma". Kombinuju}i (10.8) i (10.25) dobijamo model funkcije prenosa

$$Y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} X_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \varepsilon_t \quad (10.26)$$

do -ijih ocena dolazimo u narednoj fazi izgradnje modela. U su{tini se koriste isti metodi ocenjivanja koje smo izlo`ili u 7. Glavi.

Naposletku sledi faza provere adekvatnosti modela funkcije prenosa. Model }e biti neadekvatan ukoliko su statisti-ki zna-ajni unakrsni korelacioni koeficijenti  $\hat{\rho}_{\alpha\hat{\varepsilon}}(k)$  "izbeljene" serije  $\alpha_t$  i reziduala ocenjenog modela funkcije prenosa (10.26). Pored statisti-ke zna-ajnosti pojedina-nih unakrsnih korelacionih koeficijenata mo`emo konstruisati i portmanteau test za testiranje hipoteze da su svi unakrsni korelacioni koeficijenti jednaki nuli. Statistika ovog testa je

$$Q = m(m+2) \sum_{j=0}^K \frac{\hat{\rho}_{\alpha\hat{\varepsilon}}^2(k)}{m-j} \quad (10.27)$$

gde je  $m$  broj raspolo`ivih reziduala.  $Q$  statistika ima aproksimativno  $\chi^2$ -raspored sa  $(K-r-s)$  stepeni slobode. Model funkcije prenosa bi}e neadekvatan ako je model "{uma" neadekvatan. Adekvatnost modela "{uma" mo`emo proveriti prema uobi-ajenom postupku provere adekvatnosti modela koji je izlo`en u Odeljku 7.5.1. Kako je model "{uma" uslovljen adekvatno{}u modela funkcije prenosa, sugerije se da postupak

provere zapo-nemo proverom adekvatnosti modela funkcije prenosa. Ukoliko *portmanteau* test (10.27) uka`e na neadekvatnost modela funkcije prenosa, nema potrebe za proverom adekvatnosti modela "{uma". U tom slu-aju pristupa se ponovnoj identifikaciji modela funkcije prenosa. U suprotnom proveravamo adekvatnost modela "{uma".

Kod Grangera i Newbolda (1977) mo`e se pro-itati o kori{}enju modela funkcije prenosa u slu-aju postojanja povratne veze od izlazne ka ulaznoj seriji. Analiza modela funkcije prenosa u frekventnom domenu kao i unakrsna spektralna analiza izlo`ena je detaljno kod Weia (1990, 13. Glava). Haugh (Ho) i Box (1977), Haugh i Pierce (1977) i Pierce (1977) izlo`ili su i koristili modifikaciju prvobitnog Box-Jenkinsovog postupka izgradnje modela funkcije prenosa. U prvoj etapi njihove modifikacije odvojeni ARMA modeli se formiraju za ulaznu i izlaznu seriju. Zatim se za dobijene serije reziduala ra-una unakrsna korelaciona funkcija i nastavlja postupak Box-Jenkinsa. Jedna od primena ovog modifikovanog postupka je u testiranju postojanja i tipa uzro-*ne* veze izme|u vremenskih serija.

## 10.4 KOINTEGRACIJA

U analizi vremenskih serija iskazan je interes za stacionarnim serijama ili diferencama nestacionarnih serija, jer se na osnovu njih, kori{}enjem obi-nog i parcijalnog korelograma, mo`e identifikovati ARMA model vremenske serije. Za modeliranje dve ili vi{}e serija izme|u kojih se mo`e uspostaviti uzro-*ni* poredak koristimo modele funkcije prenosa. Sli-*no* modelima jedne serije i modeli funkcije prenosa su bazirani na pretpostavci da su ulazne i izlazna serija stacionarne ili da to mogu postati diferenciranjem. Prema tome, mo`e se re}i da je kori{}enje diferenciranih serija u osnovi pristupa analizi vremenskih serija koji se izla`e u ovoj knjizi.

S druge strane, u ekonometrijskoj analizi vremenskih serija uobi-ajena praksa je bila da se u regresionim modelima koristi nivo vremenske serija, a ne njena diferencna. Ocenjivanje takvih regresionih modela je rezultiralo u visokoj vrednosti koeficijenta determinacije i visokoj statisti-koj zna-ajnosti regresionih koeficijenata. Jedino {to je kvarilo ovu idili-*nu* sliku jeste izrazito niska vrednost Durbin-Watsonove statistike. Istra`ivanje Grangera i Newbolda (1974) je pokazalo da su navedeni rezultati o-ekivani. Simulaciona analiza koju su oni sproveli ukazala je na uslovljenost dobijenih ocena regresionog modela i njihove zna-ajnosti korelacionom strukturom vremenskih serija<sup>1</sup>. U

<sup>1</sup> Kao ilustraciju navodimo rezultate za slu-aj kada su serije u regresionom modelu generisane na osnovu modela slu-ajnog hoda. ^ak i u slu-ajevima kada zavisna promenljiva nije statisti-ki povezana sa obja{njavaju}im promenljivama, zbog nestacionarnosti serija dobijena prose-na vrednost korigovanog koeficijenta determinacija kretala se u intervalu od 0.26 (u modelu sa jednim regresorom) do 0.59 (u modelu sa pet regresora). Istovremeno se prose-na vrednost Durbin-Watsonove statistike kretala u intervalu od 0.32 do 0.88. Standardni *F*-test na nivou zna-ajnosti od 5% u preko 76% do 95% slu-ajeva sugerisao je odbacivanje nulte hipoteze o nepostojanju uticaja regresora na zavisnu promenljivu. Ne{to ni`e vrednosti korigovanog koeficijenta determinacije su dobijene kada je umesto modela slu-ajnog hoda kori{}en IMA(1,1) model za generisanje serija u regresionom modelu.

ekonometrijskoj literaturi ova pojava poznata je pod nazivom *la`ne regresije* (engl. *spurious regression*). Ona je obezvređila napore ekonometri-ara da kori{}enjem podataka vremenskih serija ocene dugoro-*nu* veze izme|u posmatranih promenljivih. Naime, autokoreliranost reziduala regresionog modela izme|u ostalog ima za posledicu pristrasnu ocenu varijanse gre{aka. [tavi{e, na tu pristrasnost uti-e i autokoreliranost regresora<sup>2</sup>. Kako se u regresionom modelu pri definisanju *t*-testa i *F*-testa koristi ocena varijanse gre{aka, o-ito je da }e zbog njene pristrasnosti rezultati ovih testova biti tako|e pristrasni. Pokazalo se da testovi ~e{ }e odbacuju nultu hipotezu o odsustvu me|usobne zavisnosti izme|u regresora i zavisne promenljive, nego {to sugeri{u uobi-ajeni nivoi zna-ajnosti tih testova.

Zbog navedenih posledica po rezultate testova predlagano je da se ekonometrijski model oceni kori{}enjem ne nivoa, nego prvih diferenci vremenskih serija. Kako je ve}ina ekonomskih vremenskih serija prvog reda integrisanosti, kori{}enjem prvih diferenci dobili bismo da su sve promenljive u ekonometrijskom modelu stacionarne. Napomenuto je da je raspored statistike *t*-testa i *F*-testa kao i ispravnost zaklju-aka na osnovu njih uslovljena ispunjeno{}u pretpostavke o stacionarnosti. Prve diference serija bi dakle otklonile problem pristrasnosti ovih testova, ali bi istovremeno onemogu}ile izvo|enje dugoro-*ne* ravnote`*ne* veze regresora i zavisne promenljive.

Poka`imo ta-nost tvrdnje iz prethodne re-enice na osnovu dinami-kog modela:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma X_{t-1} + \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (10.28)$$

Ako je  $|\delta| < 1$  model je stabilan i na dugi rok se posti`e ravnote`a, pa je  $Y_t = Y_{t-1} = Y^r$ ,  $X_t = X_{t-1} = X^r$  i  $\varepsilon_t$ . Model u ravnote`nom stanju glasi:

$$Y^r = \alpha^* + \beta^* X^r, \quad (10.29)$$

gde je  $\alpha^* = \alpha / (1 - \delta)$  i  $\beta^* = (\beta + \gamma) / (1 - \delta)$ . Koeficijent  $\beta^*$  meri dugoro-*ni* uticaj promene promenljive  $X_t$ . Ako me|utim, koristimo model sa prvim diferencama

$$\Delta Y_t = \beta \Delta X_t + \gamma \Delta X_{t-1} + \delta \Delta Y_{t-1} + \xi_t, \quad (10.30)$$

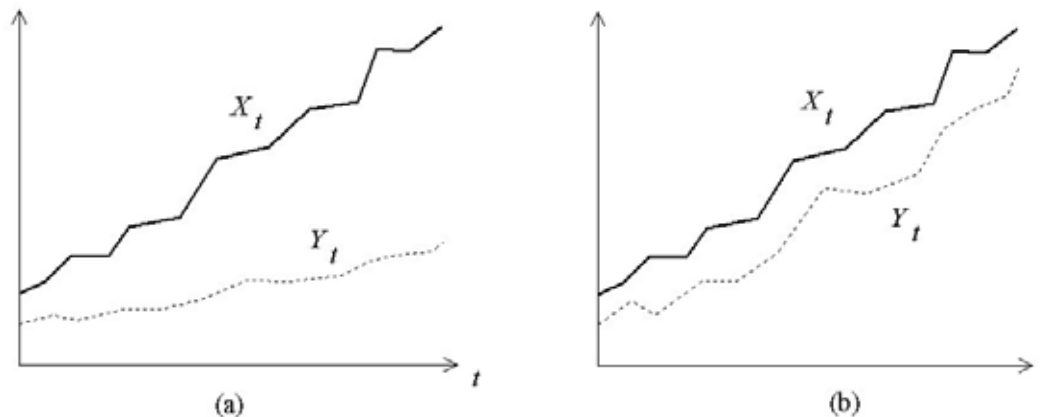
tada je u ravnote`nom stanju  $\Delta Y_t = \Delta Y_{t-1} = \Delta X_t = \Delta X_{t-1} = 0$ , pa se ni{ta ne mo`e zaklju-iti o dugoro-*noj* povezanosti  $Y_t$  i  $X_t$ . Ova dva, na prvi pogled, me|usobom ne spojiva pristupa modeliranju veze izme|u  $Y_t$  i  $X_t$  povezuju se kroz pojam *kointegracije* (engl. *cointegration*). Ka`emo da kointegracija predstavlja kariku koja prilikom modeliranja povezuje nestacionarne, integrisane procese sa pojmom dugoro-*ne* ravnote`e ekonometrijskog modela.

Osnovnu ideju sadr`anu u pojmu kointegracije mo`emo izlo`iti na primeru dva para nestacionarnih vremenskih serija sa Slike 10.2(a) i Slike 10.2(b). Vremenske serije na

<sup>2</sup> Videti na primer: Jovi-i} (1981, ss. 112-115).



Slici 10.2(a) tokom vremena se udaljavaju jedna od druge. Drugim re-ima, nemamo utisak da njihova razlika predstavlja stacionarnu seriju. Tako|e se -ini da ove vremenske serije nisu istog reda integrisanosti.



**Slika 10.2** Dve nestacionarne vremenske serije: (a) nekointegrirane, (b) kointegrirane

S druge strane, kretanje dve vremenske serije na Slici 10.2(b) je uskla|eno tokom vremena, pa izgleda da su serije istog reda integrisanosti. [tavi{e, razlika izme|u njih, ili u op{tem slu-aju linearna kombinacija  $X_t$  i  $Y_t$ , izgleda da predstavlja stacionarnu seriju. Imaju}i upravo u vidu me|usobni odnos vremenskih serija sa Slike 10.2(b) ka`emo da ako postoji dugoro-na povezanost dve nestacionarne serije njihova kointegriranost podrazumeva da su odstupanja od ravnote`ne putanje stacionarna.

Prema Engleu i Grangeru (1987) za dve vremenske serije  $X_t$  i  $Y_t$  ka`emo da su *kointegrirane* reda  $(d, b)$ , gde  $d \geq b > 0$  (u oznaci:  $X_t, Y_t \sim CI(d, b)$ ) ako je red integrisanosti obe serije jednak  $d$  i postoji netrivialna linearna kombinacija ovih serija, na primer  $Z_t = \alpha_1 X_t + \alpha_2 Y_t$ , -iji je red integrisanosti  $(d - b)$ . Vektor koeficijenata linearne kombinacije  $[\alpha_1, \alpha_2]$  naziva se *vektor kointegracionih koeficijenata* (engl. *cointegrating vector*). Uop{tenje na slu-aj vi{e vremenskih serija je direktno, pri -emu se napu{ta zahtev da svaka serija mora biti istog reda integrisanosti.

Pre nego {to se pozabavimo problemom testiranja kointegracije, uka`imo na posledice kori{enja kointegriranih serija pri modeliranju njihove dugoro-ne veze. Ako su  $X_t$  i  $Y_t$  prvog reda integrisanosti i me|usobom su kointegrirane sa vektorom kointegracionih koeficijenata  $[-\beta^*, 1]$ , tada na osnovu Grangerove teoreme reprezentacije postoji reprezentacija u formi modela korekcije gre{kom<sup>3</sup>. Preformulacijom modela (10.28) dobijamo model

<sup>3</sup> Na osnovu Grangerove teoreme reprezentacije va`i i obrnuto. Ako za obe serije, koje su prvog reda integrisanosti, postoji reprezentacija u formi modela korekcije gre{kom, onda su ove serije kointegrirane.

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta \Delta X_t + (\delta - 1)[Y_{t-1} - \beta^* X_{t-1}] + \varepsilon_t \quad (10.31)$$

koji uključuje kako mehanizam korekcije kratkoročne dinamike, tako i dugoročno rešenje polaznog modela (10.28). Ovaj model naziva se *model korekcije greškom* (engl. *error correction model*). Uočavamo da su u modelu (10.31) uključene promenljive nivoa ( $Y_{t-1}$  i  $X_{t-1}$ ) i prvih diferenci ( $\Delta Y_t$  i  $\Delta X_t$ ). Pošto su  $X_t$  i  $Y_t$  prvog reda integrisanosti, tj.  $X_t \sim I(1)$  i  $Y_t \sim I(1)$ , tada su  $\Delta X_t$  i  $\Delta Y_t$  stacionarne serije, tj.  $\Delta X_t \sim I(0)$  i  $\Delta Y_t \sim I(0)$ . Međutim, kako su serije kointegrirane, njihova linearna kombinacija  $Y_t - \beta^* X_t$  biće stacionarna. Prema tome, u modelu (10.31) svi regresori ( $\Delta X_t$  i  $Y_{t-1} - \beta^* X_{t-1}$ ) kao i zavisna promenljiva  $\Delta Y_t$  su stacionarne serije, pa nema pojave lažne regresije niti ranije spomenutog problema u primeni  $t$ -testa i  $F$ -testa. Istovremeno, na osnovu koeficijenta  $\beta^*$  možemo izmeriti dugoročni uticaj  $X_t$  na  $Y_t$ . Dugoročna veza između  $X_t$  i  $Y_t$  obuhvaćena je u modelu (10.31) izrazom u srednjoj zagradi. Ako je  $\delta$  blisko jedinici, tada je opravdano oceniti model u kome figuriraju samo prve difference serija. Međutim, u tom slučaju jedino je moguće ispitati kratkoročni uticaj  $X_t$  na  $Y_t$ . U opštem slučaju  $\delta$  je manje od jedinice, pa je model samo sa prvim diferencama neadekvatan. Izraz u srednjoj zagradi igra ključnu ulogu u funkcionisanju modela. Pretpostavimo da je zavisna promenljiva rasla brže nego što je to u saglasnosti sa ravnotežnim stanjem. To ima za posledicu da je  $Y_{t-1}$  "odlutati" iznad ravnotežne putanje, pa je vrednost izraza u srednjoj zagradi biti pozitivna. Međutim, kako je  $(\delta - 1) < 1$ , doći će na kratak rok do usporenja rasta zavisne promenljive, što će prisiliti  $Y_t$  se vratiti na dugoročnu putanju. Zato se izraz  $Y_{t-1} - \beta^* X_{t-1}$  naziva mehanizmom korekcije greškom.

Na osnovu objašnjenja modela korekcije greškom nameće se postupak provere kointegriranosti vremenskih serija. Prvo se ispituje da li je ispunjen preduslov za postojanje kointegracione relacije između dve vremenske serije. Testovima jediničnih korena (videti Odeljak 7.3.2) proveravamo da li su serije  $I(1)$  ili  $I(0)$  procesi. Ako su obe serije  $I(1)$  procesi, onda se može pretpostaviti da su serije kointegrirane. Da bi se to proverilo, ocenjuje se dugoročna veza među njima:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t. \quad (10.32)$$

Ova statička regresija naziva se *kointegraciona regresija*. Na osnovu ocenjenih reziduala modela (10.32) testiramo nultu hipotezu da je  $\hat{u}_t \sim I(1)$ , protiv alternativne hipoteze da je  $\hat{u}_t \sim I(0)$ . Kako su obe serije  $X_t$  i  $Y_t$   $I(1)$  procesi, hipoteza da je  $\hat{u}_t \sim I(1)$  znači drugim rečima da  $X_t$  i  $Y_t$  nisu kointegrirane. S druge strane, ako su reziduali modela (10.32) stacionarni, tada je serije biti kointegrirane. Testovi jediničnih korena kao što

su Durbin-Watsonov test integrisanosti<sup>4</sup>, Dickey-Fullerov test ili pro{ireni Dickey-Fullerov test mogu se koristiti za testiranje stacionarnosti serije ocenjenih reziduala modela (10.32). Skre}emo pa`nju da kriti-`ne vrednosti pro{irenog Dickey-Fullerovog testa odre|ujemo na osnovu podataka iz Tabele B6 (Dodatak B), pri -emu vodimo ra-una o broju vremenskih serija (vrednost  $N$  u Tabeli B6) izme|u koji ispituje postojanje kointegracione veze.

Pored navedenih testova kointegracije, kod Englea i Grangera (1987) mogu se na}i ostali testovi koji su zasnovani na tzv. vektorskim autoregresionim modelima. Na bazi istih modela, ali su{tinski druga-iji pristup problemu testiranja kointegracije zagovara Johansen (Johansen) (1988)<sup>5</sup> defini{u}i dva testa na principu koli-nika verodostojnosti. Njegov postupak omogu}ava istovremeno utvr|ivanje broja kointegracionih veza u skupu vi{e vremenskih serija, ocenu vektora kointegracionih koeficijenata kao i testiranje razli-`itih ograni-`enja koje na dugoro-`nu vezu me|u serijama name}e ekonomska teorija. Engle i Yoo (1987) su pro{irili prvobitni dvostepeni postupak testiranja kointegracije razmatraju}i slu-aj razli-`ite du`ine vremenskih serija i razli-`itog broja promenljivih. U radu iz 1991. godine isti autori defini{u} trostepeni postupak testiranja koji omogu}ava efikasno ocenjivanje kointegracione jedna-`ine, {to ina-`e nije bilo mogu}e primenom dvostepenog postupka. Me|utim, bolje statisti-`ke osobine Johansenovog postupka u odnosu na trostepeni postupak Englea i Yooa i ve}a ja-`ina njegovog testa kointegracije, obja`njavaju za{to je poslednjih godina u empirijskim radovima preovladala primena Johansenovog testa.

U radu Hylleberga, Englea, Grangera i Yooa (1990) pro{iren je pojam kointegracije na sezonske vremenske serije, uvo|enjem tzv. *sezonske kointegrisanosti*. Ranije izlo`eni test sezonske integrisanosti, nazvan *HEGY test*, mo`e se koristiti i za testiranje postojanja sezonske kointegrisanosti me|u vremenskim serijama.

## 10.5 MODELI VEKTORSKIH VREMENSKIH SERIJA

U ovom poglavlju istovremeno posmatramo pona}anje dve ili vi{e vremenskih serija. Na primer, svakog meseca bele}imo kretanje cena, plata, deviznog kursa, nov-`ane mase i proizvodnje. Interes nam je da konstrui}emo vi{edimenzioni model koji }e opisati kretanje i me|usobne uticaje navedenih serija. Jedan pristup ovom zadatku bazira se na ekonometrijskom modelu simultanih jedna-`ina. Me|utim, ukoliko nam ekonomska teorija ne pru}a dovoljno elemenata za konstruisanje strukturnog ekonometrijskog modela, alternativa je u definisanju vi{edimenzionog, odnosno vektorskog ARIMA modela. U tom cilju }emo pojmove koje smo uveli u analizi jedne vremenske serije pro{iriti tako da se odnose i na vi{edimenzione vremenske serije. Ina-`e, prvi korak u

<sup>4</sup> Kada ovaj test koristimo za testiranje kointegracije nazivamo ga *Durbin-Watsonov test kointegracije* ili *CIDW test*.

<sup>5</sup> Videti tako|e Johansen i Juselius (Juselius) (1990) odakle je preuzeta tabela kriti-`nih vrednosti Johansenovog testa (Tabela B12 u Dodatku B).

tom pravcu u-injen je u Poglavlju 10.3 definisanjem unakrsne kovarijacione funkcije za dve vremenske serije.

Neka je  $\mathbf{X}'_t = [X_{1,t}, X_{2,t}, \dots, X_{m,t}]$ ,  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $m$ -dimenzioni vektorski stohasti-ki proces. Proces  $\mathbf{X}_t$  je *slabo stacionaran* ako je  $E(X_{i,t}) = \mu_i$  konstantno za svako  $i = 1, 2, \dots, m$  i kovarijansa između  $X_{i,t}$  i  $X_{j,s}$  je funkcija samo vremenskog intervala  $(s-t)$  za svako  $i = 1, 2, \dots, m$  i  $j = 1, 2, \dots, m$ . Sredina  $\boldsymbol{\mu}$  i autokovarijaciona matrica  $\Gamma(k)$  za  $k$ -tu dočnju procesa  $\mathbf{X}_t$  je

$$\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X}_t) = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix}, \quad \Gamma(k) = \text{Cov}(\mathbf{X}_{t-k}, \mathbf{X}_t) = E[(\mathbf{X}_{t-k} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})']$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma_{11}(k) & \gamma_{12}(k) & \cdots & \gamma_{1m}(k) \\ \gamma_{21}(k) & \gamma_{22}(k) & \cdots & \gamma_{2m}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1}(k) & \gamma_{m2}(k) & \cdots & \gamma_{mm}(k) \end{bmatrix} = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+k}), \quad (10.33)$$

gde je  $\gamma_{ij}(k) = E(X_{i,t-k} - \mu_i)(X_{j,t} - \mu_j) = E(X_{i,t} - \mu_i)(X_{j,t+k} - \mu_j)$  za  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  i  $j = 1, 2, \dots, m$ . Autokovarijaciona matrica je funkcija  $k$ -te dočnje, pa se naziva *funkcija autokovarijacione matrice* vektorskog procesa  $\mathbf{X}_t$ . Dijagonalni elementi autokovarijacione matrice na razli-itim dočnjama su autokovarijacione funkcije  $\gamma_{ii}(k)$ , za  $i = 1, 2, \dots, m$ , a  $\gamma_{ij}(k)$  za  $i, j = 1, 2, \dots, m$  je unakrsna kovarijaciona funkcija između  $X_{i,t}$  i  $X_{j,t}$ . Ako u  $\Gamma(k)$  stavimo  $k = 0$ , dobijena matrica  $\Gamma(0)$  predstavlja *kovarijacionu matricu* procesa.

O-igledno je na osnovu definicije, da slaba stacionarnost vektorskog stohasti-kog procesa implicira slabu stacionarnost svake komponente procesa. Me|utim, obrnuto ne va`i. Slaba stacionarnost svake komponente procesa ne implicira slabu stacionarnost vektorskog stohasti-kog procesa, jer se jo{ zahteva da i unakrsna kovarijaciona funkcija dve komponente procesa bude funkcija samo vremenskog intervala.

Na osnovu funkcije autokovarijacione matrice i kovarijacione matrice procesa, defini{emo *funkciju autokorelacione matrice* vektorskog stohasti-kog procesa. Ona glasi

$$\boldsymbol{\rho}(k) = \mathbf{D}^{-1/2} \Gamma(k) \mathbf{D}^{-1/2}, \quad (10.34)$$

gde je  $\mathbf{D}$  dijagonalna matrica -iji je  $i$ -ti element varijansa  $i$ -te komponente vektorskog procesa. Funkcije autokovarijacione i autokorelacione matrice imaju sli-ne osobine kao i njihovi jednodimenzioni analogoni. Ove dve funkcije su pozitivno semidefinitne kao i jednodimenziona autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija.

Me|utim, dok za  $\gamma_k$  i  $\rho_k$  va`i osobina simetri-nosti, u vi{edimenzionom slu-aju je  $\Gamma(k) = \Gamma'(-k)$  i  $\rho(k) = \rho'(-k)$ . Mo`e se pokazati da je kod vektorskih procesa i .

Na osnovu *uop{tenja Woldove teoreme razlaganja*<sup>6</sup> sledi da se ma koji stacionarni vektorski stohasti-ki proces (nazivamo ga linearni proces ili potpuno nedeterministi-ki vektorski proces) mo`e izraziti u slede}em obliku:

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\Psi}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \boldsymbol{\Psi}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-2} + \dots = \boldsymbol{\mu} + \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\Psi}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}, \quad (10.35)$$

gde je  $\boldsymbol{\Psi}_0 = \mathbf{I}$  ( $m \times m$ ) jedini-na matrica,  $\boldsymbol{\Psi}_j$  su ( $m \times m$ ) matrice koeficijenata i  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  su  $m$ -dimenzioni vektorski procesi belog {uma ~ija je sredina jednaka nuli, a kovarijacione matrice

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-k}, \boldsymbol{\varepsilon}_t) = \begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}, & \text{za } k = 0 \\ \mathbf{0}, & \text{za } k \neq 0 \end{cases}, \quad (10.36)$$

gde je  $\boldsymbol{\Sigma}$  proizvoljna ( $m \times m$ ) simetri-na pozitivno definitna matrica. Na osnovu kovarijacionih matrica vektorskog procesa belog {uma zaklju-ujemo da elementi vektora  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  mogu biti korelirani u istom vremenskom periodu. Kori{}enjem operatora docnje linearni proces pi{emo u sa`etijem obliku

$$\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Psi}(B)\boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (10.37)$$

gde je  $\boldsymbol{\Psi}(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\Psi}_j B^j$ . Ovaj oblik procesa naziva se *Woldova* ili *MA* reprezentacija vektorskog stohasti-kog procesa.

Ako linearni proces napi{emo u obliku

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu} &= \boldsymbol{\Pi}_1(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\Pi}_2(\mathbf{X}_{t-2} - \boldsymbol{\mu}) + \dots + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \boldsymbol{\Pi}(B)(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}) &= \boldsymbol{\varepsilon}_t \end{aligned} \quad (10.39)$$

gde je  $\boldsymbol{\Pi}(B) = \mathbf{I} - \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\Pi}_j B^j$ , a  $\boldsymbol{\Pi}_j$  su ( $m \times m$ ) matrice autoregresionih koeficijenata, ka`emo da smo dali *AR reprezentaciju vektorskog procesa*. Umesto modela (10.37) i (10.39) sa beskona-nim brojem matrica koeficijenata defini{emo klasu ekonomi-nih vi{edimenzionih ARMA( $p, q$ ) modela

$$\boldsymbol{\Phi}_p(B)\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\Theta}_q(B)\boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (10.40)$$

gde  $\boldsymbol{\Phi}_p(B) = \boldsymbol{\Phi}_0 - \boldsymbol{\Phi}_1 B - \boldsymbol{\Phi}_2 B^2 - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p B^p$  i  $\boldsymbol{\Theta}_q(B) = \boldsymbol{\Theta}_0 - \boldsymbol{\Theta}_1 B - \boldsymbol{\Theta}_2 B^2 - \dots - \boldsymbol{\Theta}_q B^q$  su autoregresione matrice i matrice pokretnih proseka ~iji su elementi polinomi po operatoru docnje reda  $p$  i  $q$  respektivno. Matrice  $\boldsymbol{\Phi}_0$  i  $\boldsymbol{\Theta}_0$  su nesingularne ( $m \times m$ )

<sup>6</sup> Za dokaz videti: Hannan (1970).

matrice, a obi-no pretpostavljamo da je  $\Phi_0 = \Theta_0 = \mathbf{I}$ . Modeli iz ove klase nazivaju se *modeli vektorskih autoregresionih procesa pokretnih proseka*, a ozna-avaju se kao VARMA modeli.

Ako u model (10.40) stavimo  $p=0$  dobi}emo vektorski *MA(q) model*. Za ovaj proces ka`emo da je invertibilan ako su koreni  $|\lambda^q \mathbf{I} - \lambda^{q-1} \Theta_1 - \dots - \Theta_q| = 0$  manji po modulu od jedinice. Ako u model stavimo  $q=0$  dobi}emo vektorski *AR(p) model*. Za ovaj proces ka`emo da je stacionaran ako su koreni  $|\lambda^p \mathbf{I} - \lambda^{p-1} \Phi_1 - \dots - \Phi_p| = 0$  manji po modulu od jedinice.

Me|utim, uslovi stacionarnosti i invetibilnosti nisu dovoljni da se na osnovu autokovarijacionih matrica jednozna-no defini}e VARMA model. [tavi}e, uvek }e postojati vi}e razli-utih, ali ekvivalentnih formi istog modela, pa }e biti i vi}e razli-utih slupova ograni-enja koja se mogu nametnuti na model da bi se obezbedila jednozna-nost reprezentacije. Zato su uslovi za identifikaciju VARMA modela vi}estruko slo`eniji od uslova za jednodimenzione ARMA modele, pa -ak i od uslova za identifikaciju ekonometrijskih modela simultanih jedna-ina<sup>7</sup>.

Box i Jenkinsov iterativni postupak izgradnje ARIMA modela koristi se i za izgradnju VARMA modela. Mada je izvr}eno uop{tavanje sredstava za odre|ivanje reda procesa i diferenciranja<sup>8</sup> iz 7. Glave (kao {to su uzora-ka obi-na i parcijalna autokorelaciona funkcija) i za vektorske procese postupak identifikacije VARMA modela je veoma slo`en posao<sup>9</sup>. U etapi ocenjivanja modela problem nam predstavlja i dimenzija procesa. Naime, broj koeficijenata koje treba oceniti raste sa kvadratom  $m$  ( $m$  je broj komponenata u vektorskoj vremenskoj seriji). Re}enje ovog problema se tra`i u nametanju ograni-enja na koeficijente modela, da bi se na taj na-in smanjio broj koeficijenata koje ocenjujemo. Naj-e}e se na osnovu preliminarne analize vrednost pojedinih elemenata iz matrice koeficijenata izjedna-ava sa nulom.

Alternativa ovom re}enju tra`i se u aproksimaciji VARMA modela vektorskim AR (VAR) modelom. Pored toga {to se ovi modeli koriste u svrhe prognoze kao i ostali modeli vremenskih serija, oni predstavljaju poku}aj zasnivanja radikalno druga-ijeg pristupa modeliranju vi}edimenzionih serija nego {to je pristup na bazi klasi-nog ekonometrijskog modela simultanih jedna-ina. Prema Simsu (Simz) (1980) su{tinska razlika izme|u VAR modela i strukturnog ekonometrijskog modela ogleđa se u tome {to kod VAR modela nema: *a priorne* podele promenljivih na endogene i egzogene, nultih ograni-enja na koeficijente i ekonomske teorije na kojoj se model zasniva. Ovi modeli

<sup>7</sup> Videti na primer: Granger i Newbold (1977, ss. 219-224).

<sup>8</sup> [to se ti-e diferenciranja serija pri izgradnji vi}edimenzionog modela, napominjemo da svaka od komponenti vektorske serije ne mora biti istog reda integrisanosti. Zbog toga, a i zbog mogu}e kointegrisanosti vremenskih serija diferenciranju nestacionarne vektorske vremenske serije treba pa`ljivo pristupiti.

<sup>9</sup> Za prakti-an postupak modeliranja vi}edimenzione vremenske serije videti: Tiao i Box (1981).

predstavlja naj-efikasniju klasu modela vektorskih vremenskih serija u ekonomiji<sup>10</sup> uprkos ozbiljnim prigovorima koji im se upućuju.

---

<sup>10</sup> Tako se na bazi VAR modela definiše pojam uzročnosti, u ekonometrijskoj literaturi poznatiji pod nazivom Grangerova uzročnost (Granger (1969) i Sims (1972)), zatim egzogenost (Engle, Hendry i Richard (Richard) (1983)) kao i postupak njihovog testiranja. Pokušaj strukturne analize na bazi VAR modela je izložen u radovima Simsa (1980), (1982), dok je kod Zellnera (Zelner) i Palma (Palm) (1974) data veza VARMA modela i dinamičkih strukturnih ekonometrijskih modela.

## LITERATURA

- Abraham, B. i Ledolter, J. (1983). *Statistical Methods for Forecasting*. New York: John Wiley and Sons.
- Abraham, B. i Ledolter, J. (1984). A Note on Inverse Autocorrelations. *Biometrika*, **71**, 609-614.
- Akaike, H. (1970). Statistical Predictor Identification. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **22**, 203-217.
- Akaike, H. (1973). Information Theory an an Extension of the Maximum Likelihood Principle. U *Second International Symposium on Information Theory* (ur. B.N. Petrov i F. Csaki), Budapest: Akademiai Kiado.
- Akaike, H. (1974). A New Look at the Statistical Model Identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **19**, 716-723.
- Anderson, T.W. (1971). *The Statistical Analysis of Time Series*. New York: John Wiley and Sons. (rusko izdanje iz 1976. godine).
- Ansley, C.F. i Newbold, P. (1980). Finite Sample Properties of Estimates for Autoregressive Moving Average Models. *Journal of Econometrics*, **13**, 159-183.
- Bartlett, M.S. (1946). On the Theoretical Specification and Sampling Properties of Autocorrelated Time Series. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **8**, 27-41.
- Bartlett, M.S. (1966). *Stochastic Processes*. (Drugo izdanje). Cambridge: Cambridge University Press.
- Beguín, J.M., Gouriéroux, C. i Montfort, A. (1980). Identification of Mixed Autoregressive-Moving Average Process: The Corner Method. U *Time Series* (ur. O.D. Anderson), 423-436, Amsterdam: North-Holland.
- Bell, W.R. i Hillmer, S.C. (1984). Issues Involved with the Seasonal Adjustment of Economic Time Series. *Journal of Business and Economic Statistics*, **2**, 291-320.
- Bhargava, A. (1983). On the Theory of Testing for Unit Roots in Observed Time Series. *ICERD Discussion Paper 83/67*, London School of Economics.



- Bhargava, A. (1986). On the Theory of Testing for Unit Roots in Observed Time Series. *Review of Economic Studies*, **53**, 369-384.
- Box, G.E.P. i Cox, D.R. (1964). An Analysis of Transformations. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **26**, 211-252.
- Box, G.E.P. i Jenkins, G.M. (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Revised Edition, San Francisco: Holden-Day.
- Box, G.E.P. i Pierce, D.A. (1970). Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models. *Journal of the American Statistical Association*, **65**, 1509-1526.
- Box, G.E.P. i Tiao, G.C. (1975). Intervention Analysis with Application to Economic and Environmental Problems. *Journal of the American Statistical Association*, **70**, 70-79.
- Brown, R.G. (1963). *Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series*. Englewood-Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Burman, J.P. (1979). Seasonal Adjustment - A Survey. U *TIMS Studies in the Management Studies, Volumen: 12: Forecasting*, 45-57. Amsterdam: North-Holland.
- Burman, J.P. (1980). Seasonal Adjustment by Signal Extraction. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, **143**, 321-337.
- Burridge, P. i Wallis, K.F. (1984) Unobserved-Components Models for Seasonal Adjustment Filters. *Journal of Business and Economic Statistics*, **2**, 350-359.
- Carbone, R. i Longine, R.L. (1977). A Feedback Model for Automated Real Estate Assessment. *Management Science*, **24**, 241-248.
- Chang, I., Tiao, G.C. i Chen, C. (1988). Estimation of Time Series Parameters in the Presence of Outliers. *Technometrics*, **30**, 193-204.
- Charemza, W.W. i Deadman, D.F. (1992). *New Directions in Econometric Practice - General to Specific Modelling, Cointegration and Vector Autoregression*. Hants: Edward Elgar.
- Chatfield, C. (1989). *The Analysis of Time Series: An Introduction*. Fourth Edition, London: Chapman and Hall.
- Cleveland, W.P. i Tiao, G.C. (1976) Decomposition of Seasonal Time Series: A Model for the Census X-11 Program. *Journal of the American Statistical Association*, **82**, 419-423.
- Cleveland, W.S. (1987). Research in Statistical Graphics. *Journal of the American Statistical Association*, **82**, 419-423.
- Cooper, R.L. (1972). The Predictive Performance of Quarterly Econometric Models of the United States. U *Econometric Models of Cyclical Behaviour*, (ur. Hickman, B.G.), New York: Columbia University Press, 813-974.
- Cryer, J.D. (1986). *Time Series Analysis*. Boston: PWS-KENT Publishing Company.
- Dagum, E.B. (1975). Seasonal Factor Forecasts from ARIMA models. *Bulletin of the International Statistical Institute*, **46**, 203-216.
- Dagum, E.B. (1983). *The X-11-ARIMA Seasonal Adjustment Method*. Ottawa: Statistics Canada.

- Daniell, P.J. (1946). Discussion on Symposium on Autocorrelation in Time Series. *Journal of the Royal Statistical Society, Supplement 8*, 88-90.
- Dhrymes, P.J. (1971). *Distributed Lags - Problems of Estimation and Formulation*. San Francisco: Holden-Day.
- Dickey, D.A., Bell, B. i Miller, R. (1986). Unit Roots in Time Series Models: Tests and Implications, *The American Statistician*, **40**, 12-26.
- Dickey, D.A. i Fuller, W.A. (1979). Distribution of the Estimates for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 427-431.
- Dickey, D.A., Hasza, D.P. i Fuller, W.A. (1984). Testing for Unit Roots in Seasonal Time Series. *Journal of the American Statistical Association*, **79**, 355-367.
- Durbin, J. (1960). The Fitting of Time Series Models. *Review of the International Statistical Institute*, **28**, 233-244.
- Engle, R.F. i Granger, C.W.J. (1987). Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing. *Econometrica*, **55**, 251-276.
- Engle, R.F. i Granger, C.W.J. (ur.) (1992). *Long-Run Economic Relationships - Readings in Cointegration*. Oxford: Oxford University Press.
- Engle, R.F., Hendry, D.F. i Richard, J.-F. (1983). Exogeneity. *Econometrica*, **51**, 277-304.
- Engle, R.F. i Yoo, B.S. (1987). Forecasting and Testing in Cointegrated Systems. *Journal of Econometrics*, **35**, 143-159.
- Engle, R.F. i Yoo, B.S. (1991). Cointegrated Economic Time Series: An Overview with New Results. U *Long-Run Economic Relationships - Readings in Cointegration*, (ur. Engle, R.F. i Granger, C.W.J.). Oxford: Oxford University Press.
- Epstein, R.J. (1987). *A History of Econometrics*. Amsterdam: North-Holland.
- Fisher, R.A. (1929). Tests of Significance in Harmonic Analysis. *Proceedings of the Royal Society, Series A*. **125**, 54-59.
- Fox, A.J. (1972). Outliers in Time Series. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **43**, 350-363.
- Gardner, E.S., jr. (1985). Exponential Smoothing: The State of the Art. *Journal of Forecasting*, **4**, 1-28.
- Gooijer, J. de, Abraham, B., Gould, A. i Robinson, L. (1985). Methods for Determining the Order of an Autoregressive-Moving Average Process: A Survey. *International Statistical Review*, **53**, 301-329.
- Granger, C.W.J. (1966). The Typical Spectral Shape of an Economic Variable. *Econometrica*, **34**, 150-161.
- Granger, C.W.J. (1969). Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods. *Econometrica*, **37**, 424-438.
- Granger, C.W.J. (1989). *Forecasting in Business and Economics*. Second Edition, New York: Academic Press.

- Granger, C.W.J. (ur.) (1990). *Modelling Economic Series - Readings in Econometric Methodology*. Oxford: Clarendon Press.
- Granger, C.W.J. i Hatanaka, M. (1964). *Spectral Analysis of Economic Time Series*. Princeton: Princeton University Press.
- Granger, C.W.J. i Hughes, A.O. (1968). Spectral Analysis of Short Series - A Simulation Study. *Journal of the Royal Statistical Society, A* **131**, 83-99.
- Granger, C.W.J. i Morgenstern, O. (1970). *Predictability of Stock Market Prices*. Lexington: Heath Lexington Books.
- Granger, C.W.J. i Newbold, P. (1974a). Spurious Regressions in Econometrics. *Journal of Econometrics*, **2**, 111-120.
- Granger, C.W.J. i Newbold, P. (1974b). Forecasting Transformed Series. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **38**, 189-203.
- Granger, C.W.J. i Newbold, P. (1986). *Forecasting Economic Time Series*. Second Edition, New York: Academic Press.
- Gray, H.L., Kelley, G.D. i McIntire, D.D. (1978). A New Approach to ARMA Modelling. *Communications in Statistics, B* **7**, 1-77.
- Haavelmo, T. (1943). The Statistical Implications of a System of Simultaneous Equations. *Econometrica*, **11**, 1-12.
- Haavelmo, T. (1944). The Probability Approach in Econometrics. *Econometrica*, **12**, dodatak.
- Hannan, E.J. (1960). *Time Series Analysis*. London: Methuen.
- Hannan, E.J. (1970). *Multiple Time Series*. New York: John Wiley and Sons.
- Hannan, E.J. i Quinn, B.G. (1979). Determination of the Order of an Autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **41**, 190-195
- Harrison, P.J. (1965). Short-Term Sales Forecasting. *Applied Statistics*, **14**, 102-139.
- Harrison, P.J. (1967). Exponential Smoothing and Short-Term sales Forecasting. *Management Science*, **13**, 821-842.
- Harrison, P.J. i Stevens, C.F. (1971). A Bayesian Approach to Short Term Forecasting. *Operation Research Quarterly*, **22**, 341-362.
- Harvey, A.C. (1990). *The Econometric Analysis of Time Series*. Second Edition, London: Philip Allan.
- Harvey, A.C. (1989). *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Harvey, A.C. (1984). A Unified View of Statistical Forecasting Procedures. *Journal of Forecasting*, **3**, 245-275.
- Haugh, L.D. i Box, G.E.P. (1977). Identification of Dynamic Regression Models Connecting Two Time Series. *Journal of the American Statistical Association*, **72**, 121-130.
- Hendry, D.F. (1983). Econometric Modelling: The Consumption Function in Retrospect, *Scottish Journal of Political Economy*, **30**, 193-220.

- Hillmer, S.C. i Tiao, G.C. (1982). An ARIMA-Model Based Approach to Seasonal Adjustment. *Journal of the American Statistical Association*, **77**, 63-70.
- Holden, K., Peel, D.A. i Thompson, J.L. (1990). *Economic Forecasting: An Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Holt, C.C., Modigliani, F., Muth, J.F. i Simon, H. (1960). *Planning Production, Inventories and Work Forces*. Englewood-Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Hood, W.C. i Koopmans, T.C. (1953). (ur.), *Studies in Econometric Method. Volume 14*, Cowles Commission Monograph, New York: John Wiley and Sons.
- Hosking, J.R.M. (1980). The Multivariate Portmanteau Statistic. *Journal of the American Statistical Association*, **75**, 602-607.
- Howrey, E.P. (1968). A Spectral Analysis of the Long-Swing Hypothesis. *International Economic Review*, **9**, 228-252.
- Hylleberg, S., Engle, R.F., Granger, C.W.J. i Yoo, B.S. (1990). Seasonal Integration and Cointegration. *Journal of Econometrics*, **44**, 215-238.
- Jenkins, G.M. i Watts, D.G. (1968). *Spectral Analysis and its Applications*. San Francisco: Holden-Day.
- Johansen, S. (1988). Statistical Analysis of Cointegration Vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control*, **12**, 231-254.
- Johansen, S. i Juselius K. (1990). Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration - With Applications to the Demand for Money. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, **52**, 169-210.
- Jovičić, M. (1981). *Ekonometrijski metodi*. Beograd: Savremena administracija.
- Kendall, M.G., Stuart, A. i Ord, J.K. (1983). *The Advanced Theory of Statistics*, 3. tom (4. izdanje), London: Griffin.
- Kenny, P. i Durbin, J. (1982). Local Trend Estimation and Seasonal Adjustment of Economic and Social Time Series (with Discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, **145**, 1-41.
- Koopmans, L.H. (1974). *The Spectral Analysis of Time Series*. New York: Academic Press.
- Koopmans, T.C. (1950). (ur.), *Statistical Inference in Dynamic Economic Models, Volume 10*, Cowles Commission Monograph, New York: John Wiley and Sons.
- Koreisha, S. i Yoshimoto, G. (1991). A Comparison among Identification Procedures for Autoregressive Moving Average Models. *International Statistical Review*, **59**, 37-57.
- Kovačić, Z.J. (1994). *Multivarijaciona analiza*. Beograd: Ekonomski fakultet.
- Lewandowski, R. (1982). Sales Forecasting with FORSYS. *Journal of Forecasting*, **1**, 205-214.
- Ljung, G.M. i Box, G.E.P. (1978). On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models. *Biometrika*, **65**, 297-303.
- Lucas, R.E. (1976). Econometric Policy Evaluation: A Critique. U *The Phillips Curve and Labour Markets* (ur. K. Brunner i A.H. Meltzer), Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, **1**, 19-46.

- McKenzie, E. (1976). An Analysis of General Exponential Smoothing. *Operations Research*, **24**, 131-140.
- MacKinnon, J. (1991). Critical Values for Cointegration Tests. U *Long-Run Economic Relationships - Readings in Cointegration* (ur. R.F. Engle i C.W.J. Granger), Oxford: Oxford University Press, 267-276.
- McGill, R., Tukey, J.W., i Larsen, W.A. (1978). Variation of Box Plots. *American Statistician*, **32**, 12-16.
- Mann, H.B. i Wald, A. (1943). On the Statistical Treatment of Linear Stochastic Difference Equations. *Econometrica*, **11**, 173-220.
- Marić, N. (1991). *Modeliranje vremenskih serija*. Beograd: Savezni zavod za statistiku.
- Mills, T.C. (1990). *Time Series Techniques for Economists*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Milošević, V. (1983). *Teorijska statistika*. Beograd: Naučna knjiga.
- Montgomery, D.C. i Johnson, L.A. (1976). *Forecasting and Time Series Analysis*. New York: McGraw-Hill Book Company.
- Muth, J.F. (1960). Optimal Properties of Exponentially Weighted Forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, **55**, 299-306.
- Naylor, T.H., Seaks, T.G. i Wichern, D.W. (1972). Box-Jenkins Methods: An Alternative to Econometric Models. *International Statistical Review*, **40**, 123-137.
- Nelson, C.R. (1973). *Applied Time Series Analysis for Managerial Forecasting*. San Francisco: Holden Day.
- Nelson, C.R. i Granger, C.W.J. (1979). Experience with Using the Box-Cox Transformation when Forecasting Economic Time Series. *Journal of Econometrics*, **10**, 57-69.
- Nerlove, M. (1964). Spectral Analysis of Seasonal Adjustment Procedures. *Econometrica*, **32**, 241-286.
- Nerlove, M., Grether, D.M. i Carvalho, J.L. (1979). *Analysis of Economic Time Series: A Synthesis*. New York: Academic Press.
- Newbold, P. (1974). The Exact Likelihood Function for a Mixed Autoregressive Moving Average Process. *Biometrika*, **61**, 423-426.
- Newbold, P. (1982). *Causality Testing in Economics. Time Series Analysis: Theory and Practice I* (ur. Anderson, O.D.), Amsterdam: North-Holland, 701-716.
- Newbold, P. i Granger, C.W.J. (1974). Experience with Forecasting Univariate Time Series and the Combination of Forecasts. *Journal of the Royal Statistical Society, A* **137**, 131-146.
- O'Donovan, T.M. (1983). *Short Term Forecasting: An Introduction to the Box-Jenkins Approach*. New York: John Wiley and Sons.
- Osborn, D.R., Chui, A.P.L., Smith, J.P. i Birchenhall, C.R. (1988). Seasonality and the Order of Integration for Consumption. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, **50**, 361-377.
- Pagano, M. (1972). An Algorithm for Fitting Autoregressive Schemes. *Applied Statistics*, **21**, 274-286.

- Parzen, E. (1969). Multiple Time Series Modelling, U *Multivariate Analysis, Vol. II* (ur. Krishnaiah, P.R.), New York: Academic Press, 389-409.
- Parzen, E. (1979). Forecasting and Whitening Filter Estimation. U *Studies in Management Science*, **12**, (ur. Makridakis, S i Wheelwright, S.C.), 149-166.
- Parzen, E. (1982). ARARMA Models for Time Series Analysis and Forecasting. *Journal of Forecasting*, **1**, 66-82.
- Perron, P. (1989). The Great Crash, the Oil Shock and the Unit Root Hypothesis. *Econometrica*, **57**, 1361-1401.
- Phillips, P.C.B. (1987). Time Series Regression with Unit Root. *Econometrica* **55**, 277-301.
- Phillips, P.C.B. and P. Perron (1988). Testing for a Unit Root in Time Series Regression. *Biometrika* **75**, 335-346.
- Pierce, D.A. (1977). Relationships - and the Lack Thereof - Between Economic Time Series, with Special Reference to Money and Interest Rates. *Journal of the American Statistical Association*, **72**, 11-26.
- Pierce, D.A. (1979). R2 Measures for Times Series. *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 901-910.
- Pierce, D.A. i Haugh, L.D. (1977). Causality in Temporal Systems: Characterizations and a Survey. *Journal of Econometrics*, **5**, 265-293.
- Quenouille, M.H. (1947). A Large Sample Test for the Goodness of Fit of Autoregressive Schemes. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, **110**, 123-129.
- Roberts, S.A. (1982). A General Class of Holt-Winters Type Forecasting Models. *Management Science*, **28**, 808-820.
- Rohatgi, V.K. (1976). *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*. New York: John Wiley and Sons.
- Said, S.E. i Dickey, D.A. (1984). Testing for Unit Roots in Autoregressive Moving Average Models of Unknown Order. *Biometrika*, **71**, 599-607.
- Sargan, J.D. i Bhargava, A.S. (1983). Testing Residuals from Least Squares Regression for being Generated by the Gaussian Random Walk. *Econometrica*, **51**, 153-174.
- Sargent, T.J. (1979). *Macroeconomic Theory*. New York: Academic Press.
- Sargent, T.J. (1981). Interpreting Economic Time Series. *Journal of Political Economy*, **89**, 213-248.
- Sargent, T.J. i Sims C.A. (1977). Business Cycle Modelling Without Pretending to Have Too Much A Priori Economic Theory. U *New Methods in Business Cycle Research: Proceedings from a Conference*, (ur. Sims, C.A.), Minneapolis: Federal Reserve Bank of Minneapolis, 45-109.
- Schuster, A. (1898). On Investigation of Hidden Periodicities. *Terr. Magn. Atmos. Electr.*, **3**, 13-41.
- Schwert, G.W. (1989). Tests for Unit Roots: A Monte Carlo Investigation. *Journal of Business and Economic Statistics* **7**, 147-159.

- Shibata, R. (1976). Selection of the Order of an Autoregressive Model by Akaike's Information Criteria. *Biometrika*, **63**, 117-126.
- Shiskin, J., Young, A.H. i Musgrave, J.C. (1967). The X-11 Variant of the Census Method II Seasonal Adjustment Program. *Technical Paper 15*, Bureau of the Census, Washington D.C.
- Shumway, R.H. (1988). *Applied Statistical Time Series Analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Sims, C.A. (1972). Money, Income and Causality. *American Economic Review*, **62**, 540-552.
- Sims, C.A. (1977). Exogeneity and Causal Ordering in Macroeconomic Models. U *New Methods in Business Cycle Research: Proceedings from a Conference*, (ur. C.A. Sims), Minneapolis: Federal Reserve Bank of Minneapolis, 23-43.
- Sims, C.A. (1980). Macroeconomic and Reality. *Econometrica*, **48**, 1-48.
- Sims, C.A. (1982). Policy Analysis with Econometric Models. *Brookings Papers on Economic Activity*, **1**, 107-164.
- Slutzky, E. (1927). The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes. *Econometrica*, **5**, 105-146, (1937). Prevod sa ruskog ranijeg rada pod istim naslovom iz Problema Ekonomskih Uslova (izdanje Konjunktornog Instituta iz Moskve).
- Spanos, A. (1986). *Statistical Foundations of Econometric Modelling*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Stock, J.H. i Watson, M.W. (1988). Testing for Common Trends. *Journal of the American Statistical Association* **83**, 1097-1107.
- Tiao, G.C. (1985). Autoregressive Moving Average Models, Intervention Problems and Outlier Detection in Time Series. U *Handbook of Statistics, Volume 5: Time Series in the Time Domain* (ur. E.J. Hannan, P.R. Krishnaiah i M.M. Rao), 85-118, Amsterdam: North-Holland.
- Tsay, R.S. (1986). Time Series Model Specification in the Presence of Outliers. *Journal of the American Statistical Association*, **81**, 132-141.
- Tsay, R.S. (1988). Outliers, Level Shifts, and Variance Changes in Time Series. *Journal of Forecasting*, **7**, 1-20.
- Tsay, R.S. i Tiao, G.C. (1984). Consistent Estimates of Autoregressive Parameters and Extended Sample Autocorrelation Function for Stationary and Nonstationary ARMA Models. *Journal of the American Statistical Association*, **79**, 84-96.
- Tukey, J.W. (1972). Some Graphic and Semigraphic Displays. U *Statistical Papers in Honor of George W. Snedecor* (ur. T.A. Bancroft), 292-316, Iowa: Iowa State University Press.
- Tukey, J.W. (1977). *Exploratory Data Analysis*. Reading, Mass: Addison-Wesley Publishing Company.
- Velleman, P.F. (1980). Definition and Comparison of Robust Nonlinear Data Smoothers. *Journal of the American Statistical Association*, **75**, 609-615.
- Velleman, P.F. i Hoaglin, D.C. (1981). *Applications, Basics, and Computing of Exploratory Data Analysis*. Boston, Mass: Duxbury.

- Wei, W.W.S. (1990). *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*. Redwood City: Addison-Wesley Publishing Company.
- Wheelwright, S.C. i Makridakis, S. (1985). *Forecasting Methods for Management*. Fourth Edition, New York: John Wiley and Sons.
- Wilk, M.B. i Gnanadesikan, R. (1968). Probability Plotting Methods for the Analysis of Data. *Biometrika*, **55**, 1-17.
- Winters, P.R. (1960). Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages. *Management Science*, **6**, 324-342.
- Wold, H.O. (1938). *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*. Uppsala: Almqvist and Wicksell.
- Wold, H.O. (1954). Causality and Econometrics. *Econometrica*, **22**, 162-177.
- Yule, G.U. (1926). Why Do We Sometimes Get Nonsense Correlations Between Time Series - A Study in Sampling and the Nature of Time Series. *Journal of the Royal Statistical Society*, **89**, 1-64.
- Yule, G.U. (1927). On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series, with Special Reference to Wolfer's Sunspot Numbers. *Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A*, **226**, 267-298.
- Zečević, T. (1972). *Dinamička analiza vremenskih serija*. Beograd: Ekonomski fakultet.
- Zellner, A. (1979). Causality and Econometrics. U *Three Aspects of Policy and Policymaking: Knowledge, Data and Institutions*, (ur. Brunner, K. i Meltzer, A.H.), Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, **10**, 9-54.
- Zellner, A. i Palm, F. (1974). Time Series Analysis and Simultaneous Equation Econometric Models. *Journal of Econometrics*, **2**, 17-54.





## **DODATAK A**

### **VREMENSKE SERIJE KORIŠĆENE ZA ILUSTRACIJU**

- Seriya S1** Godišnji indeks industrijske proizvodnje u Srbiji (1955=100), 1946-1990.
- Seriya S2** Godišnji indeks industrijske proizvodnje u bivšoj Jugoslaviji (1955=100), 1946-1991.
- Seriya S3** Godišnji realni društveni proizvod po stanovniku SR Jugoslavije (stalne cene iz 1972), 1952-1990.
- Seriya S4** Godišnja nezaposlenost u SR Jugoslaviji, 1964-1992.
- Seriya S5** Godišnji realni društveni proizvod SR Jugoslavije (stalne cene iz 1972), 1952-1991.
- Seriya S6** Godišnja vrednost investicija u osnovne fondove SR Jugoslavije (stalne cene iz 1972), 1952-1991.
- Seriya S7** Godišnja vrednost osnovnih sredstava privrede društvenog sektora SR Jugoslavije (stalne cene iz 1972), 1952-1991.
- Seriya S8** Ukupan broj završenih stanova godišnje u SR Jugoslaviji, 1954-1991.
- Seriya S9** Kvartalni indeks industrijske proizvodnje u SR Jugoslaviji (1992=100), 1987.I-1994.I.
- Seriya S10** Kvartalni indeks industrijske proizvodnje u Srbiji (1989=100), 1972.I- 1989.IV.
- Seriya S11** Kvartalni indeks industrijske proizvodnje u bivšoj Jugoslaviji (1989=100), 1956.I-1991.I.
- Seriya S12** Kvartalna nezaposlenost u bivšoj Jugoslaviji (u hiljadama), 1961.I- 1991.IV.
- Seriya S13** Mesečni indeks industrijske proizvodnje u SR Jugoslaviji (1992=100), 1987.1-1994.5.
- Seriya S14** Mesečni indeks industrijske proizvodnje u Srbiji (1989=100), 1972.1- 1989.12.
- Seriya S15** Mesečni indeks industrijske proizvodnje u bivšoj Jugoslaviji (1989=100), 1956.1-1991.5.
- Seriya S16** Mesečna nezaposlenost u bivšoj Jugoslaviji (u hiljadama), 1961.1- 1991.12.
- Seriya S17** Nedeljne stope rasta cena na malo u SR Jugoslaviji, 1994.2-1994.8.

## Godišnje vremenske serije

Godina	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8
1946	36	33	-	-	-	-	-	-
1947	56	50	-	-	-	-	-	-
1948	69	62	-	-	-	-	-	-
1949	74	70	-	-	-	-	-	-
1950	76	72	-	-	-	-	-	-
1951	74	69	-	-	-	-	-	-
1952	70	68	31.0	-	226.5	52.5	341.6	-
1953	77	76	36.8	-	273.0	66.3	352.6	-
1954	86	86	35.5	-	267.4	70.1	352.5	10,810
1955	100	100	39.5	-	302.1	77.6	367.6	9,380
1956	113	110	37.2	-	287.6	83.7	407.4	12,978
1957	134	129	47.0	-	366.8	101.2	448.9	15,894
1958	156	143	45.2	-	355.9	117.6	510.1	24,472
1959	178	162	56.8	-	452.6	142.2	544.6	22,637
1960	208	186	58.0	-	467.2	158.7	590.9	28,276
1961	221	200	59.9	-	487.1	188.5	665.8	38,946
1962	235	214	62.3	-	511.6	190.0	770.0	43,255
1963	276	247	69.3	-	575.2	188.4	849.3	44,316
1964	329	286	76.5	106,662	641.5	212.5	932.2	45,647
1965	354	310	77.5	108,638	656.1	197.4	1,020.8	48,992
1966	364	322	83.2	115,547	713.0	219.0	1,112.0	54,413
1967	363	322	83.9	118,628	725.6	225.3	1,197.0	54,602
1968	379	342	84.7	136,692	738.6	243.7	1,279.1	56,830
1969	420	381	93.1	159,115	822.2	261.3	1,410.2	54,784
1970	461	416	95.4	162,401	850.2	286.4	1,521.2	54,904
1971	517	459	102.8	144,552	924.7	293.0	1,682.6	51,286
1972	565	495	106.3	158,310	965.6	284.7	1,801.9	52,390
1973	603	524	110.7	198,841	1,013.4	279.3	1,940.9	52,913
1974	672	580	118.9	237,465	1,099.5	303.5	2,079.7	57,894
1975	714	613	121.4	286,418	1,133.2	331.1	2,232.3	59,725
1976	746	633	126.1	337,509	1,189.3	384.6	2,404.9	60,039
1977	817	693	134.9	391,535	1,284.7	427.9	2,602.6	52,674
1978	887	753	141.1	417,204	1,356.3	473.7	2,804.7	54,119
1979	961	813	150.0	434,045	1,454.8	504.6	2,995.6	63,343
1980	1,014	847	152.9	442,259	1,505.0	481.6	3,141.3	54,609
1981	1,066	882	154.4	440,472	1,530.8	441.3	3,289.8	62,110
1982	1,069	883	155.1	461,944	1,549.7	418.2	3,421.3	59,909
1983	1,078	895	151.5	474,267	1,524.6	371.9	3,546.9	54,927
1984	1,148	945	152.8	496,852	1,548.7	351.8	3,596.8	55,205
1985	1,183	970	152.1	527,830	1,553.0	328.9	3,680.5	52,881
1986	1,222	1,008	156.7	557,913	1,610.3	329.0	3,773.2	53,135
1987	1,231	1,014	153.1	558,055	1,583.8	330.3	3,855.8	47,228
1988	1,242	1,007	150.1	578,344	1,563.2	281.3	3,966.6	47,296
1989	1,253	1,016	152.1	607,313	1,592.8	305.6	4,052.7	51,045
1990	1,099	906	138.6	663,474	1,459.1	244.1	4,132.4	44,978
1991	-	725	-	714,224	1,298.1	210.1	4,231.8	30,496
1992	-	-	-	747,542	-	-	-	-

**Seriya S9:** Kvartalni indeks industrijske proizvodnje u SR Jugoslaviji (1992=100)

Godina	I	II	III	IV
1987	175.0	175.8	158.5	186.2
1988	176.9	178.0	165.2	188.1
1989	180.3	186.2	158.6	186.2
1990	160.6	146.5	138.6	159.3
1991	130.7	130.9	118.8	128.5
1992	119.5	112.9	79.2	88.4
1993	71.7	65.1	54.4	59.7
1994	53.4	-	-	-

**Seriya S10:** Kvartalni indeks industrijske proizvodnje u Srbiji (1989=100)

Godina	I	II	III	IV
1972	42.3	46.3	42.1	49.8
1973	45.6	49.4	46.9	52.5
1974	50.3	55.2	51.5	59.7
1975	55.4	58.9	53.5	62.7
1976	57.2	59.6	57.3	67.3
1977	63.4	66.5	62.8	71.0
1978	68.7	72.1	67.7	77.8
1979	75.7	78.6	71.3	84.6
1980	80.3	81.5	73.3	91.1
1981	85.7	86.2	78.4	92.6
1982	84.6	85.7	78.2	90.5
1983	83.9	85.2	79.2	94.2
1984	87.0	90.2	85.1	102.1
1985	88.8	95.0	87.4	104.1
1986	96.7	97.3	88.3	105.4
1987	98.8	99.0	88.6	104.5
1988	100.2	98.9	90.5	105.7
1989	102.3	102.7	90.1	104.7

**Seriya S11: Kvartalni indeks industrijske proizvodnje u bivšoj Jugoslaviji (1989=100)**

<b>Godina</b>	<b>I</b>	<b>II</b>	<b>III</b>	<b>IV</b>
1956	10.3	11.7	12.5	14.3
1957	12.5	13.9	14.4	16.2
1958	14.3	15.4	15.5	17.8
1959	15.7	17.6	17.9	20.3
1960	18.7	20.7	20.3	22.8
1961	20.4	22.3	21.8	24.0
1962	21.4	23.2	23.4	26.5
1963	23.7	27.2	27.3	30.7
1964	28.3	31.7	31.4	35.2
1965	31.8	34.3	33.5	37.2
1966	33.5	35.9	35.0	38.2
1967	34.0	35.8	34.6	37.8
1968	34.4	37.9	37.2	41.8
1969	38.0	42.9	42.4	45.0
1970	42.2	46.3	45.1	50.0
1971	46.8	51.8	49.5	54.4
1972	51.8	55.5	52.7	58.1
1973	55.3	59.1	55.6	61.5
1974	60.4	65.0	61.3	69.5
1975	66.0	69.0	62.9	72.6
1976	67.7	68.6	66.4	76.9
1977	74.2	77.5	72.8	81.4
1978	80.1	84.2	78.8	89.2
1979	86.4	90.9	85.0	96.2
1980	92.4	94.6	85.9	100.5
1981	94.8	100.1	91.6	102.8
1982	97.2	100.3	91.0	101.6
1983	97.0	100.1	92.5	104.9
1984	100.4	105.6	98.1	112.4
1985	103.0	109.1	99.8	115.7
1986	110.0	113.0	103.3	118.0
1987	113.4	115.4	102.8	115.6
1988	112.2	112.1	102.0	115.5
1989	115.5	116.6	102.4	114.3
1990	107.2	99.1	91.9	100.8
1991	86.0	-	-	-

Serija S12: Kvartalna nezaposlenost u bivšoj Jugoslaviji (u hiljadama)

Godina	I	II	III	IV
1961	233	175	156	201
1962	286	226	197	238
1963	318	224	176	202
1964	273	196	174	206
1965	275	228	203	242
1966	304	256	220	251
1967	300	263	238	275
1968	334	304	292	315
1969	382	336	295	310
1970	368	327	292	291
1971	326	290	267	282
1972	327	306	303	326
1973	387	375	374	391
1974	445	435	444	471
1975	529	522	536	574
1976	622	622	633	664
1977	711	691	687	714
1978	744	725	727	743
1979	774	749	750	775
1980	799	771	777	795
1981	816	789	799	830
1982	859	848	855	888
1983	915	898	905	922
1984	959	946	980	1,010
1985	1,037	1,022	1,035	1,065
1986	1,096	1,082	1,082	1,087
1987	1,094	1,068	1,068	1,093
1988	1,120	1,116	1,122	1,165
1989	1,191	1,178	1,198	1,240
1990	1,271	1,277	1,313	1,374
1991	1,433	1,489	1,541	1,543

Serija S13: Mesečni indeks industrijske proizvodnje u SR Jugoslaviji (1992=100)

Godina	JAN	FEB	MAR	APR	MAJ	JUN	JUL	AVG	SEP	OKT	NOV	DEC
1987	158.7	173.1	193.2	180.5	171.7	175.2	143.9	153.3	178.5	188.5	182.6	187.6
1988	159.6	176.4	194.7	178.1	174.6	181.2	144.0	167.8	183.7	189.1	179.0	196.2
1989	170.1	174.4	196.4	188.8	182.2	187.6	134.8	161.4	179.6	193.2	184.4	180.9
1990	154.2	158.7	169.0	149.0	141.8	148.9	125.3	138.6	152.0	169.1	156.7	152.0
1991	129.4	125.6	137.1	133.4	130.3	129.1	110.3	121.0	125.1	130.3	125.1	130.1
1992	107.4	120.7	130.4	120.3	116.6	101.7	72.6	76.4	88.7	94.0	82.3	89.0
1993	65.4	71.7	77.9	68.1	63.1	64.0	51.8	54.6	56.8	61.5	58.6	59.1
1994	45.9	51.6	62.6	64.7	60.4	-	-	-	-	-	-	-

**Seriya S14:** Mesečni indeks industrijske proizvodnje u Srbiji (1989=100)

Godina	JAN	FEB	MAR	APR	MAJ	JUN	JUL	AVG	SEP	OKT	NOV	DEC
1972	38.5	41.8	46.6	44.7	46.3	48.0	39.6	39.5	47.3	49.9	48.8	50.7
1973	43.3	44.6	48.8	48.0	50.4	49.7	43.8	46.5	50.4	53.5	51.6	52.4
1974	47.1	48.8	55.0	54.5	55.4	55.9	48.3	50.8	55.5	60.0	56.8	62.4
1975	52.3	54.6	59.4	59.9	58.4	58.5	48.8	51.3	60.5	63.7	59.5	64.8
1976	52.9	56.6	62.1	58.2	58.5	62.1	52.0	56.7	63.2	65.8	64.6	71.6
1977	59.3	62.1	69.0	66.1	66.6	67.0	55.6	63.0	69.6	70.1	68.3	74.5
1978	63.2	67.0	75.9	70.7	72.7	72.7	58.6	68.4	76.0	78.5	75.4	79.6
1979	71.6	73.0	82.6	78.4	79.2	78.1	63.6	72.6	77.7	84.3	81.2	88.2
1980	74.7	80.9	85.3	83.1	81.1	80.3	63.6	73.7	82.5	93.4	88.7	91.2
1981	80.0	88.3	88.7	87.6	84.7	86.2	69.7	77.9	87.5	91.8	90.1	95.9
1982	79.7	81.6	92.6	87.9	83.3	85.8	67.5	79.1	88.0	91.3	86.4	93.7
1983	79.0	81.3	91.4	85.2	82.0	88.4	67.3	79.8	90.6	95.5	92.6	94.4
1984	82.4	83.5	95.0	90.2	87.1	93.3	76.6	84.3	94.4	104.4	100.3	101.5
1985	81.4	86.4	98.7	96.1	95.1	93.8	79.1	86.7	96.4	104.9	99.9	107.5
1986	93.2	94.0	102.8	98.0	95.8	98.2	80.3	86.3	98.4	106.1	104.2	106.0
1987	90.2	98.1	108.0	101.0	97.2	98.9	80.1	85.8	99.9	105.7	102.3	105.6
1988	91.6	100.1	108.9	99.5	97.1	100.0	81.3	88.5	101.6	105.5	100.5	111.2
1989	96.6	99.1	111.2	102.4	102.9	102.9	79.3	89.8	101.2	108.1	103.3	102.7

Serija S15: Mesečni indeks industrijske proizvodnje u bivšoj Jugoslaviji (1989=100)

Godina	JAN	FEB	MAR	APR	MAJ	JUN	JUL	AVG	SEP	OKT	NOV	DEC
1956	10.3	9.2	11.5	10.9	11.6	12.6	11.6	12.7	13.2	14.5	14.0	14.4
1957	11.9	12.1	13.4	13.7	13.8	14.3	13.5	14.5	15.1	15.8	15.7	17.0
1958	13.8	14.0	15.1	15.1	15.1	15.9	14.4	15.5	16.8	17.6	16.9	19.0
1959	14.4	15.3	17.4	16.8	17.1	18.8	16.4	17.4	19.8	19.9	19.0	22.0
1960	16.8	18.4	21.0	20.4	20.0	21.6	18.8	20.3	21.6	22.7	21.3	24.5
1961	18.7	19.8	22.8	21.9	22.1	22.8	19.8	22.4	23.2	23.9	23.2	24.8
1962	20.3	20.4	23.3	22.1	23.3	24.2	21.6	23.9	24.9	26.9	25.7	27.0
1963	21.5	22.7	26.9	27.0	27.0	27.5	25.8	27.5	28.8	31.5	29.6	31.1
1964	26.0	28.1	30.7	31.4	31.1	32.7	29.7	31.0	33.5	35.1	33.6	36.9
1965	29.4	30.4	35.5	35.1	32.6	35.2	30.4	33.3	36.7	36.9	34.7	40.0
1966	30.4	32.5	37.6	36.2	34.5	37.1	31.8	35.4	37.9	37.5	36.2	40.9
1967	31.3	33.1	37.7	35.0	35.6	36.6	31.7	35.1	37.1	38.6	36.2	38.5
1968	31.9	33.9	37.5	37.7	37.9	38.0	35.1	37.5	39.1	42.7	40.1	42.6
1969	35.3	36.8	42.0	42.2	42.7	43.8	39.8	41.9	45.4	47.6	43.1	44.3
1970	39.0	41.5	46.1	45.9	45.4	47.6	42.3	44.6	48.3	50.3	48.8	50.9
1971	42.7	46.2	51.5	51.4	50.5	53.5	46.5	48.9	53.0	54.5	51.5	57.1
1972	47.6	51.2	56.6	53.6	55.7	57.3	47.6	53.8	56.7	58.6	56.6	59.3
1973	52.5	54.1	59.2	57.4	60.0	59.8	51.5	56.2	59.0	63.2	60.9	60.2
1974	57.2	58.6	65.3	64.8	64.7	65.4	57.4	60.6	66.1	70.0	66.0	72.6
1975	62.6	65.2	70.3	70.7	68.1	68.1	57.8	61.8	69.2	73.7	70.3	73.9
1976	64.3	66.4	72.6	67.5	67.2	71.0	59.6	66.4	73.2	75.5	74.8	80.4
1977	69.3	72.3	80.9	77.2	76.8	78.5	64.2	74.0	80.2	80.9	78.5	84.6
1978	74.7	77.8	87.7	82.0	84.9	85.8	69.2	80.4	86.8	90.0	86.7	90.8
1979	80.6	84.0	94.7	88.5	91.6	92.6	74.6	86.8	93.7	97.1	93.6	98.0
1980	85.6	93.3	98.4	95.4	94.1	94.3	76.5	85.9	95.5	103.1	98.0	100.6
1981	87.8	93.2	103.4	100.6	98.0	101.8	82.9	90.5	101.3	103.8	99.9	104.7
1982	90.7	95.0	105.8	101.8	97.3	101.8	81.1	90.8	101.2	101.9	96.8	106.1
1983	90.9	94.1	105.9	98.5	97.4	104.5	79.8	94.3	103.4	106.8	100.9	107.1
1984	93.8	98.6	108.9	103.7	104.2	108.8	88.5	98.6	107.1	115.5	109.9	111.9
1985	94.4	100.4	114.2	109.7	108.7	109.1	90.0	99.4	109.9	117.3	111.3	118.4
1986	106.0	106.9	117.1	113.9	111.2	114.1	93.1	101.5	115.2	118.5	116.0	119.6
1987	103.7	112.9	123.7	116.5	112.6	117.0	93.4	100.2	114.9	117.2	112.8	116.9
1988	103.2	112.2	121.1	111.0	109.9	115.5	90.8	100.9	114.4	115.5	109.9	121.1
1989	107.6	112.1	126.7	115.5	115.5	118.8	90.8	103.1	113.2	118.8	113.2	111.0
1990	102.0	105.4	114.2	100.3	97.0	100.1	83.3	92.4	100.1	108.9	100.5	93.2
1991	83.5	83.2	91.3	81.7	78.5	-	-	-	-	-	-	-



Serija S16: Mesečna nezaposlenost u bivšoj Jugoslaviji (u hiljadama)

Godina	JAN	FEB	MAR	APR	MAJ	JUN	JUL	AVG	SEP	OKT	NOV	DEC
1961	236	245	218	193	177	154	151	154	162	172	199	233
1962	267	296	294	257	218	202	198	197	196	208	233	274
1963	309	339	307	263	221	187	176	175	177	181	197	229
1964	273	288	259	223	193	172	172	171	180	188	202	228
1965	266	285	275	250	229	206	199	197	212	221	237	267
1966	292	310	309	283	256	230	220	214	225	236	251	265
1967	290	305	306	287	264	238	234	233	246	257	276	291
1968	319	338	344	329	303	280	288	292	295	303	314	327
1969	360	389	396	378	334	295	294	293	299	303	311	316
1970	350	374	379	358	330	294	289	291	297	294	289	290
1971	313	329	335	314	292	264	265	266	271	274	283	290
1972	313	334	335	323	306	289	296	301	311	316	327	334
1973	367	391	403	394	376	354	368	375	379	381	393	399
1974	429	449	456	450	436	418	434	443	456	462	473	479
1975	508	535	543	540	524	502	521	534	553	564	575	584
1976	605	624	636	636	627	604	622	630	647	660	667	665
1977	693	714	725	720	694	660	676	686	698	707	717	717
1978	734	748	751	738	729	708	720	724	737	747	744	738
1979	757	780	785	774	753	720	738	746	767	771	778	775
1980	788	804	805	792	770	751	768	771	792	794	801	789
1981	806	819	824	811	793	763	784	795	817	825	832	833
1982	844	859	874	867	848	828	843	852	871	882	894	888
1983	902	917	927	913	896	885	899	903	914	920	931	916
1984	943	958	976	965	947	926	964	982	995	1,006	1,012	1,013
1985	1,024	1,034	1,053	1,041	1,021	1,005	1,023	1,033	1,048	1,061	1,069	1,064
1986	1,083	1,099	1,107	1,104	1,083	1,058	1,074	1,082	1,089	1,088	1,089	1,085
1987	1,084	1,097	1,101	1,087	1,067	1,050	1,060	1,064	1,080	1,091	1,100	1,087
1988	1,109	1,120	1,131	1,125	1,113	1,111	1,118	1,122	1,127	1,154	1,168	1,173
1989	1,187	1,192	1,193	1,187	1,178	1,170	1,187	1,198	1,209	1,228	1,243	1,248
1990	1,266	1,270	1,278	1,279	1,274	1,277	1,294	1,310	1,335	1,358	1,376	1,389
1991	1,415	1,428	1,455	1,478	1,489	1,499	1,534	1,550	1,540	1,541	1,556	1,532

Serija 17: Nedeljne stope rasta cena na malo u SR Jugoslaviji u 1994. godini.

Mesec	Nedelja				
	1	2	3	4	5
Februar	-0.5	1.5	0.3	-1.9	
Mart	-0.3	0.9	-0.2	-0.3	-0.3
April	-0.7	1.8	-0.4	-0.4	
Maj	1.0	1.4	-0.9	0.1	
Jun	-0.3	0.0	2.0	-1.9	-0.3
Jul	-0.4	0.2	-0.2	-0.1	
Avgust	0.1	0.0	-0.2	0.5	0.3

## DODATAK B

### STATISTIČKE TABLICE

- Tabela B1**    Vrednosti normalne standardizovane funkcije rasporeda
- Tabela B2**    Kritične vrednosti Studentovog rasporeda
- Tabela B3**    Kritične vrednosti  $\chi^2$  – rasporeda
- Tabela B4**    Kritične vrednosti  $F$  – rasporeda ( $\alpha = 5\%$ )
- Tabela B5**    Kritične vrednosti  $F$  – rasporeda ( $\alpha = 1\%$ )
- Tabela B6**    Kritične vrednosti Dickey-Fullerovih  $\tau$  statistika
- Tabela B7**    Kritične vrednosti Dickey-Fullerovih  $\Phi$  statistika
- Tabela B8**    Kritične vrednosti integracione Durbin-Watsonove statistike
- Tabela B9**    Kritične vrednosti Dickey-Hasza-Fullerove statistike
- Tabela B10**   Kritične vrednosti Hylleberg-Engle-Granger-Yoo-ove statistike
- Tabela B11**   Kritične vrednosti Fisherove  $T$  statistike
- Tabela B12**   Kritične vrednosti Johansenovog testa kointegracije

Tabela B1 Vrednosti normalne standardizovane funkcije rasporeda

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
<b>0.0</b>	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
<b>0.1</b>	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
<b>0.2</b>	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
<b>0.3</b>	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
<b>0.4</b>	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
<b>0.5</b>	0.3085	0.305	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
<b>0.6</b>	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
<b>0.7</b>	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
<b>0.8</b>	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
<b>0.9</b>	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
<b>1.0</b>	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
<b>1.1</b>	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
<b>1.2</b>	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
<b>1.3</b>	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
<b>1.4</b>	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
<b>1.5</b>	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
<b>1.6</b>	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
<b>1.7</b>	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
<b>1.8</b>	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
<b>1.9</b>	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
<b>2.0</b>	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
<b>2.1</b>	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
<b>2.2</b>	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
<b>2.3</b>	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
<b>2.4</b>	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
<b>2.5</b>	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
<b>2.6</b>	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
<b>2.7</b>	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
<b>2.8</b>	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
<b>2.9</b>	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
<b>3.0</b>	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010

Tabela B2 Kritične vrednosti Studentovog rasporeda

Stepeni slobode	N i v o z n a č a j n o s t i					
	25%	10%	5%	2.5%	1%	0.5%
1	1.0000	3.0777	6.3137	12.7062	31.8210	63.6559
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9645	9.9250
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8408
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9979	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.6884	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.6876	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.6864	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	0.6858	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.6853	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.6848	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7970
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.6840	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.6837	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.6834	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.6830	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
31	0.6825	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
32	0.6822	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
33	0.6820	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
34	0.6818	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284
35	0.6816	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238

Stepeni slobode	N i v o z n a č a j n o s t i					
	25%	10%	5%	2.5%	1%	0.5%
36	0.6814	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
37	0.6812	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
38	0.6810	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
39	0.6808	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
40	0.6807	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
41	0.6805	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
42	0.6804	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981
43	0.6802	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951
44	0.6801	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923
45	0.6800	1.3007	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896
46	0.6799	1.3002	1.6787	2.0129	2.4102	2.6870
47	0.6797	1.2998	1.6779	2.0117	2.4083	2.6846
48	0.6796	1.2994	1.6772	2.0106	2.4066	2.6822
49	0.6795	1.2991	1.6766	2.0096	2.4049	2.6800
50	0.6794	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
51	0.6793	1.2984	1.6753	2.0076	2.4017	2.6757
52	0.6792	1.2980	1.6747	2.0066	2.4002	2.6737
53	0.6791	1.2977	1.6741	2.0057	2.3988	2.6718
54	0.6791	1.2974	1.6736	2.0049	2.3974	2.6700
55	0.6790	1.2971	1.6730	2.0040	2.3961	2.6682
56	0.6789	1.2969	1.6725	2.0032	2.3948	2.6665
57	0.6788	1.2966	1.6720	2.0025	2.3936	2.6649
58	0.6787	1.2963	1.6716	2.0017	2.3924	2.6633
59	0.6787	1.2961	1.6711	2.0010	2.3912	2.6618
60	0.6786	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
61	0.6785	1.2956	1.6702	1.9996	2.3890	2.6589
62	0.6785	1.2954	1.6698	1.9990	2.3880	2.6575
63	0.6784	1.2951	1.6694	1.9983	2.3870	2.6561
64	0.6783	1.2949	1.6690	1.9977	2.3860	2.6549
65	0.6783	1.2947	1.6686	1.9971	2.3851	2.6536
66	0.6782	1.2945	1.6683	1.9966	2.3842	2.6524
67	0.6782	1.2943	1.6679	1.9960	2.3833	2.6512
68	0.6781	1.2941	1.6676	1.9955	2.3824	2.6501
69	0.6781	1.2939	1.6672	1.9949	2.3816	2.6490
70	0.6780	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479
71	0.6780	1.2936	1.6666	1.9939	2.3800	2.6469
72	0.6779	1.2934	1.6663	1.9935	2.3793	2.6458
73	0.6779	1.2933	1.6660	1.9930	2.3785	2.6449
74	0.6778	1.2931	1.6657	1.9925	2.3778	2.6439
75	0.6778	1.2929	1.6654	1.9921	2.3771	2.6430

Stepeni slobode	N i v o z n a č a j n o s t i					
	25%	10%	5%	2.5%	1%	0.5%
76	0.6777	1.2928	1.6652	1.9917	2.3764	2.6421
77	0.6777	1.2926	1.6649	1.9913	2.3758	2.6412
78	0.6776	1.2925	1.6646	1.9908	2.3751	2.6403
79	0.6776	1.2924	1.6644	1.9905	2.3745	2.6395
80	0.6776	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387
81	0.6775	1.2921	1.6639	1.9897	2.3733	2.6379
82	0.6775	1.2920	1.6636	1.9893	2.3727	2.6371
83	0.6775	1.2918	1.6634	1.9890	2.3721	2.6364
84	0.6774	1.2917	1.6632	1.9886	2.3716	2.6356
85	0.6774	1.2916	1.6630	1.9883	2.3710	2.6349
86	0.6774	1.2915	1.6628	1.9879	2.3705	2.6342
87	0.6773	1.2914	1.6626	1.9876	2.3700	2.6335
88	0.6773	1.2912	1.6624	1.9873	2.3695	2.6329
89	0.6773	1.2911	1.6622	1.9870	2.3690	2.6322
90	0.6772	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316
91	0.6772	1.2909	1.6618	1.9864	2.3680	2.6309
92	0.6772	1.2908	1.6616	1.9861	2.3676	2.6303
93	0.6771	1.2907	1.6614	1.9858	2.3671	2.6297
94	0.6771	1.2906	1.6612	1.9855	2.3667	2.6291
95	0.6771	1.2905	1.6611	1.9852	2.3662	2.6286
96	0.6771	1.2904	1.6609	1.9850	2.3658	2.6280
97	0.6770	1.2903	1.6607	1.9847	2.3654	2.6275
98	0.6770	1.2903	1.6606	1.9845	2.3650	2.6269
99	0.6770	1.2902	1.6604	1.9842	2.3646	2.6264
100	0.6770	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259
101	0.6769	1.2900	1.6601	1.9837	2.3638	2.6254
102	0.6769	1.2899	1.6599	1.9835	2.3635	2.6249
103	0.6769	1.2898	1.6598	1.9833	2.3631	2.6244
104	0.6769	1.2897	1.6596	1.9830	2.3627	2.6239
105	0.6768	1.2897	1.6595	1.9828	2.3624	2.6235
106	0.6768	1.2896	1.6594	1.9826	2.3620	2.6230
107	0.6768	1.2895	1.6592	1.9824	2.3617	2.6226
108	0.6768	1.2894	1.6591	1.9822	2.3614	2.6221
109	0.6767	1.2894	1.6590	1.9820	2.3610	2.6217
110	0.6767	1.2893	1.6588	1.9818	2.3607	2.6213
∞	0.6745	1.2816	1.6449	1.9600	2.3264	2.5758

Tabela B3 Kritične vrednosti  $\chi^2$  – rasporeda

Stepeni slobode	N i v o z n a č a j n o s t i							
	99.5%	99%	97.5%	95%	5%	2.5%	1%	0.5%
1	0.000	0.000	0.001	0.004	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.647	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.878	14.573	16.151	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.994
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.335
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672

Stepeni slobode	N i v o z n a č a j n o s t i							
	99.5%	99%	97.5%	95%	5%	2.5%	1%	0.5%
31	14.458	15.655	17.539	19.281	44.985	48.232	52.191	55.002
32	15.134	16.362	18.291	20.072	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.815	17.073	19.047	20.867	47.400	50.725	54.775	57.648
34	16.501	17.789	19.806	21.664	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.192	18.509	20.569	22.465	49.802	53.203	57.342	60.275
36	17.887	19.233	21.336	23.269	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.586	19.960	22.106	24.075	52.192	55.668	59.893	62.883
38	19.289	20.691	22.878	24.884	53.384	56.895	61.162	64.181
39	19.996	21.426	23.654	25.695	54.572	58.120	62.428	65.475
40	20.707	22.164	24.433	26.509	55.758	59.342	63.691	66.766
41	21.421	22.906	25.215	27.326	56.942	60.561	64.950	68.053
42	22.138	23.650	25.999	28.144	58.124	61.777	66.206	69.336
43	22.860	24.398	26.785	28.965	59.304	62.990	67.459	70.616
44	23.584	25.148	27.575	29.787	60.481	64.201	68.710	71.892
45	24.311	25.901	28.366	30.612	61.656	65.410	69.957	73.166
46	25.041	26.657	29.160	31.439	62.830	66.616	71.201	74.437
47	25.775	27.416	29.956	32.268	64.001	67.821	72.443	75.704
48	26.511	28.177	30.754	33.098	65.171	69.023	73.683	76.969
49	27.249	28.941	31.555	33.930	66.339	70.222	74.919	78.231
50	27.991	29.707	32.357	34.764	67.505	71.420	76.154	79.490
51	28.735	30.475	33.162	35.600	68.669	72.616	77.386	80.746
52	29.481	31.246	33.968	36.437	69.832	73.810	78.616	82.001
53	30.230	32.019	34.776	37.276	70.993	75.002	79.843	83.253
54	30.981	32.793	35.586	38.116	72.153	76.192	81.069	84.502
55	31.735	33.571	36.398	38.958	73.311	77.380	82.292	85.749
56	32.491	34.350	37.212	39.801	74.468	78.567	83.514	86.994
57	33.248	35.131	38.027	40.646	75.624	79.752	84.733	88.237
58	34.008	35.914	38.844	41.492	76.778	80.936	85.950	89.477
59	34.770	36.698	39.662	42.339	77.930	82.117	87.166	90.715
60	35.534	37.485	40.482	43.188	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	124.342	129.561	135.807	140.170



Tabela B4 Kritične vrednosti  $F$  – rasporeda ( $\alpha = 5\%$ )

Stepeni slobode u imeniocu	Stepeni slobode u brojiocu								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.45		215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.51	199.50	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96
$\infty$	3.84	3.00	2.61	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

Stepeni slobode u imeniocu	Stepeni slobode u brojiocu									
	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	241.88	243.90	245.95	248.02	249.05	250.10	251.14	252.20	253.25	254.31
2	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
50	2.03	1.95	1.87	1.78	1.74	1.69	1.63	1.58	1.51	1.44
60	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
$\infty$	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Tabela B5 Kritične vrednosti  $F$  – rasporeda ( $\alpha = 1\%$ )

Stepeni slobode u imeniocu	Stepeni slobode u brojiocu								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4,052.18	4,999.34	5,403.53	5,624.26	5,763.96	5,858.95	5,928.33	5,980.95	6,022.4
2	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56
$\infty$	6.64	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41

Stepeni slobode u imeniocu	Stepeni slobode u brojiocu									
	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	6,055.93	6,106.68	6,156.97	6,208.66	6,234.27	6,260.35	6,286.43	6,312.97	6,339.51	6,365.59
2	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.48	99.48	99.49	99.50
3	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	3.43	3.00	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
50	2.70	2.56	2.42	2.27	2.18	2.10	2.01	1.91	1.80	1.68
60	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
$\infty$	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

Tabela B6 Kritične vrednosti Dickey-Fullerovih  $\tau$  statistika

$N$	Model	Nivo značajnosti	$\beta_{\infty}$	Greška ocene	$\beta_1$	$\beta_2$
1	Bez konstante	1%	-2.5658	0.0023	-1.960	-10.04
		5%	-1.9393	0.0008	-0.398	0.00
		10%	-1.6156	0.0007	-0.181	0.00
1	Bez trenda	1%	-3.4335	0.0024	-5.999	-29.25
		5%	-2.8621	0.0011	-2.738	-8.36
		10%	-2.5671	0.0009	-1.438	-4.48
1	Sa trendom	1%	-3.9638	0.0019	-8.353	-47.44
		5%	-3.4126	0.0012	-4.039	-17.83
		10%	-3.1279	0.0009	-2.418	-7.58
2	Bez trenda	1%	-3.9001	0.0022	-10.534	-30.03
		5%	-3.3377	0.0012	-5.967	-8.98
		10%	-3.0462	0.0009	-4.069	-5.73
2	Sa trendom	1%	-4.3266	0.0022	-15.531	-34.03
		5%	-3.7809	0.0013	-9.421	-15.06
		10%	-3.4959	0.0009	-7.203	-4.01
3	Bez trenda	1%	-4.2981	0.0023	-13.79	-46.37
		5%	-3.7429	0.0012	-8.352	-13.41
		10%	-3.4518	0.0010	-6.241	-2.79
3	Sa trendom	1%	-4.6676	0.0022	-18.492	-49.35
		5%	-4.1193	0.0011	-12.024	-13.13
		10%	-3.8344	0.0009	-9.188	-4.85
4	Bez trenda	1%	-4.6493	0.0023	-17.188	-59.20
		5%	-4.1000	0.0012	-10.745	-21.57
		10%	-3.8110	0.0009	-8.317	-5.19
4	Sa trendom	1%	-4.9695	0.0021	-22.504	-50.22
		5%	-4.4294	0.0012	-14.501	-19.54
		10%	-4.1474	0.0010	-11.165	-9.88
5	Bez trenda	1%	-4.9587	0.0026	-22.140	-37.29
		5%	-4.4185	0.0013	-13.641	-21.16
		10%	-4.1327	0.0009	-10.638	-5.48
5	Sa trendom	1%	-5.2497	0.0024	-26.606	-49.56
		5%	-4.7154	0.0013	-17.432	-16.50
		10%	-4.4345	0.0010	-13.654	-5.77
6	Bez trenda	1%	-5.2400	0.0029	-26.278	-41.65
		5%	-4.7048	0.0018	-17.120	-11.17
		10%	-4.4242	0.0010	-13.347	0.00
6	Sa trendom	1%	-5.5127	0.0033	-30.735	-52.50
		5%	-4.9767	0.0017	-20.883	-9.05
		10%	-4.6999	0.0011	-16.445	0.00

Vrednosti iz tabele preuzete su iz MacKinnon (1991, Tabela 1).

Za ma koju veličinu uzorka ( $n$ ) ocenjena kritična vrednost testa je:  $\beta_{\infty} + \beta_1/n + \beta_2/n^2$ .  $N$  predstavlja broj I(1) serija za koje se testira nulta hipoteza da nisu kointegrirane, a  $\beta_{\infty}$  predstavlja asimptotsku kritičnu vrednost sa standardnom greškom ocene u narednoj koloni. Na primer za vremensku seriju od  $n = 55$  opservacija, u modelu sa trendom (izrazi (7.8) i (7.9) u okviru 7. Glave) ocenjena kritična vrednost testa na nivou značajnosti od 1% je:  $-3.9638 - 8.353/55 - 47.44/55^2 = -4.1307$ . Koeficijenti u prethodnom izrazu uzeti su iz 8. reda gornje tabele.

**Tabela B7** Kritične vrednosti Dickey-Fullerovih  $\Phi$  statistika

Veličina uzorka	$\Phi_1$			$\Phi_2$			$\Phi_3$		
	10%	5%	1%	10%	5%	1%	10%	5%	1%
25	4.12	5.18	7.88	4.67	5.68	8.21	5.91	7.24	10.61
50	3.94	4.86	7.06	4.31	5.13	7.02	5.61	6.73	9.31
100	3.86	4.71	6.70	4.16	4.88	6.50	5.47	6.49	8.73
250	3.81	4.63	6.52	4.07	4.75	6.22	5.39	6.34	8.43
500	3.79	4.61	6.47	4.05	4.71	6.15	5.36	6.30	8.34
$\infty$	3.78	4.59	6.43	4.03	4.68	6.09	5.34	6.25	8.27

Vrednosti iz tabele preuzete su iz Dickey i Fullera (1981, s. 1063).

**Tabela B8** Kritične vrednosti integracione Durbin-Watsonove statistike

Veličina uzorka	Proces slučajnog hoda			Proces slučajnog hoda sa konstantom		
	1%	2.5%	5%	1%	2.5%	5%
20	1.50	1.28	1.10	1.86	1.62	1.45
25	1.28	1.08	0.93	1.57	1.36	1.21
30	1.11	0.92	0.79	1.36	1.18	1.04
35	0.98	0.81	0.69	1.18	1.05	0.91
40	0.87	0.73	0.61	1.06	0.93	0.81
45	0.79	0.66	0.55	0.97	0.86	0.73
50	0.72	0.59	0.50	0.89	0.76	0.66
60	0.63	0.51	0.42	0.75	0.65	0.56
70	0.54	0.44	0.37	0.66	0.56	0.48
80	0.47	0.39	0.32	0.58	0.50	0.43
90	0.41	0.35	0.29	0.52	0.45	0.39
100	0.37	0.32	0.26	0.47	0.40	0.35

Vrednosti iz tabele preuzete su iz Bhargava (1983, ss. 32-33).

**Tabela B9** Kritične vrednosti Dickey-Hasza-Fullerove statistike

	<i>n</i>	1%	2.5%	5%	10%
<i>s</i> = 2	20	-4.46	-3.98	-3.60	-3.18
	30	-4.25	-3.84	-3.50	-3.13
	40	-4.15	-3.77	-3.45	-3.11
	100	-4.00	-3.66	-3.38	-3.07
	200	-3.95	-3.63	-3.36	-3.05
	400	-3.93	-3.62	-3.35	-3.05
	∞	-3.90	-3.60	-3.34	-3.04
<i>s</i> = 4	40	-5.01	-4.57	-4.21	-3.83
	60	-4.85	-4.46	-4.14	-3.79
	80	-4.78	-4.41	-4.11	-3.78
	200	-4.67	-4.34	-4.06	-3.75
	400	-4.64	-4.32	-4.05	-3.74
	800	-4.62	-4.31	-4.04	-3.74
	∞	-4.61	-4.30	-4.04	-3.73
<i>s</i> = 12	120	6.63	-6.20	-5.86	-5.49
	180	-6.52	-6.15	-5.84	-5.49
	240	-6.47	-6.13	-5.83	-5.49
	600	-6.39	-6.09	-5.82	-5.49
	1,200	-6.37	-6.07	-5.82	-5.49
	2,400	-6.36	-6.07	-5.82	-5.49
	∞	-6.35	-6.06	-5.82	-5.49

Vrednosti iz tabele preuzete su iz Dickey, Hasza i Fullera (1984, Tabela 7).

Tabela B10 Kritične vrednosti Hylleberg-Engle-Granger-Yoo-ove statistike

Deterministička komponenta	n	"t": $\pi_1$				"t": $\pi_2$				"t": $\pi_3$			
		1%	2.5%	5%	10%	1%	2.5%	5%	10%	1%	2.5%	5%	10%
bez konstante, sezonskih promenljivih i trenda	48	-2.72	-2.29	-1.95	-1.59	-2.67	-2.27	-1.95	-1.60	-2.66	-2.23	-1.93	-1.52
	100	-2.60	-2.26	-1.97	-1.61	-2.61	-2.22	-1.92	-1.57	-2.55	-2.18	-1.90	-1.53
	136	-2.62	-2.25	-1.93	-1.59	-2.60	-2.23	-1.94	-1.61	-2.58	-2.21	-1.92	-1.56
	200	-2.62	-2.23	-1.94	-1.62	-2.60	-2.24	-1.95	-1.61	-2.58	-2.24	-1.92	-1.55
sa konstantom, a bez sezonskih promenljivih i trenda	48	-3.66	-3.25	-2.96	-2.62	-2.68	-2.27	-1.95	-1.60	-2.64	-2.23	-1.90	-1.52
	100	-3.47	-3.14	-2.88	-2.58	-2.61	-2.24	-1.95	-1.60	-2.61	-2.23	-1.90	-1.54
	136	-3.51	-3.17	-2.89	-2.58	-2.60	-2.21	-1.91	-1.58	-2.53	-2.18	-1.88	-1.53
	200	-3.48	-3.13	-2.87	-2.57	-2.58	-2.22	-1.92	-1.59	-2.57	-2.21	-1.90	-1.53
sa konstantom i sezonskim promenljivama, a bez trenda	48	-3.77	-3.39	-3.08	-2.72	-3.75	-3.37	-3.04	-2.69	-4.31	-3.92	-3.61	-3.24
	100	-3.55	-3.22	-2.95	-2.63	-3.60	-3.22	-2.94	-2.63	-4.06	-3.72	-3.44	-3.14
	136	-3.56	-3.23	-2.94	-2.62	-3.49	-3.15	-2.90	-2.59	-4.06	-3.72	-3.44	-3.11
	200	-3.51	-3.18	-2.91	-2.59	-3.50	-3.16	-2.89	-2.60	-4.00	-3.67	-3.38	-3.07
sa konstantom, bez sezonskih promenljivih i sa trendom	48	-4.23	-3.85	-3.56	-3.21	-2.65	-2.24	-1.91	-1.57	-2.68	-2.27	-1.92	-1.52
	100	-4.07	-3.73	-3.47	-3.16	-2.58	-2.24	-1.94	-1.60	-2.56	-2.19	-1.89	-1.54
	136	-4.08	-3.75	-3.46	-3.16	-2.65	-2.25	-1.96	-1.63	-2.56	-2.20	-1.90	-1.52
	200	-4.05	-3.70	-3.44	-3.15	-2.59	-2.25	-1.95	-1.62	-2.58	-2.21	-1.92	-1.56
sa konstantom, sezonskim promenljivama i sa trendom	48	-4.66	-4.04	-3.71	-3.37	-3.80	-3.41	-3.08	-2.73	-4.46	-4.02	-3.66	-3.28
	100	-4.09	-3.80	-3.53	-3.22	-3.60	-3.22	-2.94	-2.63	-4.12	-3.76	-3.48	-3.14
	136	-4.15	-3.80	-3.52	-3.21	-3.57	-3.18	-2.93	-2.61	-4.05	-3.72	-3.44	-3.12
	200	-4.07	-3.74	-3.49	-3.18	-3.52	-3.18	-2.91	-2.60	-4.04	-3.69	-3.41	-3.10

Deterministička komponenta	n	"t": $\pi_4$								"F": $\pi_3 \cap \pi_4$			
		1%	2.5%	5%	10%	90%	95%	97.5%	99%	1%	2.5%	5%	10%
bez konstante, sezonskih promenljivih i trenda	48	-2.51	-2.11	-1.76	-1.35	1.33	1.72	2.05	2.49	2.45	3.26	4.04	5.02
	100	-2.43	-2.01	-1.68	-1.32	1.31	1.67	2.00	2.40	2.39	3.12	3.89	4.89
	136	-2.44	-1.99	-1.68	-1.31	1.30	1.66	1.99	2.38	2.41	3.14	3.86	4.81
	200	-2.43	-1.98	-1.65	-1.30	1.29	1.67	1.97	2.36	2.42	3.16	3.92	4.81
sa konstantom, a bez sezonskih promenljivih i trenda	48	-2.44	-2.06	-1.72	-1.33	1.30	1.68	2.04	2.41	2.32	3.04	3.78	4.78
	100	-2.38	-1.99	-1.68	-1.30	1.28	1.65	1.97	2.32	2.35	3.08	3.81	4.77
	136	-2.36	-1.98	-1.68	-1.31	1.27	1.65	1.97	2.31	2.36	3.00	3.70	4.73
	200	-2.36	-1.98	-1.66	-1.29	1.28	1.65	1.96	2.30	2.37	3.12	3.86	4.76
sa konstantom i sezonskim promenljivama, a bez trenda	48	-2.86	-2.37	-1.98	-1.53	1.54	1.96	2.35	2.81	5.50	6.60	7.68	9.22
	100	-2.78	-2.32	-1.96	-1.53	1.52	1.93	2.29	2.73	5.56	6.57	7.72	8.74
	136	-2.72	-2.31	-1.96	-1.52	1.51	1.92	2.28	2.71	5.56	6.63	7.66	8.92
	200	-2.74	-2.33	-1.96	-1.54	1.53	1.95	2.32	2.78	5.56	6.61	7.53	8.93
sa konstantom, bez sezonskih promenljivih i sa trendom	48	-2.41	-2.05	-1.70	-1.33	1.26	1.64	1.96	2.37	2.23	2.95	3.70	4.64
	100	-2.38	-1.97	-1.65	-1.28	1.28	1.65	1.98	2.32	2.31	2.98	3.71	4.70
	136	-2.36	-1.97	-1.64	-1.29	1.26	1.62	1.92	2.31	2.33	3.04	3.69	4.57
	200	-2.35	-1.97	-1.66	-1.29	1.26	1.64	1.96	2.30	2.34	3.07	3.76	4.66
sa konstantom, sezonskim promenljivama i sa trendom	48	-2.75	-2.26	-1.91	-1.48	1.51	1.97	2.34	2.78	5.37	6.55	7.70	9.27
	100	-2.76	-2.32	-1.94	-1.51	1.51	1.92	2.28	2.69	5.52	6.60	7.52	8.79
	136	-2.71	-2.78	-1.94	-1.51	1.53	1.96	2.31	2.78	5.55	6.62	7.59	8.77
	200	-2.65	-2.27	-1.92	-1.48	1.55	1.97	2.31	2.71	5.56	6.57	7.56	8.96

Vrednosti iz tabele preuzete su iz Hylleberg-Engle-Granger-Yoo (1990, Tabela 1a-1b).



Tabela B11 Kritične vrednosti Fisherove  $T$  statistike

$N = [n/2]$	Kritična vrednost $g_{0.05}$	
	tačna formula	aproksimacija
5	0.68377	0.68377
10	0.44495	0.44495
15	0.33462	0.33463
20	0.27040	0.27046
25	0.22805	0.22813
30	0.19784	0.19794
35	0.17513	0.17525
40	0.15738	0.15752
45	0.14310	0.14324
50	0.13135	0.13149

Vrednosti iz tabele preuzete su iz Weia (1990, s. 262).

Tabela B12 Kritične vrednosti Johansenovog testa kointegracije

Dimenzija	N i v o z n a č a j n o s t i					
	50%	20%	10%	5%	2.5%	1%
<b>Nema linearnog trenda u podacima (konstanta u VAR modelu)</b>						
Statistika maksimalnog karakterističnog korena						
1	0.447	1.699	2.816	3.962	5.332	6.936
2	6.852	10.125	12.099	14.036	15.810	17.936
3	12.381	16.324	18.697	20.778	23.002	25.521
4	17.719	22.113	24.712	27.169	29.335	31.943
5	23.211	27.899	30.774	33.178	35.546	38.341
Statistika traga						
1	0.447	1.699	2.816	3.962	5.332	6.936
2	7.638	11.164	13.338	15.197	17.299	19.310
3	18.759	23.868	26.791	29.509	32.313	35.397
4	33.672	40.250	43.964	47.181	50.424	53.792
5	52.588	60.215	65.063	68.905	72.140	76.955
<b>Linearni trend u podacima (konstanta u VAR modelu)</b>						
Statistika maksimalnog karakterističnog korena						
1	2.415	4.905	6.691	8.083	9.658	11.576
2	7.474	10.666	12.783	14.595	16.403	18.782
3	12.707	16.521	18.959	21.279	23.362	26.154
4	17.875	22.341	24.917	27.341	29.599	32.616
5	23.132	27.953	30.818	33.262	35.700	38.858
Statistika traga						
1	2.415	4.905	6.691	8.083	9.658	11.576
2	9.335	13.038	15.583	17.844	19.611	21.962
3	20.188	25.445	28.436	31.256	34.062	37.291
4	34.873	41.623	45.248	48.419	51.801	55.551
5	53.373	61.566	65.956	69.977	73.031	77.911
<b>Konstanta u kointegracionoj jednačini</b>						
Statistika maksimalnog karakterističnog korena						
1	3.474	5.877	7.563	9.094	10.709	12.740
2	8.337	11.628	13.781	15.752	17.622	19.834
3	13.494	17.474	19.796	21.894	23.836	26.409
4	18.592	22.938	25.611	28.167	30.262	33.121
5	23.817	28.643	31.592	34.397	36.625	39.672
Statistika traga						
1	3.474	5.877	7.563	9.094	10.709	12.741
2	11.380	15.359	17.957	20.168	22.202	24.988
3	23.243	28.768	32.093	35.068	37.603	40.198
4	38.844	45.635	49.925	53.347	56.449	60.054
5	58.361	66.624	71.472	75.328	78.857	82.969

Vrednosti iz tabele preuzete su iz Johansen i Juselius (1990).